DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GUARAPUAVA

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE, UNICENTRO-PR

O USO DE SIMULAÇÕES INTERATIVAS *PHET* NO ENSINO DE FRAÇÕES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FRANCIELE DO BELÉM MAKUCH

GUARAPUAVA, PR

2016

FRANCIELE DO BELÉM MAKUCH

O USO DE SIMULAÇÕES INTERATIVAS *PHET* NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Márcio André Martins

Orientador

GUARAPUAVA, PR

2016

FRANCIELE DO BELÉM MAKUCH

O USO DE SIMULAÇÕES INTERATIVAS *PHET* NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada em __ de ___ de 2016

Prof. Dr. Dionísio Burak – UNICENTRO

Prof(a). Dr(a). Sani de Carvalho Rutz da Silva – UTFPR

Prof. Dr. Márcio André Martins

Orientador

GUARAPUAVA, PR

2016

Dedico este trabalho às pessoas mais presentes em minha vida:
Minha mãe Adelir R. Makuch (In memorian), pelo exemplo de vida que foi e sempre será.
Meu pai, o mais generoso de todos os pais.
Meu grande amor, Claudinei, por estar ao meu lado nos melhores e piores momentos de minha vida.
Adeline e Melissa, meus maiores PRESENTES!
AMO MUITO VOCÊS!

AGRADECIMENTOS

Inicio meus agradecimentos a DEUS, pela vida e possibilidade de percorrer este caminho, por Ele ter colocado pessoas tão especiais a meu lado, sem as quais certamente não teria dado conta!

A meus pais, JAIR e ADELIR, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade e me acharam A MELHOR de todas, mesmo não sendo. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser A MELHOR, mas a fazer o melhor de mim. Obrigada pelo amor incondicional!

A meu querido esposo, CLAUDINEI, por ser tão importante na minha vida e incondicional companheiro.

As minhas pequenas ADELINE e MELISSA, sempre a meu lado, me pondo para cima e me fazendo acreditar que posso mais que imagino.

A meus irmãos, GRACIELE, BARBARA e RICARDO, meu agradecimento especial, pois, cada um a seu modo, sempre se orgulharam de mim e confiaram em meu trabalho, me ajudando sempre que precisei. Obrigada pela confiança!

A todos os colegas de Mestrado que compartilharam comigo esses momentos de aprendizado.

Ao meu orientador por todos os momentos de paciência, compreensão e competência.

Enfim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuíram para que este percurso pudesse ser concluído.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
EC	Erro Conceitual
EITNV	Erro Interpretação de Texto Não Verbal
E	Etnomatemática
EM	Educação Matemática
ER	Erro na Resolução de Problemas
ETNRF	Erro no Tratamento de Número Racional Fracionário
HM	História da Matemática
I	Incorreta
MM	Modelagem Matemática
MT	Mídias Tecnológicas
NR	Não Respondeu
AO	Objeto de Aprendizagem
PC	Parcialmente Correta
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
RP	Resolução de Problemas
SAAM	Sala de Apoio à Aprendizagem de Matemática
SEED	Secretaria de Estado da Educação
SUED	Superintendência da Educação
TC	Totalmente Correta
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Franciele do Belém Mackuch. O uso de simulações interativas *PhET Simulations* no ensino de Frações.

Procurou-se realizar uma ação para contribuir com a solução de um dos problemas educacionais comumente identificado no cenário escolar do segundo ciclo do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, que é o Ensino de Frações. Assim sendo, realizou-se o presente trabalho, a partir da seguinte questão: Que contribuições a utilização de simulações interativas, *PhET*, pode trazer ao ensino de Frações? Situado no âmbito da Pesquisa Qualitativa, o presente estudo consistiu em uma Pesquisa-Ação prática, ou seja, uma pesquisa realizada concomitantemente a uma ação visando à solução de um problema de aprendizagem. Seu objetivo consistiu em explorar as potencialidades de simulações interativas do *PhET* no desenvolvimento de atividades inerentes ao Ensino de Frações. A investigação foi desenvolvida por meio de observação participante e intervenção pedagógica, em duas salas de apoio à aprendizagem matemática, no município de Guarapuava. Com a necessidade de metodologias de ensino alternativas, optou-se pela abordagem da Resolução de Problemas e Mídias Tecnológicas – tendências metodológicas atuais em Educação Matemática. Como ferramenta tecnológica, considerou-se o uso do *PhET Simulations* – caracterizado pelo desenvolvimento de simulações mediadas por situações problema. A presente proposta atingiu seus objetivos, pois, foi bem recebida pelos docentes e discentes envolvidos, vindo ao encontro da necessidade de metodologias alternativas nas salas de apoio ao se abordar o conteúdo de frações. Aproximou-se da realidade dos alunos, na medida em que as tecnologias estão presentes em seu dia a dia, e contemplou aspectos multi representacionais, recursos gráficos dinâmicos, simulações, e contextos interdisciplinares nas situações de aprendizagem.

Palavras-chave: Salas de Apoio à Aprendizagem de Matemática; *PhET Simulations*; Ensino de Frações.

ABSTRACT

Franciele do Belém Makuch. The use of interactive simulations PhET Simulations in teaching fractions.

He tried to take action to contribute to the solution of one of the commonly identified educational problems in the school setting of the second primary education cycle in Mathematics, which is the fractions of Education. So, there was this work, from the following question: What contributions using interactive simulations PhET can bring to teaching fractions? Situated within the qualitative research, this study consisted of a practical action-research, ie, research conducted concurrently to an action aimed at solving a problem learning. Their goal was to explore the potential of interactive simulations PhET Simulations in the development of activities related to fractions of Education. The research was developed through participant observation and pedagogical intervention in two rooms of support for learning mathematics, in Guarapuava. With the need for alternative teaching methodologies, we opted for the approach to Problem Solving and Technology Media - current methodological trends in mathematics education. As a technological tool, it was considered the use of PhET - characterized by the development of simulations mediated problem situations. This proposal achieved its objectives, therefore, was well received by teachers and students involved, agreeing with the need for alternative methodologies in support rooms in the content of fractions. He approached the reality of the students, to the extent that the technologies are present in their daily lives, and contemplated multi representational aspects, dynamic graphics, simulations, and interdisciplinary contexts in learning situations. It was concluded that most students could develop, building knowledge related to fractions.

Keywords: Rooms Support Maths; PhET Simulations; Fractions of education.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, desde os meios escolares até os ambientes de trabalho, a preocupação com um ensino de matemática de qualidade vem sendo cada vez mais frequente. Neste sentido, os Parâmetros Curriculares de Matemática (1997, p. 12) apontam que:

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Os estudos procuram indicar caminhos que oportunizarão aos alunos um início adequado com a disciplina da Matemática. Esta temática vem com propostas para superar uma matemática que se resume a conjuntos de fatos a serem memorizados ou levar a uma compreensão dos números para além da contagem. De acordo com Burak (2010), o século atual exige que os cidadãos saibam agir diante das constatações, mais do que apontar números. Nesse contexto, destaca-se a Educação Matemática – EM, “uma poderosa ferramenta para a leitura do mundo, mas que pode e deve contar com o concurso de outras áreas do conhecimento para favorecer a compreensão e dar significado àquilo que se constata por meio da Matemática” (BURAK, 2010, p. 23).

Com a EM a Matemática integra o todo. Portanto, pode-se inferir que a EM tem um papel de destaque na superação das dificuldades estudantis na disciplina, mormente aquelas relacionadas aos sistemas de numeração, ou seja, a compreensão do valor posicional, do conceito, e das operações elementares. Santos e Lima (2010) afirmam que a Matemática integra o todo quando o conhecimento liga-se a algum contexto, no entanto muitos alunos apresentam dificuldades. Para tanto apontam como papel importante uma formação escolar que busque conexões que deem significado aos conteúdos matemáticos.

O analfabetismo escolar assusta por conta da falta de domínio da leitura e escrita, e muitas vezes o analfabetismo matemático está presente até mesmo no meio daqueles mais letrados. Hamze (2012, p. 4) afirma que “29% da população do país (mais de 52 milhões de pessoas), conseguem ler números, mas têm muitos problemas em resolver operações matemáticas simples”.

O mundo hoje também é regido pelos conhecimentos matemáticos, principalmente no que se refere à era tecnológica. A falta de domínio dessas habilidades matemáticas gera exclusões para muitos cidadãos em vários setores da sociedade, e no que se relaciona à sua própria formação integral. Skovsmose (2001) questiona sobre o conhecimento matemático presente nas relações de poder entre o capitalista e o trabalhador, em que o conhecimento não é propriamente para o sujeito e sim para beneficiar o trabalho.

Na atualidade a Matemática faz parte da vida das pessoas, não somente porque expressa números e valores, mas porque o mundo está cada vez mais digital e informatizado. Também porque é necessário ler a realidade do mundo, interpretar, e fazer arranjos dentre tantas complexidades presentes no desconhecido. E é na relação do aluno com a Matemática, e do professor com o aluno é que deve ocorrer um fazer matemático em que assegure a autonomia do aluno em relação aos conhecimentos matemáticos do mundo, como resolução de problemas, formação de conceitos matemáticos, entre outros.

Mas para isso acontecer é preciso que esse conhecimento matemático seja significativo, muito longe da reprodução mecânica de códigos numéricos e alfabéticos. Para isso é preciso compreender a Matemática, muito além de memorizar macetes e fórmulas. Para que haja essa compreensão é necessário escrever e ler a matemática.

Para compreender melhor, Silva (2016) aponta que com a necessidade de representar situações, na história da Matemática, primeiramente surgiram os números naturais com o objetivo de representar as quantidades. Na sequência por conta da grande atividade comercial e da necessidade de cálculos surgiu o conjunto dos números inteiros que eram acompanhados dos símbolos negativos e positivos. Daí o surgimento do conjunto dos números racionais se deu pela necessidade de demonstrar partes de um inteiro e as divisões que obtinham resultados decimais, fazendo parte deste conjunto as dízimas periódicas.

Porém, a aprendizagem dos números racionais, nos diferentes níveis de ensino, é um tema discutido por diversos pesquisadores. Bertoni (2003), Rodrigues (2005), Bezerra (2001) discutem as dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão do conceito de Frações – representação, comparação, equivalência, operações, interpretação de situações do cotidiano que envolvam esses conceitos – e também discutem as dificuldades encontradas pelos professores ao explicar conceitos que exigem certo grau de abstração, como é caso dos números racionais na forma fracionária.

Uma das dificuldades apresentada por um grande número de alunos se refere ao número racional expresso na forma fracionaria. Esse um conteúdo de grande importância por estar, de certa forma, presente no dia a dia e por estar relacionado com outros conceitos matemáticos.

As frações utilizadas cotidianamente podem ser o ponto de partida, como metodologia nas aulas de matemática, para que o aprendizado se torne significativo, como exemplos: um quarto de litro de leite, meio metro de linha, vinte por cento de desconto, entre outros que podem ser explorados. Um dos problemas apontados no estudo de Fernandes (2008) é de que a dificuldade inicia quando se dá mais ênfase na aplicação das regras do que na compreensão do significado.

Nesse sentido corrobora Noé (2014) ao afirmar que um ensino tecnicista do conteúdo de fração torna o aprendizado ineficiente, sendo preciso buscar abordagens diferenciadas.

1.1 O Ensino dos Números Racionais

A presente dissertação enfoca o Ensino de Frações, por se tratar do tema elegido para a análise da proposta de intervenção pedagógica. Nesse encalço, procede-se inicialmente a uma discussão sobre algumas dificuldades que permeiam esse ensino, e procura-se ilustrar um ensino atual e contextualizado.

1.1.1. Dificuldades no ensino dos números racionais sob a forma fracionária

Segundo Bertoni (2004), para os professores esse tema é um dos mais difíceis na aprendizagem Matemática do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, e as avaliações nacionais revelam um desempenho insatisfatório dos alunos.

De acordo com os PCN, na aprendizagem dos números racionais os alunos agem como usualmente fazem com os números naturais e, consequentemente, se deparam com diversos obstáculos. O primeiro deles é com relação à representação. Enquanto os números naturais possuem uma única forma de representação, os números racionais podem ser representados de várias formas, tais como decimais finitos, dizimas periódica ou como frações. Em relação à representação fracionaria, para um único valor pode-se ainda ter infinitas representações. Como exemplo: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}$ representam um mesmo número (BRASIL, 1998).

Outro obstáculo apontado é o conhecimento sobre a razão e proporção e sua aplicação na matemática, sendo a razão e a proporção conceitos extremamente ricos que surgem nos mais diversos contextos e exemplos do uso, Macêdo et al. (s/d, p. 2) apontam que:

> A palavra razão vem do latim *ratio* e significa a divisão ou o quociente entre dois números a e b, denotado por a:b ou a/b e lê-se a para b. Chama-se razão de um número racional por outro (diferente de zero), o quociente exato do primeiro pelo segundo. Exemplo: a razão entre 10 e 5 é igual a 2 porque 10/5 = 2. A proporção é a base para a compreensão de conceitos diversos como fração, porcentagem, densidade, velocidade, etc. A palavra proporção vem do latim *proportione*. Ela significa uma relação entre as partes de uma grandeza e consiste em relacionar duas razões dentro de uma igualdade, criando assim um elo entre elas. A proporção entre a/b e c/d é a igualdade: a/b = c/d.

Conforme Linares e Sánchez (1988 *apud* á & GROENWALD, 2014), como as Frações usam os mesmos símbolos dos números naturais, com a diferença do traço na horizontal ou diagonal assim representado –, / . Os alunos tendem a conceber as Frações como dois números naturais separados pelo traço. Resultam dessa compreensão que aplicam seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais às Frações. Conforme os autores, esse é o “efeito de distração dos Números Naturais".

Nesse contexto, Monteiro e Groenwald (2014) complementam que o ensino e aprendizagem das Frações é complexo para os alunos. Podem surgir dificuldades quando eles usam as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as Frações, porque não entendem as características de cada um. Os estudos e as pesquisas na tecnologia da informação e comunicação tem se desenvolvido nas últimas décadas e como instrumento didático, a tecnologia dos softwares tem buscado contribuir com o ensino, principalmente nas áreas de Matemática, busca numa dinâmica promissora propõe uma nova forma de abordar os conteúdos curriculares no cotidiano escolar. Dessa forma, esse estudo se justifica.

Outro óbice à aprendizagem dos números racionais refere-se à comparação entre esses tanto na forma fracionária quanto na forma decimal. Habitualmente, os alunos continuam tratando os racionais como naturais, ao compará-los. Como estão habituados com a ideia de que, por exemplo, $3 > 2$, em se tratando da representação fracionária, esta envolve certa contradição, pois $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ (BRASIL, 1998).

A propósito dessa transferência, segundo Monteiro e Groenwald (2014) as Frações devem aparecer em contextos variados, para incentivar a sua aprendizagem. O professor pode propor aos estudantes as mesmas atividades que desenvolvem com os Números Naturais, tais como somar, dividir e ordenar.

Outra dificuldade observada, também em relação à comparação, é que os alunos se acostumam comparar a grandeza dos números pelo tamanho da escrita. Por exemplo: $8345 > 41$. A tendência é comparar do mesmo modo os números racionais, no entanto, nem sempre o maior é o que tem mais números (BRASIL, 1997).

Os PCN apontam ainda outra diferença entre números naturais e racionais, que dificulta a aprendizagem destes últimos: quando os alunos multiplicam um número natural por outro natural, diferente de 0 ou 1, encontram um número maior que ambos. Todavia, quando multiplicam 10 por $\frac{1}{2}$, ficam surpresos com o resultado (BRASIL, 1997).

Ainda uma barreira à aprendizagem dos números racionais, segundo os PCN, é com relação ao sucessor e antecessor. Em se tratando de uma sequência de números naturais, é sempre possível encontrar um sucessor e um antecessor. Entretanto, quando se refere aos números racionais, não se cogita de sucessor e antecessor, posto que entre dois números racionais quaisquer sempre se encontram outros números racionais (BRASIL, 1997).

Por esses motivos, "[...] a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada" (BRASIL, 1997, p. 67).

Destarte, o trabalho do professor com os números racionais, na forma de número fracionário, deve contribuir para que os alunos superem as ideias já construídas e incrementem seus conhecimentos sobre números. Iniciando-se no terceiro ano do Ensino Fundamental, esse conhecimento prosseguirá nos próximos anos (NASCIMENTO, 2009).

Para Gómez-Granell (1998 *apud* PREVÊ, SHENECKEMBERG & MUNHOZ, 2014), o que dificulta a aprendizagem de Frações é o ensino baseado mais na aplicação de regras. Esse é o maior erro, pois não se cogita na compreensão do significado. Os alunos aprendem (ou decoram) as regras e conseguem utilizá-las nas atividades envolvendo Frações, mas, por não ser uma aprendizagem significativa, não conseguem relacioná-las com o seu dia a dia, ou com conhecimentos já existentes.

Diversas pesquisas realizadas comprovaram essas barreiras à aprendizagem de números racionais na forma de números fracionários. Santanna *et al*. (2013) realizaram estudos de campo comprovando as dificuldades de alunos de 6º. e 8º. anos na aprendizagem de Frações. Ao realizar um pré-teste, ou teste-diagnóstico, as autoras constataram que os estudantes brasileiros contatados cometeram os mesmos erros observados por Kathleen Hart entre crianças da Escola Secundária do Reino Unido, entre 1974 a 1979, ou seja, erros considerados universais, que podem ser cometidos por quaisquer estudantes do mundo.

Monteiro e Groenwald (2014) ao aplicarem testes adaptativos implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), sobre Frações, aos alunos de 7.º Ano, constataram dificuldades envolvendo: conceito; equivalência; simplificação e comparação de frações.

1.1.2 Das orientações sobre o ensino de Frações

Segundo o entendimento de Fiorentini *et al*., (1990 *apud* PREVÊ, SHENECKEMBERG & MUNHOZ, 2014), os professores de Matemática entendem que em uma aula tradicional o aluno não assimila o conceito de Frações. É preciso levar para a sala de aula algum material de apoio – como materiais manipuláveis e jogos pedagógicos – bem como fazer uso de metodologias alternativas.

No contexto atual, o ensino de Frações, no Brasil, é regulamentado pelos PCN (Brasil, 2001). No Estado do Paraná, segue normas expostas nas Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática.

De acordo com os PCN, em relação às Frações, o ensino da Matemática tem como finalidade levar o aluno a “construir o significado de número racional e de suas representações (fracionária e decimal) a partir de seus diferentes usos no contexto social” (BRASIL, 2001, p. 80).

Bertoni (2004, p. 1) assinala que:

> [..] o entendimento do número racional é relevante na matemática e na sociocultura. É importante a construção da ideia desse número, compreendendo o quê quantifica e a que

> vem, e tendo presente que ele se desdobra em duas representações igualmente importantes – a decimal e a fracionária.

Percebe-se que esse objetivo de construir o significado de número racional ou construir a ideia desse número ainda não é fácil de ser atingido atualmente. Conforme Drechemer e Andrade (2015), a realidade educacional demonstra que o conceito de Fração ainda é pouco compreendido pelos alunos. Esse conceito geralmente restringe-se à linguagem oral, com expressões como: 'meio copo de leite', '$\frac{3}{4}$ de polegadas' ou 'uma fração de segundos'. Comprova-se esse fato com os resultados observados em todos os níveis de escolarização, quando os alunos se defrontam com situações envolvendo esse conceito matemático.

Assim como Llinares *et al.* (1997 *apud* PEREIRA & ZÚÑICA, 2015, p. 3) entende-se que:

> Alcançar totalmente o conceito de fração com suas relações requer um processo de aprendizagem em longo prazo. Existe uma grande variedade de estruturas cognitivas na qual as diferentes interpretações das frações se conectam e assim, condicionam o processo de aprendizagem. Não chegamos ao conceito global de fração de uma só vez.

Segundo Bertoni (2003, p. 28), a carência dos números fracionários na cultura brasileira "resulta na pouca ou nenhuma vivência dos alunos com eles. Não obstante, esses números têm grande importância na Matemática, relacionando-se a razões, raciocínio proporcional, ao cálculo algébrico, a probabilidade, etc".

Também conforme os PCN, o estudo das Frações se justifica, entre outros motivos, porque é um tópico necessário para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos, tais como: proporções; equações e cálculo algébrico. Os Parâmetros aludem a uma aprendizagem significativa para o aluno: "A aprendizagem em Matemática está ligada a compreensão, isto é, à apreensão do significado, aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos" (BRASIL, 2001, p.103).

Conforme os PCN, o conteúdo referente às Frações deve ser ministrado por meio de atividades onde o educando possa ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias usadas mais frequentemente. Podem ser trabalhadas várias ideias sobre esse conteúdo, principalmente situações problemas envolvendo Frações como relação entre parte e todo, como quociente e como razão. Também podem ser exploradas as Frações equivalentes, relacionando-se as representações fracionária e decimal (NASCIMENTO, 2009).

Em se tratando de operações com números racionais, os PCN apresentam somente o conteúdo referente às operações com números decimais, excluindo o estudo das operações com números fracionários. A determinação é que os números racionais sejam ministrados no segundo ciclo (hoje 4º. e 5º. anos), para que o aluno compreenda que apenas os números naturais não conseguem resolver determinados problemas do cotidiano (NASCIMENTO, 2009; BRASIL, 2001).

No encalço de contribuir com o ensino e a aprendizagem de frações, na busca de metodologias alternativas, considera-se o contexto da Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC), na perspectiva da tendência metodológica Médias Tecnológicas preconizada pelas DCE do Estado do Paraná. Dessa forma, pontua-se que atualmente, as tecnologias estão bastante associadas ao ensino da Matemática em geral, e em especial ao ensino das Frações surgem, a cada dia, novos *softwares* com potencial de facilitar a aprendizagem desses conteúdos. As dificuldades são muitas, mas a busca para superá-las faz parte da rotina do professor pesquisador. Então, procede-se à presente investigação.

1.2 A contextualização da questão e os objetivos da investigação

Para minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, o Governo do Estado do Paraná criou as Salas de Apoio à Aprendizagem de Matemática (SAAM[1]) e também de Língua Portuguesa, que são ofertadas no contra turno das escolas. Um diagnóstico é realizado pelos professores regentes da turma, mediante as dificuldades apresentadas em relação à escrita, formas espaciais e quantidades, assim como conteúdos básicos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Após a dificuldade ser diagnosticada, é realizado um encaminhamento para frequência da sala de apoio, onde será acompanhado o seu aproveitamento podendo permanecer ou ser dispensado (FRANÇA, 2009).

De acordo com a Instrução Nº 010/2014 da Secretaria de Estado da Educação, as salas de apoio têm como objetivo a ação pedagógica para o enfrentamento das dificuldades de aprendizagem de Matemática e de Língua Portuguesa dos alunos matriculados no Ensino Fundamental, ao que se refere aos conteúdos básicos dessas disciplinas dos anos anteriores ao ano em que o aluno se encontra matriculado (PARANÁ, 2014).

Embora as Salas de Apoio possuam um caráter de reforço da aprendizagem, as reprovações e evasão continuam a ocorrer no sexto ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, André (2015, p. 6) constatou, em 2008, em uma escola de Campo Mourão (PR), "o alto índice de reprovação nas quintas séries" (atuais sextos anos), de alunos que "já recebem atendimento do programa Sala de Apoio".

No entanto, para que a sala de apoio promova um aprendizado significativo e consiga superar as dificuldades dos alunos é preciso uma metodologia que não seja mecanicista, e sim que se utiliza de várias abordagens alternativas. Neste contexto, as DCE de Matemática (PARANÁ, 2008) apontam que os conteúdos devem ser trabalhados por meio das tendências metodológicas da proposta da Educação Matemática, dentre as quais pode-se verificar algumas no Quadro 1.

[1] Será utilizada a sigla **SAAM** para significar sala de apoio à Aprendizagem de Matemática.

Quadro 1 – Tendências Metodológicas em Educação Matemática

TENDÊNCIA	**CONCEITO**
Educação Matemática Crítica	Surgiu na década de 1980 como um movimento que promove debates acerca do tema **poder**, levando em consideração os aspectos políticos da educação matemática praticada, busca respostas para perguntas tais como: *Para quem a Educação Matemática deve estar voltada? A quem interessa?*
Etnomatemática	A etnomatemática leva em consideração que cada grupo cultural possui identidade própria ao pensar e agir e, portanto, possui um modo próprio de desenvolver o conhecimento matemático. Exemplos de grupos culturais: MST (Movimento Sem-Terra), artesãos, índios, classes profissionais, etc.
Mídias Tecnológicas	Com a presença do computador, a aula ganha um novo cenário que reflete diretamente na relação professor-aluno. O computador pode funcionar como uma ponte entre o que acontece na sala de aula e o que está fora da escola.
Escrita na Matemática	Trabalhar com a tendência escrita sobre a Matemática gera um processo de reflexão a respeito da compreensão individual sobre o conteúdo abordado.
Modelagem Matemática	A modelagem é a arte de expressar, por intermédio da linguagem matemática, situações-problema reais. É uma nova forma de encarar a Matemática e consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.
Resolução de Problemas	Ao considerar o problema como um recurso de aprendizagem, é necessário selecionar uma série de problemas para que o aluno construa seus conhecimentos a partir da interação com o professor e com os outros alunos. Na prática, os professores estabelecem estratégias que envolvem mais de um método. Independente do método escolhido é importante que o professor tenha em mente que só há problema se o aluno percebe uma dificuldade, um obstáculo que pode ser superado.

FONTE: Flemming, Luz e Melo (2005).

O presente estudo está assentado, então, no ambiente das SAAM, com foco no ensino de Frações, e tem como base a integração das metodologias de ensino: Resolução de Problemas (RP) e Mídias Tecnológicas (MT) por meio da utilização de simulações interativas, Phet Simulation.

A RP é apresentada pelas DCE como uma prática que contribui para a possibilidade de compreensão dos conceitos matemáticos (PARANÁ, 2008), e as orientações pedagógicas para a SAAM apontam a importância da RP, ao afirmar que:

> Os problemas devem representar um ponto de partida na busca pelo conhecimento e não um fim, não apenas um recurso para aplicação de métodos e técnicas. É o problema que vai

> puxar o fio do conteúdo e, a partir do que a criança já sabe, vai possibilitar encontrar caminhos para a construção de novos conhecimentos (PARANÁ, 2005, p. 14).

Desse modo, optou-se por trabalhar com a RP aliada ao *PhET*, o qual apresenta novas possibilidades de ensino aprendizagem por meio da tecnologia, em especial, para o ensino de Frações. Sua grande variedade de simulações dá apoio na qualidade e dinamização das aulas, contribuindo para um novo significado à construção do saber dos alunos. Sua utilização pode estimular os alunos na construção do pensamento lógico-matemático e na convivência social, de forma significativa.

A avaliação está norteada em um diagnóstico contínuo com base na análise de erros, conforme a abordagem de Cury (2007). A autora propõe uma avaliação da análise do erro, para que assim se possa evidenciar as dificuldades de aprendizagem por meio dos procedimentos adotados para a resolução da atividade matemática.

Com esses recursos, busca-se responder a questão: Que contribuições a utilização de simulações interativas, *PhET*, pode trazer ao ensino de Frações?

Para responder ao questionamento da Pesquisa, traçou-se como Objetivo Geral: "Estudar as potencialidades de simulações interativas do *PhET* no desenvolvimento de atividades inerentes ao ensino de Frações".

Nesse sentido, consideram-se os seguintes Objetivos Específicos:

1. Explorar a construção do raciocínio matemático mediante a realização de operações com números racionais na forma fracionária.

2. Propor atividades para ensino de frações, mediante o desenvolvimento de um Produto Educacional.

3. Identificar os tipos de erros cometidos pelos alunos durante a realização das atividades propostas.

4. Verificar coerência entre a proposta teórico-metodológica das SAAM e a sua realidade prática.

5. Utilizar as observações e os registros do diário de bordo para elaborar as estratégias de intervenção.

Para buscar estes objetivos foi realizada uma Pesquisa Qualitativa – desenvolvida por meio de uma Pesquisa-ação Prática. Para tanto, este estudo foi realizado em duas etapas, a primeira por meio de uma pesquisa bibliográfica sobre o tema em questão, embasada por livros e artigos que tratam do referido assunto, e foi estendida durante toda a realização da pesquisa.

Na segunda etapa ocorreu a intervenção pedagógica envolvendo duas tendências metodológicas em EM: a RP e as MT, no contexto do ensino de Frações nas SAAM de duas escolas públicas de Guarapuava – PR., optando-se pelo uso de simulações interativas com o *PhET.*

1.3 A Estrutura da Dissertação

Estruturou-se a dissertação em capítulos.

O capítulo inicial consiste da Introdução, que discorre sobre: o ambiente, a questão e os objetivos do presente trabalho.

O Capítulo 2 apresenta a Educação Matemática e as tendências metodológicas contempladas nesta pesquisa: a Resolução de Problemas – RP – e as Mídias Tecnológicas – MT – nas quais se situa o *PhET Simulation.*

O Capítulo 3 versa sobre a Teoria dos Erros no Ensino de Matemática. Engloba o Estudo dos Erros e a Análise de Erros em Matemática, inclusive erros relacionados às Frações, pois essa Teoria é utilizada na análise dos dados obtidos.

O Capítulo 4 descreve a Metodologia da investigação, traz a natureza e delineamento da investigação; caracteriza os locais e os sujeitos da pesquisa, as Metodologias de Tratamento dos Dados e o Produto Educacional. E, finaliza com o desenvolvimento das atividades realizadas nas SAAM.

No Capítulo 5 são apresentadas as análises e interpretações dos dados obtidos com a intervenção pedagógica desenvolvida, relacionando-as com a teoria, visando fundamentar as interpretações.

2. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ALGUMAS DE SUAS TENDÊNCIAS

O presente capítulo aborda a Educação Matemática – EM e duas de suas tendências metodológicas: a Resolução de Problemas – RP, e as Mídias Tecnológicas – MT, com ênfase nas Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC.

2.1. Sobre a Educação Matemática

Com o advento da EM, a disciplina Matemática tem a sua concepção modificada. Antes considerada "algo pronto e acabado", a disciplina passa a ser entendida como algo em desenvolvimento progressivo, inacabado, em fase de construção. Essa concepção é um legado do Construtivismo, teoria segundo a qual "nada, a rigor, está pronto, acabado, e [...] o conhecimento não é dado [...] como algo terminado. Ele se constitui pela interação do indivíduo com o meio físico e social [...]" (BECKER, 1993, p. 88 *apud* LEÃO, 1999, p. 195).

Posteriormente, essas concepções construtivistas passaram a constar nas Diretrizes Curriculares da Educação – DCE[2], do Estado do Paraná. Segundo esse documento, a EM configura-se "como campo de estudos que possibilita ao professor balizar sua ação docente, fundamentado numa ação crítica que conceba a Matemática como atividade humana em construção" (PARANÁ, 2008, p. 46).

Kilpatrick (2015, p. 13) afirma: "EM é uma matéria universitária e uma profissão. É um campo de academicismo, pesquisa e prática. Mais do que meramente artesanato ou tecnologia, ela tem aspectos de arte e ciência". Aliás, como professor regente de EM, Kilpatrick (2015) observa que esse campo jamais foi tão forte, na qualidade de campo profissional e acadêmico, como agora.

Constatam-se algumas diferenciações entre Matemática e EM. Para Onuchic (2012), a EM não é uma ciência exata, e sim uma ciência social, muito mais empírica do que a Matemática e inerentemente multidisciplinar. Seu objetivo consiste em ajudar outros seres humanos. A EM atende às necessidades de uma alfabetização matemática que prepare diferentes populações de estudantes para a cidadania e o mundo do trabalho. Possibilita a participação responsável e informada de uma sociedade moderna democrática, produzindo conhecimento matemático apropriado, com compreensão e habilidades para atuar em um mercado de trabalho que reflete tendências da economia mundial, altamente competitiva e tecnológica.

Segundo Griffiths (*apud* BURAK & KLÜBER, 2010), a EM versa sobre a seleção e

[2] De acordo com o Ministério da Educação e do Desporto/Conselho Nacional de Educação, "Diretrizes Curriculares Nacionais são o conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos na Educação Básica, expressas pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, que orientarão as escolas brasileiras dos sistemas de ensino, na organização, na articulação, no desenvolvimento e na avaliação de suas propostas pedagógicas"(BRASIL, 1998, p. 4).

comunicação da Matemática sujeita às restrições causadas pela sociedade, com o objetivo de iniciar os estudantes na atividade matemática. No mesmo sentido, Howson (1973 *apud* CURY, 2007) enfatiza que a EM é uma área em formação. Ela difere da Matemática em natureza. Possui teoria, mas lhe faltam teoremas, porque não há um sistema axiomático aceito que modele e seja modelado pelo processo educacional. Contudo, a EM também diverge da Matemática quanto ao objeto de estudo.

Conforme esclarece Kilpatrick (2015), os pesquisadores em EM não provam teoremas. Suas reivindicações são condicionais, tentativas e envolvidas em um determinado contexto. Quando educadores matemáticos universitários trabalham em um Departamento de Matemática, todos do departamento precisam entender que, mesmo entendendo a EM como uma ciência entre as demais ciências matemáticas, são outros os critérios para a qualidade do academicismo.

Tal como Shulman (1986 *apud* FIORENTINI & OLIVEIRA, 2013), autor da Teoria da Base do Conhecimento, constata-se também as diferenças existentes entre a formação de licenciatura e de bacharelado em Matemática. Segundo o autor, divergem ambos os saberes matemáticos necessários a esses dois profissionais, para que sejam bem-sucedidos. Mais do que uma Matemática mais simples ou superficial, o professor necessita conhecer, em profundidade[3] e diversidade[4], essa disciplina enquanto prática social, relacionada ao campo científico e, principalmente, à matemática escolar e às demais matemáticas existentes nas diversas práticas diárias. Com esses saberes, poderá o professor explorar e desenvolver uma matemática que faça sentido aos alunos, ao seu desenvolvimento intelectual, possibilitando a interconexão entre a Matemática produzida por eles e a Matemática construída historicamente pela humanidade.

Kilpatrick (2015, p. 12) também contribui para diferenciar Matemática e EM. Segundo o autor, muitas pessoas entendem a Matemática como "um campo ao qual alguém se associa fazendo cursos avançados e seminários e demonstrando sua competência através de publicação de pesquisa original". Já com relação à EM, muitos a entendem como "um campo ao qual alguém se junta simplesmente declarando seu interesse".

Burak e Klüber (2010, p. 149) explanam que existem vários enfoques sobre a natureza da EM. No entanto, é possível considerá-la "como uma atividade operacional fundamentada numa variedade de áreas de estudo, cujo objetivo fundamental é a análise da comunicação em Matemática".

[3] "[...] não basta o professor dominar procedimentos matemáticos e saber utilizá-los em demonstrações ou na resolução de exercícios e problemas" (FIORENTINI & OLIVEIRA, 2013, p. 924).

[4] "[...] o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana (FIORENTINI & OLIVEIRA, 2013, p. 924).

No mesmo sentido, Cury (1994 *apud* CURY, 2007) explana que a EM usa contribuições da Matemática, de sua filosofia e de sua história, e de outras áreas, como: Educação, Psicologia, Antropologia e Sociologia. O seu objetivo, segundo a autora, é estudar as relações entre o conhecimento matemático, o professor e os alunos.

A EM não envolve apenas a Matemática, mas também outros campos de conhecimentos que dão sustentação à Educação. Essa Educação norteia-se pelas Ciências Humanas e Sociais, enquanto a Matemática é pautada pela visão das Ciências Exatas e Naturais. Ambas, EM e Matemática possuem objetos distintos. Sob o enfoque das Ciências Exatas e Naturais, os objetos de estudo da Matemática almejam construir o conhecimento matemático, ao passo que a EM visa ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Portanto, a EM preocupa-se prioritariamente com o ensino e a aprendizagem da Matemática. Justifica-se tal preocupação, pois esse ensino ainda é concebido numa visão disciplinar, como se fosse um problema meramente técnico (BURAK & MARTINS, 2015). Os autores não querem nem concebem uma EM sem a Matemática, mas não a admitem sem as outras áreas que a fundamentam, visto que estão ligadas à Educação.

Segundo Burak e Martins (2015), como educadores matemáticos, pretende-se outro ensino: um ensino que leve o aluno a pensar, a atribuir significado ao que aprende, a apoderar-se de um conhecimento interdisciplinar e holístico, que demonstre as conexões entre as partes e o todo. Espera-se contribuir para que o estudante possa construir algumas competências necessárias no mundo atual, como: “saber observar, explorar e investigar; estabelecer relações, classificar e generalizar e, ainda, favorecer situações que permitam desenvolver capacidades de argumentar, tomar decisões e criticar [...]” (BURAK & MARTINS, 2015, p. 97).

Além disso, segundo os referidos autores, pode-se acrescentar ainda outros pontos no objeto da EM, quais sejam, algumas práticas desejáveis do professor, para que atue como organizador, mediador, incentivador, problematizador e avaliador.

De acordo com Burak (2009, p. 1.124), assim caracteriza-se o professor organizador:

> Organizador, que implica conhecer aspectos relativos às condições socioculturais dos estudantes sob sua responsabilidade, as expectativas e a competência cognitiva destes, e, com base nesse conhecimento, escolher e selecionar situações e ações adequadas que possibilitem a formação de conceito, que em crianças pequenas, segundo a teoria ausubeliana, é o principal processo de aquisição de conceitos, conforme Novak (1981). Nas crianças com idades mais avançadas a maioria dos novos conceitos é adquirida através da assimilação, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

Conforme Burak e Martins (2015), o professor mediador representa o elo entre o conhecimento construído historicamente e o conhecimento discente. Através do debate, procura reformular as estratégias utilizadas pelos alunos, valoriza as soluções encontradas, mas oportuniza um repensar e o reconhecimento das soluções mais adequadas.

Para atuar como incentivador, segundo Burak (2009, p. 1.124), “requer o estímulo e a orientação à prática cooperativa entre os estudantes, no incentivo às trocas e ao confronto de ideias, bem como às argumentações, oferecendo e indicando textos, materiais e informações para fundamentá-las".

Problematizador designa o professor "que busca e cria novas hipóteses sobre as situações discutidas, desafiando e instando os estudantes à investigação sobre os conteúdos estudados, com perspectivas de aprofundamento e conhecimento" (BURAK & MARTINS, 2015, p. 98).

Burak (2009, p. 1.124) apresenta as características do professor Avaliador:

> Avaliador, quando, no sentido de identificar e conferir significados às manifestações dos estudantes, por meio de instrumentos distintos e adequados, observações, checagem de conteúdos em situações contextualizadas, relativas ao seu progresso em matemática, dedicando-se, portanto, a conhecer o sujeito que aprende. Por isso, é uma oportunidade de o professor avaliar o processo de ensino, reorientar métodos, técnicas e materiais, sempre que se constatar diferenças entre o que se espera e o que o estudante apresenta como aprendizagem, ou seja, a auto-avaliação.

Com a EM torna-se possível um ensino no qual os alunos não apenas memorizem fórmulas e princípios, mas possam analisar os conteúdos aprendidos, discuti-los, fazer conjecturas sobre os mesmos, apropriar-se dos conceitos e formular ideias. A Matemática é bela e possui teorias consistentes. No entanto, não é apenas por isso que precisa ser estudada. Mais do que isso, as pessoas precisam aprender Matemática sem pensar muito no seu caráter utilitarista, mas visando ampliar seus conhecimentos, para que assim possam colaborar com o desenvolvimento social (PARANÁ, 2008).

De acordo com as DCE (PARANÁ, 2008), os conteúdos matemáticos devem ser abordados através de tendências metodológicas da Educação Matemática, tais como: Resolução de Problemas (RP); Modelagem Matemática (MM); Mídias Tecnológicas (MT); Etonomatemática; História da Matemática (HM); e Investigações Matemáticas (IM). Dentre essas tendências, na presente pesquisa optou-se por RP e MT, com as concepções descritas a seguir.

2.2 Das Tendências em Educação Matemática, Resolução de Problemas (RP) e das Mídias Tecnológicas (MT)

Para esclarecer o vocábulo tendência, Lopes e Borba (1994 *apud* FONSECA, 2015, p. 5) afirmam ser esta uma maneira de se trabalhar para encontrar soluções para as dificuldades da Educação Matemática. Uma tendência surge quando seu uso torna-se comum entre vários professores, ou mesmo alguns poucos, e resulta em uma experiência exitosa. Por exemplo, os autores comentam: "a Educação Matemática crítica, a Etnomatemática, a modelagem matemática, o uso de computadores e a escrita na Matemática são verdadeiras tendências".

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), tendências são "caminhos para fazer Matemática na sala de aula", são "possibilidades de trabalho". Como exemplos, o documento cita o recurso à Resolução de Problemas, à História da Matemática, às Tecnologias da Informação e aos Jogos.

Desse modo, considerando que existem várias tendências em Educação Matemática, a presente seção procura descrever a Resolução de Problemas e as Mídias Tecnológicas.

Sobre a RP pode-se citar os PCN (BRASIL, 1997), que indicam três etapas para que o aluno possa resolver um problema. A princípio, há necessidade de o aluno escolher um ou mais procedimentos de resolução, tais como: simulações, tentativas e formulação de hipóteses. O passo seguinte é comparar seus resultados com os de seus colegas e concluir, validando seus procedimentos.

Na visão de Fonseca (2013, p. 5), a RP caracteriza-se como "uma metodologia de ensino, em que o professor propõe ao aluno situações-problema caracterizadas pela investigação e exploração de novos conceitos".

Já as MT, mais do que as outras tendências, recebem atualmente muita aceitação, mas também muitas críticas. De acordo com Buckingham (2008), admite-se que as tecnologias digitais são inerentes à vida moderna. Seu uso é inevitável na escola, como no caso da internet e os jogos de computador, porque não se pode voltar no tempo e abandonar esses recursos. São meios digitais com grande potencial para o ensino. Entretanto, para aproveitar esse potencial, não podem ser considerados somente como tecnologias, pois são formas de cultura e comunicação.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997, p. 35), "o trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as". Por essas e outras vantagens é que se privilegia as MT na presente pesquisa, optando-se pelo trabalho com o *PhET Simulation*.

2.2.1 Da RP como Metodologia de Ensino

Não é de hoje que as escolas brasileiras trabalham com a resolução de problemas nas aulas de Matemática. Um rápido olhar ao passado dessa disciplina revela que, segundo Paraná (2008), à época da Lei 5.692/71, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprender Matemática consistia em decorar princípios e fórmulas, manipular algoritmos e expressões algébricas e resolver problemas. A RP, entretanto, ainda não era uma metodologia.

Atualmente, está em vigor a Lei 9.394/96, e a RP vem sendo utilizada como metodologia no ensino e aprendizagem da Matemática. Em seu Artigo 32, inciso I, a referida Lei dispõe que o Ensino Fundamental almeja a formação básica do cidadão, através do desenvolvimento da sua capacidade de aprender, sendo meios básicos "o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo" (BRASIL, 1996).

Nas condições educacionais atuais, concorda-se com Gonçalves (2008), ao afirmar que a escola deve abandonar o tradicional ensino mecânico, a padronização, o cálculo efetuado pelo aluno, abandonado e silencioso, esperando o professor verificar se a resposta está certa. A escola de hoje requer um ensino de exploração e reflexão, no qual se estimule a autonomia e a flexibilidade, a verbalização, e seja possível a explicitação, o diálogo, para que o aluno possa reconhecer seus erros e aprender com eles. Mas isso somente se dá quando se é construído um processo de pensamento e o professor ao realizar o percurso da resolução o estudante percebe e reconhece no desenvolvimento do processo onde errou.

Muitos alunos rejeitam cálculos aritméticos, cálculos algébricos e algoritmos. No que diz respeito à atividade de resolver problemas, aí está certamente a maior dificuldade dos alunos. Muitos parecem totalmente perdidos quando se deparam com um problema não rotineiro. No entanto, quando as aplicações da Matemática não puderem ser priorizadas nas aulas, a solução melhor é trabalhar com a RP como metodologia de ensino. Isso pode assumir duas faces: ser uma atividade "estimulante e enriquecedora" ou uma atividade "enfadonha e improdutiva" (DOMINGUES, 1997). Na intenção de tornar as atividades mais estimulantes e enriquecedoras para os alunos, recorre-se a outros autores e argumentos.

A Matemática não pode chegar aos alunos na sua forma pronta, acabada. Conforme House (1997) é com isso que os alunos se habituaram: uma Matemática que consiste em provas. No entanto, a autora incita professores e alunos a adentrarem os caminhos da RP, levando aos alunos uma Matemática em elaboração. Esta consiste em suposições, ou em perguntas.

Quando o professor problematiza, oferece aos discentes muitas oportunidades de aprenderem, pois os conteúdos deixam de ser fins em si mesmos e passam a ser meios essenciais na procura de respostas para os problemas. A finalidade destes é causar conflitos cognitivos nos alunos (desequilíbrios), levando-os a uma busca pessoal (SANTOS, 2015).

Segundo Goldin e Mcclintock (1997, p. 258), "Um problema matemático geralmente consiste em um enunciado verbal que resume as informações dadas, as condicionantes ou regras de procedimento e o objetivo ou objetivos a serem alcançados".

De acordo com Polya (1978 *apud* JACINTO & CARRERA, 2012, p. 4), a RP é "a arte da descoberta". O aluno depara-se com um problema ao procurar "conscientemente uma certa ação apropriada que lhe permita encontrar um caminho ou transpor um obstáculo para alcançar um objetivo não atingível de maneira imediata".

Para Branca (1997), o conceito de RP é abrangente, devendo ser analisado com pelo menos três sentidos diferentes: uma razão (ou meta); um processo; e uma habilidade básica.

De acordo com a primeira interpretação, pessoas ligadas à Matemática entendem que a RP é uma meta do estudo dessa disciplina, quando não é a meta, ou seja, representa a razão principal para se estudar essa matéria. Nessa perspectiva, o professor pode ser influenciado em todas as suas atividades didático-pedagógicas, encontrando outra proposta para o ensino (BRANCA, 1997). Para o *National Advisory Committee on Mathematicl Education* (NACOME), “aprender a resolver problemas é a razão principal para se estudar Matemática” (BRANCA, 1997, p. 9).

No mesmo sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) pontuam que os educadores matemáticos indicam a RP como ponto de partida da atividade matemática. Com isso subentende-se que o conhecimento matemático adquire significado quando os aprendizes têm situações desafiadoras para resolver, e procuram desenvolver estratégias de resolução.

Conforme a segunda interpretação, mais comum de RP, esta se define como um processo caracterizado pela dinamicidade e continuidade. O ensino e aprendizagem do funcionamento desse processo, entretanto, não estão bem claros. Sabe-se que os alunos passam por algumas etapas antes de chegarem à resposta, e que podem usar métodos, procedimentos, estratégias e heurísticas diferentes. Ao adotar essa segunda definição de RP, o professor pode entender como trabalhar com habilidades e conceitos, o inter-relacionamento deles e a função que ocupam na resolução de diversos problemas (BRANCA, 1997). Conforme o *National Advisory Committee on Mathematicl Education* (*apud* BRANCA, 1997, p. 10), “resolver problemas é o processo de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos em situações novas e desconhecidas”.

Diversos conhecimentos podem ser mobilizados, segundo Furlanetto *et al.* (2012). Com a RP, o aluno pode escolher o caminho a trilhar para chegar à solução; é possível transcender a linearidade do ensino tradicional, à medida que o estudante pode acionar diferentes conhecimentos para chegar a uma resposta.

Considerar a RP de acordo com a terceira interpretação – habilidade básica – há divergências. Essas habilidades tanto podem ser contas ou cálculos; aritmética; simplesmente “matemática”; habilidades sem especificação; ou até mesmo a resolução do problema. Sob este último prisma, o professor deve levar em conta as especificidades do conteúdo de problemas, tipos de problemas e os métodos de solução (BRANCA, 1997).

Conforme Deguire (1997) leva tempo para se desenvolver a habilidade de resolver problemas. Por isso o professor precisa envolver os alunos com a RP, o maior número de vezes possível. Para House (1997), a RP faz parte da aula de Matemática, e não pode ser usada como um apêndice ou passatempo para o final de semestre. Ao contrário, o docente que trabalha frequentemente com a RP possibilita que os alunos insiram-se no processo de construção matemática. Assim, os alunos deixam de ser espectadores da disciplina e passam a ser seus construtores e usuários, encontrando prazer e realização na Matemática, da mesma forma que seus professores.

Além de todas essas vantagens imediatas, a RP pode contribuir para a autonomia e criticidade discente, conforme pregaram Furlanetto *et al.* (2012). Através da RP o aluno torna-se agente de sua própria aprendizagem, criando seus métodos e estratégias de resolução.

Contudo, como já comentado, resolver problemas pode ser uma atividade aborrecida para os alunos, e improdutiva. Depende da escolha dos problemas, principalmente, pois existem problemas medíocres e problemas inteligentes. Se o professor traz para a sala de aula um problema medíocre e rotineiro para ser resolvido pelos alunos, eles conseguem resolvê-lo e podem ficar contentes com isso, mas não lhes trará muito proveito. A seleção dos problemas deve ser feita cuidadosamente, pois apenas resolvendo problemas inteligentes e não rotineiros é que o aluno pode aprender. Os problemas apresentados requerem leitura atenciosa do enunciado e um planejamento, que pode envolver diversos pré-requisitos e determinadas estratégias ou heurísticas (DOMINGUES, 1997).

Estratégias didáticas para a RP

Na esteira dos educadores que propõem uma Matemática em construção, e não uma Matemática pronta, Santos (2015, p. 3) contribui, afirmando: "Na escola, informações são passadas sem que os alunos tenham necessidade delas, logo, nossa função principal como professor é de gerar questionamentos, dúvidas, criar necessidade e não apresentar respostas".

Para que isso aconteça, o professor pode usar diversas estratégias de RP. De acordo com Pozo (1998, p. 60 *apud* FURLANETTO *et al.*, 2012, p. 5), "as estratégias de resolução de problemas seriam formas conscientes de organizar e determinar os recursos de que dispomos para a solução de um determinado problema".

Para Musser e Shaughnessy (1997, p. 188), as estratégias representam "a essência mesma do processo de resolução de problemas". Tal é a importância que os autores conferem às estratégias, que chegam ao ponto de afirmar que o currículo de Matemática deve priorizá-las muito mais do que o conteúdo.

Algumas estratégias são:

i) Tentativa-e-erro

Praticamente ninguém gosta de errar. Todos querem ter êxito, ser bem-sucedidos logo na primeira tentativa, isso tanto na vida como nas aulas de Matemática. No entanto, Brownell (1942, p. 440 *apud* SUYDAM, 1997, p. 66) já dizia que: "Em vez de ser 'protegida' contra o erro, a criança deveria ser exposta ao erro muitas vezes, ser encorajada a detectar e a demonstrar o que está errado, e por que".

Nesse sentido, Davis e Mckillip (1997, p. 115) pontuam que muitas práticas docentes reduzem a importância de deixar o aluno analisar um problema, de tentar resolvê-lo: "Pouca oportunidade é dada para o desenvolvimento de estratégias de pesquisa, exploração ou tentativa-e-erro". Os autores comentam que a metodologia de tentativa-e-erro para a RP é pouco utilizada na *elementary school*. No entanto, eles afirmam que esse método deve ser sempre utilizado, porque é um bom procedimento para a RP, principalmente quando os alunos podem usar calculadoras para resolver muitos problemas difíceis.

Fabian (2007) entende que o método de tentativa-e-erro se aplica quando o indivíduo se depara com um problema e, para resolvê-lo, precisa ir fazendo vários experimentos até chegar a uma solução, mesmo que seja momentânea. Para Musser e Shaughnessy (1997), provavelmente o método de tentativa-e-erro é o mais direto para resolver problemas. Esta estratégia envolve a aplicação das operações cabíveis aos dados indicados no enunciado do problema. Segundo Davis e Mckillip (1997), desde que utilizado organizadamente, esse método apresenta-se como uma técnica capaz de resolver alguns problemas matemáticos. A vantagem é o incentivo a analisar o problema e os dados ou resultados de suas tentativas à proporção que se avança. Não se trata de suposições desordenadas. Se essa técnica for utilizada de forma organizada em problemas-história (que serão explanados no Inciso iv, a seguir), realmente pode contribuir para que os alunos escolham a operação necessária para resolvê-los.

Na RP, ao se considerar o emprego de *softwares* educacionais e simuladores os alunos podem proceder a simulações por tentativa-e-erro, até obterem a resposta correta, sem uma limitação inerente à repetição, ou aos recursos disponíveis (necessidade de novos materiais para a repetição de experimentações). Para a Psicologia Genética, o erro é uma ferramenta didática no processo ensino aprendizagem, pois

> É no processo de aquisição de conhecimento, no aprender que os erros surgem, pois estão diretamente ligados a tentativas, hipóteses e suposições do sujeito que os elabora. Podemos entender assim que os erros são encarados nesse contexto como elementos preceptores da construção do conhecimento, na medida em que se estimula e propicia a reflexão sobre eles, como forma de se fomentar suas superações (DEOLINDO & YAEGASHI, 2013, p. 6).

ii) Resolver um problema mais simples

Com a estratégia de resolver um problema mais simples, é possível resolver um “caso particular” de um problema, ou reduzir um problema complicado a um mais resumido. Quando se tratar de um recuo temporário de problema complexo, a estratégia de resolver problema mais simples pode não ser suficiente, sendo necessário utilizar outra, como a estratégia de padrões. Em alguns problemas, serão necessárias várias estratégias para encontrar uma solução satisfatória – é assim que acontece na vida real (MUSSER & SHAUGHNESSY, 1997). Por exemplo, a crise de energia, a crise nos transportes e a inflação são problemas que afetam governos, empresas e consumidores, dentre outros. Para resolvê-los, é preciso contar com muitas estratégias de resolução, e também dispor de muitas informações factuais.

Vale ressaltar que Musser e Shaughnessy (1997) não definem exatamente o que seja um “problema mais simples”. Como problema mais simples, os autores incluem: “Quantos quadrados de todos os tamanhos possíveis há num tabuleiro de damas de 8 x 8”? Portanto, o aluno deve considerar um tabuleiro com oito quadrados de cada lado. Em primeiro lugar, contar o quadrado central, que é o menor (1x1). Depois vai ampliando e contando os demais quadrados que são possíveis formar, como: um quadrado com quatro unidades (2x2); um quadrado com 9 unidades (3x3); um quadrado com 16 unidades (4x4); um quadrado com 25 unidades (5x5); um quadrado com 36 unidades (6x6); um quadrado com 49 unidades (7x7) e um quadrado maior, com 64 unidades (8x8). A resposta seria: 8 quadrados. A solução apresentada pelos autores é completar a tabela abaixo para descobrir um padrão.

Tabela 1 – Tamanho dos quadrados

	1 x 1	2 x 2	3 x 3	...	8 x 8
1 x 1	1				
2 x 2	4	1			
3 x 3	9	4	1		
. . .					
8 x 8					

FONTE: Musser e Shaughnessy (1997)

De maneira similar, Davis e Mckillip (1997) referem-se aos problemas simples, sem apresentar um conceito. Segundo os autores, o professor deve começar a trabalhar com problemas bem fáceis. Eles aconselham que, independente da série (ano), o professor inicie com problemas muito fáceis, problemas simples, que os alunos possam resolver. O ideal, para os autores, é a utilização de pequenas listas com dois, três ou no máximo quatro problemas, que devem ser distribuídas aos alunos, três ou quatro vezes por semana.

Nesse contexto, em se tratando das simulações como é o caso do *PhET Simulation*, há uma graduação de dificuldades, como será comentado na seção sobre MT. Desse modo, o professor também pode começar seu trabalho apresentando aos alunos as simulações mais fáceis, depois as de dificuldade média e assim sucessivamente, para que vão ganhando confiança e automotivação.

iii) Trazer problemas de livros didáticos, complementando-os, melhorando-os.

Antes de selecionar problemas do livro didático, Barnett *et al.* (1997) sugerem que o professor faça um levantamento dos temas que os alunos consideram interessantes e atrativos. Eles ficarão mais entusiasmados para resolver esses problemas, e geralmente são bem-sucedidos na resolução de “problemas interessantes” do que com os “não tão interessantes”.

Caso os problemas dos livros didáticos utilizem apenas a forma verbal, o professor pode complementá-los, conforme sugerem Barnett *et al.* (1997, p. 136): "Se seu livro didático de Matemática não tem mapas, tabelas ou gráficos, você pode pensar em reunir alguns, uma vez que eles são importantes em todo o processo de resolução de problemas". Nesse sentido a utilização de múltiplas representações pode ser útil, e também pode ser favorecida pelo emprego das mídias tecnológicas no que se refere aos recursos gráficos e a dinamicidade.

iv) Trabalhar com problemas-história

Histórias conotam criança, e uma forma de despertar interesse nas aulas de Matemática pode ser a estratégia de recorrer a histórias para introduzir problemas. Conforme Deguire (1997), George Polya se destaca como 'resolvedor de problemas' e professor de resolvedores de problemas. Seja para a aprendizagem, seja para o ensino de RP, ele aconselha a prática. Polya questiona, sugere estratégias produtivas, faz comentários. "Polya frequentemente usa histórias para introduzir seus problemas. Trata-se de um recurso para envolver os alunos com o problema" (DEGUIRE, 1997, p. 100).

Segundo Davis e Mckillip (1997), os problemas-história sempre foram difíceis, por isso alguns alunos e professores desenvolveram atitudes negativas frente a eles. Entretanto, o professor pode propor ou passar problemas simples, que levem ao êxito dos alunos e, consequentemente, a atitudes positivas em relação a esses problemas. Por exemplo, Andrade e Grando (2015) contaram uma adaptação da história do Negrinho do Pastoreio para alunos de 8 a 10 anos, explicando que ele não sabia contar, e precisa saber se os animais que saíam para o pasto voltavam todos, à tarde. Os alunos deveriam procurar estratégias para resolver o problema-história do lendário menino.

Portanto, o professor pode começar com casos simples, encontrados em livros didáticos, inventar histórias, como fazia Polya, ou adaptar histórias clássicas, como procederam Andrade e Grando (2015). Segundo esses autores, as histórias falam a linguagem da criança.

2.2.2 Sobre as Mídias Tecnológicas

Conforme Dorigoni e Silva (2015, p. 1), "A educação para as mídias como perspectivas de um novo campo de saber e de intervenção vem se desenvolvendo desde os anos de 1970 no mundo inteiro com o objetivo de formar usuários ativos, criativos, críticos de todas as tecnologias de informação e comunicação". Não é de hoje que a mídia integra a educação formal:

> No que se refere à área educacional, a mídia esteve sempre presente na educação formal, porém, não raras vezes, sofreu certa resistência, em relação a sua aplicação na escola. Porém, o impacto social causado pela penetração da tecnologia de informação e comunicação (TIC) nos últimos anos, ocasionou intensas transformações nas principais instituições sociais (DORIGONI & SILVA, 2015, p. 1).

Dentre essas instituições, os autores destacam a família, a igreja e a escola. A família incorporou a mídia televisava ao seu dia a dia; a Igreja apreciou muito o caráter de espetáculo da TV; e a escola, pressionada pelo mercado, utiliza a internet como um fim em si mesmo.

Valente (2015) destaca que há duas formas de utilização do computador na educação: tanto ele pode ser usado como máquina de ensinar quanto como máquina para ser ensinada. No primeiro caso, esse uso consiste na informatização dos métodos de ensino tradicionais e caracteriza, do ponto de vista pedagógico, o paradigma instrucionista. No segundo caso, tem-se o oposto do Instrucionismo, que é o Sócio Construtivismo.

Abrindo um parêntese aqui, explicita-se esses termos. O Construcionismo, pano de fundo do presente estudo, não é um método nem uma técnica, nem exatamente uma metodologia. Representa um paradigma de ensino, um posicionamento relativo à aquisição do conhecimento (LEÃO, 1999).

> Construtivismo significa isto: a ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado. Ele se constitui pela interação do indivíduo com o meio físico e social, com o simbolismo humano, com o mundo das relações sociais [...] (BECKER, 1993. p. 88 *apud* LEÃO, 1999, p. 195)

A interação, portanto, não se verifica apenas entre aluno e professor, mas também com a máquina. Conforme Quartiero (1999), em se tratando de aprendizagem através de tecnologias, participam diversos atores: os(as) alunos(as) e as atividades que realizam, o professor e a função que representa, o sistema informático e o local onde se encontra. Nessa situação, se faz necessária uma interação entre as pessoas e os instrumentos escolhidos com o objetivo de possibilitar a aprendizagem.

Antes do uso da informática como recurso didático, Quartiero (1999) aponta a necessidade de se considerar três aspectos determinantes do seu potencial e de sua efetividade no meio educacional: verificar se é válido introduzir a informática na escola; analisar os objetivos, a metodologia e os conteúdos dessas experiências e os métodos de avaliação de sua eficiência; e disponibilizar aos professores a capacitação técnica básica.

2.2.3 Das Tecnologias

A teoria (*theoreo*) e a técnica *(techné*) surgiram na Grécia (séculos VI e IV a. C.). De acordo com os gregos, *theoreo* denominava a atitude contemplativa, ver com olhos espirituais, examinar sem experimentar. *Techné* relacionava-se a um conjunto de conhecimentos e habilidades profissionais. O conhecimento técnico designava o trabalho feito com as mãos, como, por exemplo, a fabricação de engenhos mecânicos. Para o filósofo grego Platão, técnica significava uma realização material e concreta. Segundo Aristóteles, *techné* nomeava um conhecimento prático cujo objetivo era um fim concreto (PINTO, 2015).

Segundo Pinto (2015, p. 3), “Conforme suas origens na Grécia antiga, a tecnologia é o conhecimento científico (teoria) transformado em técnica (habilidade). Esta, por sua vez, irá ampliar a possibilidade de produção de novos conhecimentos científicos". A autora entende que a tecnologia e sua utilização caracterizam a Terceira Revolução Industrial.

A informática é o carro-chefe dessa Revolução. Para Quartiero (1999, p. 3), denomina-se "informática" ao conjunto de "elementos da computação, das telecomunicações e das artes e técnicas gráficas e visuais". Os computadores são aperfeiçoados constantemente, tornando-se cada vez mais complexos, e possibilitando a criação de novas ferramentas, também sempre melhoradas. Essas ferramentas servem de apoio ao ensino.

Na era da linguagem digital, a escola deveria aprender a usar as novas tecnologias, e repassar esses conhecimentos para sua clientela, dada a sua necessidade premente nesta nova era. Em especial para os alunos oriundos das classes sociais menos privilegiadas, a escola é a única possibilidade de acesso às tecnologias (PINTO, 2015).

Nesta "infoera" (ZUFFO, 1996 *apud* QUARTIERO, 1999), utilizando a tecnologia, o aluno passa a integrar-se nesta "aldeia global" (MCLUHAM, 1994 *apud* QUARTIERO, 1999). Saindo do seu isolamento, pode incrementar sua aprendizagem com diálogos efetivamente interativos, ou seja, produzindo um material multimídia capaz de integrar estes meios no ato pedagógico em geral (QUARTIERO, 1999).

Com a tecnologia, é possível aumentar a eficiência da atividade humana em todas as esferas, em especial na produtiva. Alunos com conhecimentos das TIC terão futuramente maiores condições de empregabilidade e domínio cultural. Ao ensinar aos alunos como utilizar as tecnologias, a escola formará cidadãos para a sociedade atual, preparando-os para que exerçam integralmente a sua cidadania (PINTO, 2015).

"No contexto da Educação Matemática, os ambientes gerados por aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico" (PARANÁ, 2008, p. 65).

No entanto, o uso de novas TIC ainda encontra resistências na sala de aula. Alguns educadores temem que o uso de *softwares* educativos, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da internet, entre outros, prejudique o processo de ensino e aprendizagem, enquanto outros negam a existência desses recursos, por desconhecer suas potencialidades (GOMES *et al.*, 2012).

Um estudo realizado por Rosa (2013) com professores do ensino superior da cidade de Uberaba, MG, questionou quais as barreiras impeditivas ao uso das TIC, no desenvolvimento do trabalho docente. A pesquisa revelou três dificuldades encontradas pelos professores: o despreparo/desconhecimento com relação ao uso das TIC; a indisponibilidade de tempo; e a insegurança ou receio de não corresponder às expectativas discentes.

Mesmo quando um profissional da educação decide aderir ao uso das tecnologias, pode fazê-lo de forma indevida ou errônea. Ferreira e Bianchetti (1992, p. 254) advertem: “a simples existência das TIC não garante um processo pedagógico mais rico e desafiador. É possível continuar tradicional mesmo usando as novas tecnologias”. O professor pode continuar com a mesma postura de transmissor de conhecimentos, mesmo utilizando as TIC, não permitindo a interação necessária entre ele e os alunos e entre os próprios alunos. No entanto, segundo esses autores, com as TIC, o professor deve possibilitar a aprendizagem numa perspectiva dialógica. Para proporcionar a interatividade, alunos e professores devem ser emissores e receptores. A interação pode ser virtual ou presencial, de forma bidirecional, fundamentada na participação-intervenção e na permutabilidade-potencialidade. Assim, poderá contribuir para a concretização de uma nova educação (FERREIRA & BIANCHETTI, 1992). Nessa perspectiva, não há como acontecer a “desintermediação” do professor – a sua presença é necessária para apresentar desafios aos alunos, para articular, comunicar e mediar conhecimentos.

As mudanças das práticas docentes somente acontecerão a partir do momento em que o professor aumentar sua conscientização sobre a própria prática, a de sala de aula e a da escola, incluindo conhecimentos teóricos e críticos sobre essa realidade. Os professores podem contribuir para a transformação da gestão, dos currículos, dos projetos educacionais e dos métodos de trabalho pedagógico das instituições escolares. Para que as mudanças produzidas nas escolas melhorem a qualidade do ensino e a qualidade social da escola, faz-se necessária uma parceria da administração escolar com os professores (ROSA, 2013).

Rosa (2013), a partir do seus estudo recomenda que as TIC por si mesmas não mudarão significativamente a educação, a não ser que sua utilização esteja vinculada a políticas de valorização dos docentes e de melhores condições dos materiais didáticos pedagógicos necessários ao trabalho educativo.

2.2.4 Tecnologia e o Ensino de Matemática

De acordo com os PCN, a Matemática é uma criação humana, desenvolvida para atender às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferenciadas épocas históricas. É importante que os recursos das Tecnologias da Comunicação se incorporem ao seu ensino (BRASIL, 1998).

Em igual sentido, Gomes e Ribeiro (2014) afirmam ser interessante o professor utilizar a informática no ensino de Matemática, porque assim mostrará aos educandos vários contextos históricos que possibilitam desenvolver seus saberes. Para isso, podem ser utilizados vídeos e outros recursos digitais, para apresentação de problemas contextualizados.

Conforme estudos de especialistas como Penteado Silva (1997), Borba; Penteado (2001) e Penteado (1999, 2000), o uso de TIC é indicado no ensino de Matemática, porque aumenta o número de atividades nas quais os discentes podem utilizar diferentes representações (como tabelas e gráficos, por exemplo) de forma rápida e articulada, assim, exploram diferentes conceitos matemáticos. Devido à capacidade técnica das máquinas, o professor pode planejar atividades que não são possíveis com o uso de lousa e giz. Para ensinar Matemática, por exemplo, o docente dispõe de diversos *softwares* com os quais os discentes podem explorar conceitos matemáticos de modo mais dinâmico e detalhado (MARIN, 2012).

Amaral (2015) utilizou o *software* GeoGebra, nas aulas de Matemática, em um Colégio Estadual de Londrina – PR, em 2008. Seu objetivo era incentivar os 118 alunos participantes do seu projeto, e provocar situações de aprendizagem. Como resultado, Amaral (2015, p. 8) constatou que: "com o apoio dos ambientes informatizados, a superação de dificuldades encontradas no processo de construção do conhecimento fica minimizado [*sic*] e a apropriação de conteúdos se acelera". A autora cita vantagens dos ambientes tecnológicos para um avanço educacional, pois o uso de tecnologias motiva os alunos, desperta a competitividade criativa, ajuda na concentração, proporciona respostas imediatas com resultados interessantes, deixa mais flexível o pensamento, contribui para desenvolver o raciocínio lógico, favorece a expressão emocional e leva a uma mudança de atitude perante o erro. Nos ambientes informatizados, "o papel do professor é fazer seus alunos progredirem organizando um trabalho estruturado em atividades que proporcionem esse avanço, oferecendo desafios que instiguem a exploração e a investigação" (AMARAL, 2015, p. 7).

Amaral (2015) ainda destaca o papel do computador para "enriquecer ambientes de aprendizagem", nos quais o aluno pode construir o seu próprio conhecimento em interação com os recursos desse ambiente. Por isso, uma aula em ambiente informatizado é tão importante, pois é capaz de mudar o foco de ensino. Em vez de o professor repassar instruções, na aula ministrada em ambiente informatizado, os alunos constroem conhecimentos.

Uma prática que vem se tornando comum é a utilização de *softwares* no ensino aprendizagem de Matemática. Segundo Cotta Júnior (2002, p. 46)

> É sempre oportuno lembrar que o objetivo mais saliente é o de propiciar ao professor e ao aluno a oportunidade de vivenciar as mais diversas situações relacionadas com a prática da Matemática e a aplicar técnicas, com muita agilidade a essas diversas situações e comparar resultados , levando-os a desenvolver técnicas matemáticas e o raciocínio lógico-dedutivo com maiores possibilidades de êxito.

O referido autor utilizou os *softwares* Logo e *Cabri-Géomètre* em estudo com acadêmicos do 1.º período de Engenharia de Agrimensura e professores do Ensino Fundamental, Médio e Superior. Ao investigar sobre o uso dos computadores na representação dos conhecimentos em Geometria Plana, seu objetivo consistia em compreender melhor o processo de construção de conhecimentos geométricos. Empregou dois métodos: uma abordagem pedagógica tradicional e uma inovadora, com uso de computadores, em uma perspectiva construtivista. Os resultados apontaram que o ensino tradicional de Matemática não é eficiente. O autor constatou que o uso da tecnologia do computador pode melhorar o ensino de Matemática e também, se utilizada de forma adequada, mudar a postura docente, resultando em mudanças de metodologias capazes de possibilitar aos discentes a exploração, descoberta e a construção do seu próprio conhecimento.

Monteiro e Groenwald (2014) utilizaram testes adaptativos implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), sobre Frações, com alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental. Subentende-se que os autores selecionaram o SIENA por considerá-lo um sistema informático que contribui na autoaprendizagem e autoavaliação discente, a partir de conhecimentos prévios. Com esse sistema o docente pode planejar suas aulas conforme as dificuldades individuais dos alunos, analisando o nível de conhecimento prévio de cada um. Ademais, de acordo com Groenwald e Moreno, (2006, p. 26 *apud* MONTEIRO & GROENWALD, 2014, p. 104), o SIENA "é capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos".

Outro estudo é o de Martini e Bueno (2014), que realizaram pesquisa para verificar a frequência e o objetivo da utilização das TIC nos cursos de licenciatura em Matemática, em Ariquemes – RO, no ano de 2013. Foram sujeitos da pesquisa 7 alunos de ensino a distância e 27 da modalidade presencial. A pesquisa questionou se, com a graduação, os alunos obtiveram conhecimentos e habilidades necessárias ao emprego das TIC na prática docente. Constatou-se que, para a maioria dos alunos, de ambas as modalidades de ensino, os cursos de licenciatura foram falhos nesse aspecto. Além disso, os professores dos cursos presenciais de licenciatura em Matemática usam muito pouco as TIC na prática pedagógica (MARTINI & BUENO, 2014).

No entanto, a escola está permeada pelas TIC e o professor de Matemática necessita de formação para inseri-las apropriada e produtivamente no ensino. Desse modo, os alunos poderão interagir e agir para construir seus conhecimentos. Ao vivenciar a aprendizagem com as TIC na graduação, o professor sentir-se-á seguro para incorporá-las à sua práxis (MARTINI & BUENO, 2014).

Introduzir as TIC no ensino de Matemática "não é um caminho fácil de ser trilhado sozinho, pois além da familiaridade com as máquinas e *softwares*, é preciso repensar a forma de abordar os conteúdos e tomar decisão sobre o que priorizar. Muitos professores desistem por falta de suporte e formação" (MARIN, 2012, p. 25).

De acordo com Martini e Bueno (2014), os conteúdos de Matemática são um dos componentes curriculares que mais levam à reprovação. É preciso buscar alternativas para mudar essa situação e trazer à escola nova estrutura, conteúdo e metodologias de ensino. De acordo com os autores, acredita-se que isso é possível com a Educação Matemática e as MT.

2.3 O Simulador *PhET*

As novas tecnologias aplicadas à Educação, como as simulações, são recomendadas pelas DCE do Estado do Paraná:

> Aplicativos de modelagem e simulação têm auxiliado estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de maneira passível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processos de descoberta de forma dinâmica e o confronto entre a teoria e a prática (PARANÁ, 2008, p. 69).

Assim, é importante que o professor utilize as novas tecnologias, tais como as simulações e os Objetos Educacionais de Aprendizagem. Esses se configuram como "recursos suplementares ao processo ensino e aprendizagem, caracterizado principalmente pela sua reusabilidade a diversas situações, a portabilidade, podendo ser operados em uma gama enorme de *hardwares* e *softwares*, a acessibilidade e a durabilidade" (MÂCEDO, 2009, p. 20). Segundo o autor, a utilização de novas tecnologias no meio educacional, tais como as simulações e a internet, possibilitarão que o aluno explore as várias conexões existentes entre os conhecimentos científicos básicos, os fenômenos naturais e as aplicações tecnológicas.

De acordo com Santos e Moita (2015), os Objetos de Aprendizagem[5] – OA, são os recursos digitais usados como apoio à aprendizagem. São ferramentas que podem ser usadas várias vezes, em diversificados contextos de aprendizagem. É possível disponibilizar um OA ao mesmo tempo para uma turma de aprendizes, como um simulador, por exemplo, pois os simuladores caracterizam uma classe de OA.

Conforme Arantes, Miranda e Studart (2010), os OA em geral, e as simulações em especial, facilitam a identificação de conceitos alternativos do conteúdo trabalhado. As simulações possuem grande potencial, mas não podem tornar-se uma panaceia (ARANTES *et al.*, 2010). Segundo Gaddis (2000 *apud* MEDEIROS & MEDEIROS, 2002, p. 79), as simulações computacionais transcendem as simples animações: "Elas englobam uma vasta classe de tecnologias, do vídeo à realidade virtual, que podem ser classificadas em certas categorias gerais baseadas fundamentalmente no grau de interatividade entre o aprendiz e o computador". Medeiros e Medeiros (2002) complementam que toda simulação tem como base um modelo de uma situação

[5] Doravante denominados OA, esses objetos devem possuir os seguintes requisitos: Reusabilidade: podem ser reutilizados várias vezes, em diferentes ambientes de aprendizagem; b) Adaptabilidade: o OA pode ser adaptado a qualquer ambiente de ensino; c) Granularidade: seu conteúdo precisa estar dividido em partes, a fim de facilitar o reuso;
d) Acessibilidade: deve ser de fácil acesso na Internet, podendo ser utilizado em vários ambientes: e) Durabilidade: um OA pode continuar sendo usado, ainda que ocorram mudanças tecnológicas; f) Interoperabilidade: o OA deve poder ser operado através de vários *hardwares*, sistemas operacionais e *browsers*, intercâmbio efetivo, entre outros sistemas. Geralmente os OA são armazenados em repositórios, grandes bases de dados disponibilizados na Internet (WILEY, 2001; MENDES, SOUZA & CAREGNATO, 2004 *apud* SANTOS, 2013).

real. Esse modelo é matematizado e processado pelo computador, para propiciar animações de uma realidade virtual.

Os simuladores configuram uma ferramenta tecnológica, de grande impacto, e cujo uso pode contribuir para a educação. Com a manipulação de simulações computacionais é possível uma construção conjunta, docente-discente, do conhecimento, através de discussões em sala de aula, de trabalhos em grupo e de pesquisas sobre temas correlatos (MACÊDO & DICKMAN, 2009).

Paulo (2014) realizou uma intervenção no Ensino Médio, onde propôs situações-problema utilizando simulações do *Portal Interactive Simulations (PhET)*, e concluiu que as situações estudadas ou investigadas podem ser solucionadas ou, melhor, interpretadas por meio das simulações do *PhET.*

Com esse simulador, disponível em plataforma Java, (<https://phet.colorado.edu/pt_BR/researc>) desenvolvido pela *University of Colorado AT Bouder*, nos EUA, e distribuído gratuitamente, o aluno tem acesso a uma plataforma de simulações que possibilita interações, alternando variáveis e situações de análise. O simulador está no idioma inglês, mas é possível mudar para outra língua. Disponibiliza simulações em várias disciplinas: Matemática, Física, Química, Biologia, Ciências da Terra. Dentre essas, há uma graduação da dificuldade e devem ser realizadas sob a orientação docente. Com o *PhET,* espera-se despertar o interesse discente, para que possa interagir em sala de aula (SOUZA, 2012).

Soares (2013, p. 2 *apud* VÀSQUEZ, 2014, p. 9) complementa:

> Para ajudar os alunos a compreender conceitos visuais, as simulações *PhET* animam o que é invisível ao olho através do uso de gráficos e controles intuitivos, tais como clicar e arrastar a manipulação, controles deslizantes e botões de rádio. A fim de incentivar ainda mais a exploração quantitativa, as simulações também oferecem instrumentos de medição, incluindo réguas, cronômetros, voltímetros e termômetros. À medida que o usuário manipula essas ferramentas interativas, as respostas são imediatamente animadas, assim ilustrando efetivamente as relações de causa e efeito, bem como várias representações relacionadas (movimento dos objetos, gráficos, leitura de números, etc.).

Com todas essas qualificações, Vàsquez (2014) ressalta que a utilização do *PhET* pode ajudar muito o professor da Educação Básica. Este precisa recorrer a experimentos para embasar e aperfeiçoar seus métodos de ensino. Também necessita conferir significado ao conteúdo, fazendo sua inter-relação com o dia a dia do estudante – o professor precisa atribuir significado à teoria que está lecionando em sala de aula, e pode fazê-lo usando recursos capazes de levar o aluno ao entendimento de que todas as suas aprendizagens estão presentes de forma clara no seu contexto social.

“A presente geração de alunos já está sendo formada em um ambiente totalmente permeado pela informática, de modo que essa tecnologia educacional (a simulação) tende a ser bem recebida” (ARANTES *et al.*, 2010). Essa afirmação condiz com a realidade atual das escolas.

Conforme pontua Vàsquez (2014, p. 26):

> Para utilizarmos o *PhET* é bem simples, pelo menos o primeiro uso dele é necessário um computador com conexão a internet, é possível usá-lo *online*, instalar todo ele no computador ou instalar apenas o experimento que desejares. Para o *software* rodar no computador é necessário que o mesmo possua o *java*, *flash* e algum navegador de internet.

Segundo o autor supracitado, na atualidade a utilização da internet mostra-se fundamental não apenas para a vida social, possibilitando compras, vendas e contatos sociais, como também para a educação.

O autor efetuou uma pesquisa de campo em Patos, interior da Paraíba, tendo como sujeitos da pesquisa os alunos de uma escola pública do Ensino Médio e uma turma de alunos de cidades circunvizinhas, inscritos em um curso para as Olimpíadas de Química do Sertão Paraibano. Ao trabalhar com simulações *PhET*, Vàsquez concluiu que o método de ensino foi bem aceito por todos os alunos das Olimpíadas, bem como pelos professores regentes das turmas que participaram da pesquisa. Ressalte-se que esses alunos, embora a escola contasse com um laboratório de informática, jamais haviam utilizado um método de ensino associado às novas tecnologias.

Também Souza (2012) utilizou as simulações *PhET* como instrumento didático em duas escolas de Porto Velho (RO), objetivando ensinar aos alunos um conteúdo de Física: associação de resistores. O resultado demonstrou que 85% dos alunos aprenderam o conteúdo, observando os fenômenos que aconteciam no simulador. O referido autor analisou, além do *PhET Simulations*, outros cinco *softwares* livres: *Modellus, Phun, Labvirt (Show* Atômico e Lançamento Oblíquo) e PROFI I (Programa de Física 1), mais direcionados à Física. Com relação ao *PhET*, comenta:

> Este *software* se mostra muito simples, dinâmico, com uma aparência lúdica e de fácil entendimento em todas as etapas necessárias a percorrer. Mostrando-se numa linguagem descomplicada, com boa legibilidade é adequada a alunos do ensino médio, facilitando assim seu entendimento sobre o assunto abordado. Deve-se levar em consideração a ocorrência de alguns tópicos em que os alunos possivelmente terão alguma dificuldade, por isso a presença do professor no momento da utilização do *software* é fundamental (SOUZA, 2012, p. 7).

A principal função da simulação é tornar-se uma efetiva ferramenta de aprendizagem, fortalecendo os currículos e os esforços dos professores. Estes podem utilizá-las no ensino de um novo tópico, para construir e reforçar conceitos ou competências, para ensejar reflexão sobre um determinado tema e também para uma revisão final dos conteúdos estudados. De acordo com o grupo que desenvolveu o *PhET*, o uso das simulações pelos professores permite variações como, por exemplo, aulas expositivas, atividades em grupos na sala de aula, tarefas em casa ou no laboratório (ARANTES *et al.,* 2010).

Uma primeira estratégia para se trabalhar com simulações é utilizá-las como demonstrações em aulas expositivas, pois as simulações possibilitam a visualização de conceitos abstratos. O ideal é que o professor proponha questões prévias, visando ao trabalho com concepções alternativas do conteúdo em questão. Após os alunos procederem à simulação, podem rever as respostas dadas às questões prévias, socializando suas conclusões por meio de um registro da aula (ARANTES *et al.,* 2010).

A segunda estratégia, proposta pelos autores, é o trabalho em equipe. Aconselha-se que os alunos usem as simulações em dupla, na sala de aula.

A terceira estratégia é a lição de casa, que possibilita ao aluno rever a simulação livremente, ou de acordo com um roteiro apresentado pelo professor. Esta estratégica ainda presta-se para a introdução de um novo conteúdo, ou como um reforço ou aprofundamento de um conteúdo já debatido em sala de aula, possibilitando que o aluno possa explorar a simulação posteriormente, sem preocupação com o tempo e as simulações dispendidas (ARANTES *et al.*, 2010).

Segundo Adams (2010) as simulações *PhET* têm demonstrado ser bem-sucedidas, tanto na forma de auxiliar no desenvolvimento de atividades no laboratório de informática como durante as aulas teóricas, pois facilitam a compreensão dos estudantes, já que eles interagem diretamente com tais simulações.

Com relação ao ensino da Matemática utilizando o simulador *PhET*, são várias as opções fornecidas ao professor ou outro usuário qualquer, no sítio *https://phet.colorado.edu/pt/simulations/category/math*. Em específico, sobre o conteúdo "Frações", há quatro simulações: Introdução à Fração, Construa uma Fração, Laboratório de Equivalências e Jogo de Combinações. Além dessas possibilidades, esse conteúdo pode ser explorado em outras simulações correlatas.

O sítio apresenta três possibilidades de se proceder às simulações gratuitas: Correr (jogar), Descarregar todo o *website* no computador, USB ou CD (Baixar) ou Descarregar uma ou mais simulações no computador, USB ou CD. Na primeira opção, basta estar com o computador conectado à internet. Nas demais, é feito o *download*, com o aplicativo *Java*.

A sua *interface* gráfica é arrojada, moderna e diferenciada (Figura 1). Na coluna à esquerda do simulador *PhET* aparecem todos os casos acessíveis, em um total de 10 possibilidades, com mais de 90 simulações. Ao abrir o *PhET*, surge a tela representada na Figura 1, que permite simular inúmeros eventos relacionados às ciências naturais (Física, Química, Biologia, Ciências da Terra e Matemática), bastando um clique sobre a opção desejada.

Figura 1 – Tela inicial do *PhET Simulation* com acesso às simulações de Matemática.

Um aspecto que merece destaque diz respeito à viabilidade das simulações em computadores das SAAM que não estejam conectados com a internet; com o d*ownload* do *PhET* já realizado, é possível a repetição de experimentos sem a necessidade de se deslocar ao Laboratório.

3. A TEORIA SÓCIO CONSTRUTIVISTA E A CONTRIBUIÇÃO NOS ERROS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo será inicialmente abordado o conceito da teoria sócio construtivista e como esta concebe a aprendizagem, com relação ao ensino da Matemática. Na sequência será apresentado o estudo dos erros e a análise de erros em Matemática, inclusive erros relacionados a Frações, pois essa Teoria será utilizada na Análise dos Dados obtidos com a Pesquisa-Ação.

3.1. Da Teoria sócio construtivista

O sócio construtivismo concebe a aprendizagem como um processo que é construído por meio da mediação do professor. Nesta proposta o centro da aprendizagem é o próprio educando, não sendo o professor o polo decisivo como nas teorias tradicionais. A Pedagogia sócio construtivista foca a metodologia de ensino e a forma como o educando constrói e reconstrói seus conhecimentos (ARIAS; YERA, 1996). Suas principais características, segundo Libâneo (2002) são:

- o aluno como sujeito do seu próprio conhecimento;
- a importância do conhecimento prévio;
- a colocação das situações problemas;
- a possibilidade de os alunos fazerem suas próprias tentativas, de cometerem erros e experimentações.

Libâneo (2002) explica que a teoria sócio construtivista é "sócio" porque a situação de ensino é coletiva e compartilhada entre professor e alunos; e é "construtivista" porque o conhecimento é construído, elaborado e sistematizado por meio dos seus métodos de estudos. Neste contexto o professor é o mediador que interage com o saber do aluno, auxiliando-o no desenvolvimento das atividades cognitivas.

Arias e Yera (1996) apontam que o sócio construtivismo tem implicações metodológicas na prática docente porque trabalha com a importância do caráter social da aprendizagem; do papel incentivador do professor; a necessidade de trabalhar com objetivos bem definidos na rotina escolar; o trabalho com o erro como subsídio para orientar a ação do aluno em sala de aula; a significação do diálogo efetivo para trabalhar os conceitos científicos nas crianças; e o aluno como sujeito da educação.

Libâneo (2002) aponta que o principal objetivo sócio construtivista é:

> O desenvolvimento das capacidades intelectuais e da subjetividade dos alunos através da assimilação consciente e ativa dos conteúdos. O professor, na sala de aula, utiliza-se dos conteúdos da matéria para ajudar os alunos a desenvolverem competências e habilidades de observar a realidade, perceber as propriedades e características do objeto de estudo, estabelecer relações entre um conhecimento e outro, adquirir métodos de raciocínio, capacidade de pensar por si próprios, fazer comparações entre fatos e acontecimentos,

> formar conceitos para lidar com eles no dia-a-dia de modo que sejam instrumentos mentais para aplicá-los em situações da vida prática (LIBÂNEO, 2002, p. 5).

Na concepção sócio construtivista, se aprende quando se é capaz de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que se pretende aprender. Essa elaboração implica aproximar-se de tal objeto ou conteúdo com o objetivo de aprendê-lo; mas não se trata de uma aproximação sem significado, mas a partir de experiências, interesses e conhecimentos prévios que poderão dar conta da novidade. Com o significado que já se tem, aproxima-se de um novo aspecto, mas que pode ser interpretado a partir do significado que já se possui, para daí modificar o que já se possuía, interpretando de forma peculiar, para poder integrar este conhecimento (COOL *et al.*, 2009).

O conhecimento prévio nesta concepção é muito importante, pois, diz-se dos conhecimentos que já possuem sobre o conteúdo concreto que se propõe a aprender, ou seja, conhecimento e informações sobre o conteúdo que podem relacionar-se direta ou indiretamente a ele (COOL *et al.*, 2009). Isso porque a atividade mental construtivista não pode partir do nada, parte da possibilidade de construir um novo significado, de assimilar um novo conteúdo a partir dos conhecimentos já existentes.

Acima foi descrita uma construção do aluno, no entanto, ela não deve ser realizada individualmente, pois não se garantiria sua própria construção. Para tanto é necessária a orientação. Neste sentido o construtivismo assume toda uma postura de ensino como um processo conjunto e compartilhado, em que o aluno com o apoio do professor pode desenvolver-se em atividades como a resolução de problemas e na utilização de conceitos (COOL *et al.*, 2009).

Libâneo (2002) aponta que a mediação é a relação ativa do aluno com o conhecimento a partir dos métodos que irão assegurar o processo de aprendizagem pelo aluno por meio da condução pedagógica do professor.

Em relação à mediação do professor na construção do conhecimento Cool *et al.* (2009, p. 23) apontam que:

> É uma ajuda porque é o aluno que realiza a construção, mas é imprescindível, porque essa ajuda, que varia em qualidade e quantidade, que é contínua e transitória e que se traduz em coisas muito diversas, do desafio à demonstração minuciosa, da demonstração de afeto à correção, que se ajustam às necessidades do aluno, é que permite explicar que este, partindo de suas possibilidades, possa progredir no sentido apontado pelas finalidades educativas, isto é, no sentido de progredir em suas capacidades.

"Uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com o sentido o aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem" (COOL *et al.*, 2009, p. 61).

Desta maneira, como foi discutido anteriormente, devem-se considerar os esquemas de conhecimento dos alunos relacionados ao conteúdo de aprendizagem e tomar como ponto de partida os significados e os sentidos de que os alunos disponham em relação a esse conteúdo. Porém, concomitante, deve-se provocar desafios que o leve a questionar esses significados e sentidos rumo a uma modificação do conhecimento inicial, assegurando que se direcione a uma intenção educativa. Deve-se apontar para um caminho que ele ainda não conhece, colocando-o em uma situação em que o obrigue a envolver-se em um esforço de compreensão e de atuação (COOL *et al*., 2009).

Neste processo de construção do conhecimento também é importante considerar os obstáculos para o aprendizado, pois ele também pode revelar, segundo Iglion (2002), que o conhecimento anterior que tinha seu interesse e seu sucesso agora se revela falso ou mal adaptado. O obstáculo pode ser utilizado para avaliar a evolução espontânea do aluno, assim como as dificuldades resistentes que apresentam a fim de confrontá-las.

Iglion (2002 *apud* BROUSSEAU, p. 7) aponta três tipos de obstáculos que se apresentam no sistema didático:

> Os de origem ontogênica, que são aqueles que se processam a partir de limitações de ordem do tipo neurofisiológicas entre outras, do sujeito, no momento de seu desenvolvimento; os de ordem didática que dependem somente das escolhas realizadas para um sistema educativo; e os de ordem epistemológica, que são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, pois são constitutivos do conhecimento visado.

3.1.1 Do sócio construtivismo no ensino da Matemática

Os obstáculos epistemológicos em Matemática, segundo Iglion (2002) são aqueles obstáculos ligados à resistência em um saber mal elaborado ou mal adaptado, podendo ser interpretado por algum erro recorrente cometido pelo educando quando lhe é ensinado algum conteúdo matemático.

Em relação à epistemologia matemática, Kamii (2012) apresenta a teoria de Piaget que pode ser realmente muito útil para o professor de matemática em sala de aula e que pode fazer grande diferença na maneira de ensinar. Piaget apresenta o conhecimento classificado em três tipos: o conhecimento físico, o conhecimento lógico-matemático e o conhecimento social.

"O conhecimento físico: é o conhecimento dos objetos da realidade externa" (KAMII, 2012, p. 17). Como exemplo a observação: da cor, do peso, etc. "O conhecimento lógico-matemático: consiste na coordenação de relações". (KAMII, 2012, p. 19). Como por exemplo, relacionar o que é igual, diferente, maior, menor, etc. Sendo um conhecimento do tipo interno. O Conhecimento social também pode ser caracterizado de convencional é tem sua origem nos conceitos construídos pelas pessoas. Sendo um conhecimento de natureza arbitrária (KAMII, 2012).

O conhecimento então é construído a partir da abstração empírica das propriedades por meio dos objetos, em que a criança vai focalizar sobre uma certa propriedade do objeto para reconhecê-lo. Já a abstração reflexiva que é a do número, relaciona-se entre os objetos dentro da mente da criança. No entanto, um tipo de abstração não existe sem o outro (KAMII, 2012).

“O número, portanto, é a síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos. Uma é a *ordem* e a outra é a *inclusão hierárquica”* (KAMII, 2012, p. 21).

“Esta tendência mostra que a criança não sente a necessidade lógica de colocar os objetos numa determinada ordem para assegurar-se de que não salta nenhum nem conta o mesmo duas vezes” (KAMII, 2012, p. 22).

Já na inclusão hierárquica a criança inclui mentalmente um em dois, dois em três, três em quatro.

A construção do número ocorre de forma gradual de acordo com a faixa etária da criança e suas condições de compreender os eventos e dar-lhes significado. Assim, se conclui que a estrutura lógico-matemática do número tem que ser construída pela criança, assim como todo o conhecimento matemático.

A autonomia também é abordada por Kamii, e “significa o ato de ser governado por si mesmo, diferente de ser governado por outra pessoa” (KAMII, 2012, p. 33).

Também é questão sócio cultural os estímulos que a criança tenha recebido ou não, para assim agilizar ou retardar o pensamento lógico-matemático (KAMII, 2012).

Neste contexto aborda-se a importância das relações de aprendizagem que são elaboradas pelas crianças a partir do seu interior em contato com um ambiente material e social, que lhe estimule a autonomia e o pensamento, além de também oferecer situações de conflitos que encorajam a criança a construir os conceitos e relações (KAMII, 2012).

Neste sentido, Kamii (2012) enfatiza que o professor deva elaborar situações de aprendizagem que encorajam às crianças e as estimule, neste sentido seus avanços no conhecimento do número e tudo o que ele envolve. Por isso, Kamii (2012) destaca que a criança deve ser estimulada a quantificar objetos logicamente e a compará-los em conjuntos.

Neste mesmo contexto a criança deve ser incitada a trocar ideias com seus parceiros, sem reforçar a resposta certa e corrigir a resposta errada, mas fazer com que entre elas analisem o caso e busquem juntas uma solução para o problema.

Conclui-se que a criança não constrói um conhecimento fora do contexto geral do pensamento. Por isso, para que o conhecimento seja significativo para a criança, o professor deve usar de todos os tipos de materiais, ideias e eventos na relação, e não focar apenas na quantificação, por exemplo, no caso dos números.

3.2 O Estudo dos Erros

Uma definição de erro, válida até os dias atuais, foi apresentada por Brousseau (1983, p. 171 *apud* CURY, 2007, p. 33):

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos.

Lopes (2007 *apud* CURY, 2007) entende que os erros, exceto aqueles devidos à falta de atenção ou descuido, em muitos casos são hipóteses legítimas, embasadas em concepções e crenças adquiridas durante a vida escolar.

O erro sempre foi considerado uma falta de conhecimento, um “não saber”. No entanto, Cury (2007, p. 80) ensina que o erro é assim entendido:

> [...] o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.

Ainda, segundo Nogaro e Granella (2004, p. 32 *apud* ESPÍNDOLA, 2009, p. 11), o erro “possui uma multiplicidade de conceitos, que podem ser de inclusão, de construção ou de uma ideologia da incompetência do outro, refletindo diretamente no processo de aprendizagem, sendo fator decisivo para o sucesso ou fracasso”.

A preocupação com os erros discentes é relativamente antiga. Cury (2007) relata que o psicólogo educacional Edward Thorndike foi um dos precursores dos estudos relacionados aos erros. Geralmente considerado “pai” da Psicologia Educacional, Thorndike demonstrou “fé” na Psicologia Experimental. Em parceria com Pavlov, em fins do século XIX e início do século passado, realizou experimentos com animais, inaugurando a perspectiva comportamentalista da aprendizagem. É de sua autoria a obra *The Psychology of Arithmetic*, considerada essencial para os estudos sobre os erros.

De acordo com Alro e Skovsmose (2006), uma das causas que atribuem tanta importância ao erro na Educação Matemática provavelmente diz respeito à procura da “verdade” na Matemática. Essa “verdade” é uma palavra-chave na filosofia da Matemática, tal qual os “erros” são a chave para se compreender a filosofia que fundamenta o ensino da Matemática. Visto que todos os erros são considerados como absolutos, os autores entendem que impera um absolutismo burocrático em algumas aulas de Matemática. Esse absolutismo determina, em termos absolutos, o que é certo e o que é errado, mas prescinde de um esclarecimento dos critérios determinantes dessa decisão. O professor simplesmente aponta os erros, mas não explica como estes poderiam ter sido evitados. Para os autores, esse absolutismo burocrático engessou o ambiente escolar; ele faz parte do cotidiano de muitos estudantes de Matemática e também dos professores, que muitas das vezes são impelidos a elaborar testes e exames embasados nesse absolutismo.

De modo similar, Espíndola (2009, p. 22) afirma: "A visão absolutista dos professores, principalmente os de Ciências Exatas, procura oportunizar aos alunos meios de alcançarem a 'verdade absoluta', evitando assim os erros [...]".

Alro e Skovsmose (2006) observaram, entretanto, que o absolutismo burocrático nem sempre impera nas aulas tradicionais de Matemática, pois há outros padrões de comunicação. Porém, para que sejam utilizados são necessárias mudanças na educação e mudanças de perspectiva.

> Apontar erros é uma forma de sustentar uma perspectiva que os alunos deveriam acolher para evitar novos erros. Exigir que os alunos corrijam os erros é uma forma usual de fazer prevalecer essa perspectiva. Corrigir erros molda perspectivas e, portanto, ajuda a fazer prevalecer a inquestionável perspectiva da autoridade, fonte da produção de significados na sala de aula (ALRO & SKOVSMOSE, 2006, p. 30).

Um grande óbice para superar o absolutismo burocrático é o fato de os alunos aceitarem inconscientemente a filosofia da Matemática escolar vigente, a qual os leva acreditar que a função do docente, em sala de aula, é corrigir erros. Mesmo que o professor mude de atitude, esse absolutismo não será superado, porque os fundamentos dessa perspectiva não estão na atitude docente, e sim em toda a lógica escolar. Esta, que define de modo implícito o discurso de sala de aula, impede que docentes e discentes identifiquem e avaliem suas perspectivas (ALRO & SKOVSMOSE, 2006).

Hoje em dia, antes mesmo de frequentar aulas de Matemática, as crianças têm noção do erro. Alro e Skovsmose (2006) observaram, em uma dramatização de pré-escola, que as crianças entendem que errar e corrigir faz parte da Educação Matemática. Aliás, para muitos alunos, o objetivo do ensino de Matemática parece ser mostrar erros e corrigi-los.

Segundo os referidos autores, há vários tipos de erros na Educação Matemática. Mesmo sendo diferentes uns dos outros, pertencem a uma só categoria absoluta: a de erros.

> Um erro pode se referir ao resultado de um algoritmo ("A conta não está certa!"): ao algoritmo empregado ("Você não tem que somar, e sim subtrair!"); à sequência com que as ações foram feitas ("Para desenhar o gráfico, calcule primeiro alguns pontos da função!"); à interpretação do texto ("Não, quando o exercício é escrito desse jeito, você tem que primeiro encontrar o valor de x!"); à programação dos alunos ("Não, não, esses exercícios são para amanha!") (ALRO E SKOVSMOSE, 2006, p. 22).

Principalmente na escola tradicional, influenciada por Skinner, o erro nunca foi bem visto. Ainda hoje, muitos educadores procuram evitá-lo a qualquer preço, porque o consideram como sinônimo de fracasso, de desobediência, um pecado que deve ser punido (ESPÍNDOLA, 2009). Provavelmente, devido a essa concepção, é hábito riscar com um X, de caneta vermelha, as questões erradas de uma atividade ou avaliação, segundo Correia (2005 *apud* ESPÍNDOLA, 2009).

Isso acontece até mesmo nos cursos de formação de professores de Matemática, conforme Cury (2007, p. 93): "Parece que cada erro cometido por um futuro professor de Matemática é apontado, é riscado em vermelho, e a ele se atribui uma pontuação negativa, mas raramente há tempo para voltar ao erro e partir dele para reconstruir algum conhecimento".

Geralmente todos odeiam o erro, por isso é difícil discuti-lo. No entanto, essa discussão é necessária, principalmente por parte dos formadores de professores, para que os futuros docentes de Matemática possam olhar seus próprios erros, discuti-los e rever os conteúdos nos quais apresentam dificuldades. Caso essas dificuldades não sejam superadas, criarão um círculo vicioso, gerando erros na aprendizagem de seus futuros alunos (CURY, 2007).

Conforme Cury (2007), os cursos de formação docente devem incluir pesquisas sobre erros na aprendizagem matemática. Os licenciandos em Matemática devem estar preparados para saber lidar com os erros de seus futuros alunos, para que possam ajudá-los quando constatar alguma dificuldade. Quando os futuros professores abominam o erro, possuindo concepções negativas sobre este, futuramente ficará mais difícil ajudar seus alunos na superação de sentimentos negativos concernentes aos erros. De igual modo, os cursos de formação continuada de professores poderiam propiciar reflexões sobre os erros.

Abrate, Pochulu e Vargas (2006, p. 16 *apud* CURY, 2007, p. 93) também entendem que o estudo dos erros pode "proporcionar chaves sobre as quais estratégias resultam mais convenientes na hora de levar adiante os processos de ensino e aprendizagem de Matemática".

Não se deve pensar que o erro é culpa apenas dos alunos. Além do mais, ele precisa ser melhor aproveitado. De acordo com Luckesi (2002 *apud* ESPÍNDOLA, 2009), o erro deve ser utilizado como um instrumento que possibilite o crescimento não só discente como também docente.

Também Cury (2007) pondera que os licenciandos em Matemática e os professores podem aproveitar um erro comum, frequente, e, a partir dele, elaborar uma atividade investigativa aplicável aos estudantes.

Segundo Correia (2005 *apud* ESPÍNDOLA, 2009), os erros já deveriam ser aproveitados como recursos didáticos desde o advento da Psicologia Genética de Piaget, nos anos 60. Com relação aos erros matemáticos, a autora adverte que não se pode simplesmente taxar os alunos que os cometeram de incapazes, mas aproveitar estes erros para orientar e direcionar o processo de ensino e aprendizagem.

Conforme Pinto (2000, p. 34 *apud* ESPÍNDOLA, 2009, p. 21), o erro "pode desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar seus saberes e, com isso, melhorar seu ensino".

A autora também pondera que o erro faz parte do processo de construção do conhecimento e pode funcionar como uma estratégia didática para que o docente acompanhe o desempenho discente (avaliação). Enfatiza também que é preciso ressignificar o erro no contexto escolar (PINTO, 2002 *apud* BERTI, 2007).

Luckesi (2002 *apud* ESPÍNDOLA, 2009) entende que o erro deve ser visto de forma dinâmica. Se ele representa um desvio do padrão, o aluno que errou deve ter a oportunidade de adequar-se aos padrões ou até mesmo superá-lo, ou, no dizer de Silva (2008, p. 9 *apud* ESPÍNDOLA, 2009, p. 20), "a oportunidade de revisão e avanço, permite fazer uma síntese mental, integrando o fazer ao sentir, gerando o prazer e o criar na aprendizagem". Hoje, portanto, a concepção de erro como falta está mudando. Atualmente, admite-se que o erro destaca um momento do procedimento científico e do progresso dos conhecimentos (ASTOLFI *et al.,* 1997 *apud* COSTA, 2014). Tal concepção é assumida no presente trabalho, e constitui parte dos fundamentos considerados na intervenção pedagógica desenvolvida, bem como da análise dos resultados.

3.2.1 Sobre a Análise de erros em Matemática

Conforme Cury (2003), a análise de erros é uma abordagem de pesquisa surgida em princípios do século XX. Apresenta diferentes enfoques, conforme a origem dos pesquisadores e com as teorias que embasam seus trabalhos. Em síntese:

> A análise de erros de produção de alunos de Matemática tem, no seu desenvolvimento, recebido influências importantes do Behaviorismo e do Construtivismo. A primeira pressupõe a eliminação do erro, e a segunda aborda as dificuldades na construção do conhecimento (FELTES, 2007, p. 30).

Contudo, entre a influência behaviorista e a construtivista, houve a inspiração gestaltista ou da Psicanálise, na análise de erros estudantis. Radatz (1980 *apud* CURY, 2003) afirma que os pioneiros foram pesquisadores americanos, sob a rubrica do Behaviorismo. Os primeiros trabalhos investigaram erros cometidos por alunos de séries iniciais, relacionados às quatro operações matemáticas fundamentais.

De acordo com Teixeira (1997), a abordagem comportamental ou behaviorista concebe o erro como ausência de condicionamento adequado ou de reforçamento, o qual faz com que um estímulo discriminativo produza uma resposta específica. Na pedagogia de base empirista, o erro não possui função pedagógica. “Nessa perspectiva, o erro é visto como fracasso ou insucesso, e produz no comportamento efeitos de punição. Portanto, deve ser evitado, como propõe o método da Instrução Programada de Skinner (1972)” (TEIXEIRA, 1997, p. 49).

Os pesquisadores europeus, principalmente os alemães, trabalharam a análise de erros com fundamento na Gestalt ou na Psicanálise (RADATZ, 1980 *apud* CURY, 2003).

A partir da segunda metade do século XX, surgiram pesquisas usando protocolos verbais, ou seja, os pesquisadores solicitavam aos alunos que falassem em voz alta enquanto realizavam as atividades propostas, e essas eram gravadas. O objetivo consistia em detectar padrões passíveis de estudos à luz do processamento da informação (RADATZ, 1980 *apud* CURY, 2003). Cury (2007) também explana que os erros dos solucionadores de problemas podem ser encontrados através de protocolos verbais, aproveitando o “pensar em voz alta” e a possibilidade de 'unitarizar' as informações registradas.

De acordo com Cury (2003), a influência do sócio construtivismo fez-se notar em uma terceira fase da análise de erros. Nessa etapa, os pesquisadores entendiam o erro como construtor do conhecimento, como algo digno de estudos, e não de eliminação.

Para a proposta construtivista, o erro é bem-vindo, previsível e desejável. Ele possibilita, ao ser analisado, que o professor percorra os mesmos caminhos trilhados pelo aluno para chegar à resposta que apresentou. Com base nessa análise, o professor pode reformular seu Plano de Trabalho Docente e indicar ao discente a trilha correta. Este, a partir do erro, buscará caminhos e maneiras de construir seu conhecimento, pois só assim aprenderá (PERANZONI & CAMARGO, 2011).

Essas concepções estão implícitas na análise que os professores fazem dos erros encontrados em provas e testes discentes. Segundo Feltes (2007), corrigir avaliações é uma atividade de rotina para os professores de Matemática. A autora aponta três maneiras diferentes de se proceder em face do erro. No primeiro caso, muitos educadores costumam avaliar os erros dos alunos e atribuem uma nota, conforme o número de erros e acertos de cada um.

De acordo com Feltes (2007), com relação à análise de erros, outros professores aproveitam os erros mais frequentes, encontrados em uma avaliação, e procedem a uma retomada de conteúdos ou revisão.

A esse propósito, Bocalon (2008, p. 31), afirma: “A avaliação, unicamente como ‘medida’, ou mais oculta do que mostra, ou aponta aquilo que deve ser retomado, ser trabalhado novamente de outra forma, o que é imprescindível que os alunos conheçam”. Conforme a autora tem-se a impressão de que os professores procuram uma solução rápida, apenas corrigindo as questões erradas ou usando formas de memorização.

A terceira posição docente, tendo em vista a análise de erros, consiste em aproveitar os erros encontrados e, a partir deles, construir com os alunos estratégias de validação ou não; possibilita a construção de hipóteses e debates, para que possa construir, por meio deles, o ensino e a aprendizagem (FELTES, 2007).

Nesse sentido, Bocalon (2008, p. 31) conclui:

> Assim, o erro pode ser compreendido, não como uma simples resposta, mas como um desafio que o aluno coloca ao professor no decorrer de seu processo de aprendizagem [...]. Por meio de uma boa análise e reflexão sobre o erro é possível ocorrer um aprendizado, uma descoberta, um entendimento do que e por que se errou.

À terceira fase da análise de erros, sócio construtivista, pertencem os trabalhos de Borasi (1985, 1988), os quais incluem um quadro para avaliar as diferentes maneiras de se considerar o erro, de acordo com dois objetivos: eliminar ou explorar o erro; e três focos – conteúdo técnico-matemático; natureza da matemática; e processo de aprendizagem (CURY, 2003).

Conforme Cury (2007), Borasi (1989) denota sua afinidade com o Sócio Construtivismo quando procura utilizar os erros dos alunos para (re)construir conhecimento, deixando em segundo plano a preocupação de eliminar esses erros. A autora também destaca o trabalho de Borasi (1985), a "taxionomia de uso dos erros como trampolim para a pesquisa".

> A análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiada em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a (re)construir seu conhecimento (CURY, 2007, p. 27).

Para Teixeira (1997), na análise dos erros discentes, há que se distinguir entre erros casuísticos, ou seja, erros resultantes de distrações dos alunos, e erros sistemáticos. Ao contrário daqueles, esses podem ser interessantes, porque revelam modelos errados que estão implícitos nas respostas, obstáculos das mais diferentes origens ou problemas resultantes de dificuldades referentes à formação do conceito.

Cury (2007) considera a análise de erros como uma tendência em Educação Matemática. A autora aposta nessa análise como abordagem de ensino e de pesquisa. Como abordagem de pesquisa, a análise de erros possui intersecções com temas da Educação, da Educação Matemática e da Matemática mesma.

> [...] a análise de erros é uma abordagem de pesquisa – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de estudantes de todos os níveis de ensino nas amostras –, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula (CURY, 2007, p. 91).

Portanto, a Análise de Erros tanto pode ser utilizada na área de pesquisa como na área de ensino. "As situações em que os erros podem ser usados como estratégias de ensino são muito variadas. Pode-se ter uma resposta incorreta dada por um aluno ao ser questionado em aula" (CURY, 2007, p. 80). Nessa situação, pode-se averiguar se há outros estudantes com problema idêntico, ou se essa dificuldade é pontual. No primeiro caso, a autora recomenda aproveitar a oportunidade e criar uma estratégia. No segundo caso, o atendimento individual pode ser postergado para outra ocasião (CURY, 2007).

Bocalon (2008) ressalta a importância de se compreender o processo de aprendizagem dos alunos, porque assim percebe-se se houve um ensino com aprendizagem e consequente construção do conhecimento matemático. Para a autora, "Uma análise dos erros faz lembrar que os alunos são diferentes, supõe que o processo de aprendizagem também seja diferente" (BOCALON, 2008, p. 32).

Cury (2007) realizou uma pesquisa com 368 calouros de cursos superiores: "Análise de Erros em Disciplinas de Matemáticas de Cursos Superiores". Mais do que analisar e classificar os erros dos acadêmicos, a investigadora tinha como objetivo desenvolver estratégias de ensino para ajudá-los, principalmente com as dificuldades em Cálculo.

A autora mostra a categorização criada para as questões, sendo que na primeira categorizou os erros dos novos universitários em classes, como sintetizado a seguir: Classe A: resoluções corretas; Classe B: respostas parcialmente certas; Classe C: respostas aproximadas e erros em uma das quatro operações, que levam às respostas induzidas; Classe D: soluções onde desconsideraram o enunciado do problema; e Classe E: soluções que mostravam diferentes padrões de erro.

Sobre a Análise de erros inerentes ao aprendizado das Frações

Diversos estudos dos erros cometidos por alunos enfocam aqueles relacionados às Frações. Conforme Cury (2007), um erro que mais se destaca no Ensino Fundamental, e até mesmo aparece em respostas de acadêmicos, é proceder à adição de Frações de acordo com o exemplo: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{8}$.

De acordo com a autora, quando o aluno utiliza uma regra da adição para as Frações, há uma "sobregeneralização", ou seja, uma "falsa generalização".

Também Borasi (1996 *apud* CURY, 2007) ressalta que erros desse tipo são bastante comuns. Ao invés de tentar eliminar erros como esse, sugere que se proponha aos alunos encontrar algumas Frações em que a "regra" deles possa ser aplicada e o resultado esteja correto. Segundo ela, o professor também pode questionar se existem outras operações com Frações nas quais numeradores e denominadores podem ser combinados separadamente, ou se existem Frações para as quais os resultados da adição com a regra oficial e com a "regra" deles são iguais ou próximos. Assim, a partir da regra incorreta, apresenta-se aos alunos situações didáticas que os motivem, fazendo do erro um “trampolim para a aprendizagem”.

Conforme Silva (2005, p.71 *apud* BOCALON, 2008, p. 68), “as dificuldades associadas a erros com relação ao ensino aprendizagem dos números racionais são carregadas ao longo de todas as séries iniciais do Ensino Fundamental”.

Bocalon (2008) observou aulas sobre Frações, em turmas de 5º. Ano do Ensino Fundamental e analisou provas aplicadas, pelos professores regentes. As observações da pesquisadora sinalizam que os professores dominam o conteúdo, mas não compreendem como a criança constrói o conceito de Fração. Durante essas aulas, não se constatou a utilização de materiais manipulativos para a aprendizagem de Frações. Porém, manifesta que “faltou contextualização ao ensino” (BOCALON, 2008).

Para a pesquisadora, a análise de erros dos alunos nas provas demonstrou dificuldades conceituais com relação às Frações, incompreensão do sistema monetário, falta de domínio da tabuada de números ímpares, bem como do processo de resolução do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), dentre outros erros. Também revelou que os alunos não conseguiram compreender e nem representar as Frações. Faltou-lhes compreensão do conteúdo estudado, posto que não conseguiram desenvolver os exercícios envolvendo adição, subtração, divisão e multiplicação. Na opinião dos professores entrevistados pela pesquisadora, as maiores dificuldades são atribuídas à defasagem decorrente dos primeiros anos do Ensino Fundamental, tais como o desconhecimento da tabuada, necessária também na divisão de Frações (BOCALON, 2008).

Em uma investigação com alunos de 6º. Ano, Melo e Andrade (2014) constataram dificuldades como a incompreensão do conceito de Fração, erros em operações fundamentais com números inteiros, não identificação do mínimo múltiplo comum, erros em problemas envolvendo adição e subtração com números racionais, em sua forma fracionária, e na interpretação de problemas. As questões com maior número de erros (72,22%) eram sobre adição e subtração de Frações com denominadores diferentes.

Reconhece-se que o estudo dos Números Racionais é difícil, tal como afirmam Campos e Rodrigues (2007, p. 69 *apud* MELO & ANDRADE, 2014, p. 52):

> [...] sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio, pois, embora esse conjunto numérico seja uma extensão dos naturais, as tentativas de estabelecer paralelos entre procedimentos relativos aos dois conjuntos ora são válidas, ora não são, deixando desorientados os alunos que procuram estabelecer esses paralelos, sem uma reflexão mais aprofundada.

As investigações conduzidas por Sá (2011), também com alunos de 6º. Ano, indicaram erros como inversão denominador/numerador; incapacidade para identificar que quantia uma fração representa em relação ao todo; dificuldade para elaborar problemas simples sobre Frações, reta numerada e outros. A pesquisadora observou que os alunos não sabiam dividir as figuras geométricas em partes iguais, para representar Frações. No entanto, alguns estudantes apresentaram um falso conhecimento de Frações, ao desenhar figuras geométricas e dividi-las em partes desiguais.

De posse de todas essas dificuldades apontadas (e outras ainda, comuns no cotidiano docente), percebe-se que poucas aulas não darão conta de um ensino aprendizagem eficaz sobre Frações. Assim, endossa-se as palavras de Pelissaro (2011, p. 14 *apud* MELO & ANDRADE, 2014, p. 54) que afirma:

> [...] a verdadeira aprendizagem sobre as frações exige tempo, maturidade de pensamento e muita dedicação, pois este conteúdo é amplo e exige uma certa capacidade de abstração pois engloba outros conceitos como divisões para obter o número decimal de uma fração, frações equivalentes para realizar somas e subtrações [...].

A partir desses estudos, infere-se que o professor precisa compreender como a criança constrói o conceito de Fração, contribuir de forma significativa para a construção desse conhecimento, trazendo materiais concretos ou proporcionando experimentações e/ou simulações. É preciso sanar a origem das dificuldades com Frações, em caso contrário o discente vai continuar com elas pela sua vida acadêmica futura. Faz-se necessário consolidar reforçar os conhecimentos indispensáveis à aprendizagem de Frações, tais como: extrair o MMC, distinguir entre denominador e numerados, entender a tabuada e praticá-la, elaborar pequenas normas sobre os números racionais na forma fracionária, tais como “todas as partes do 'todo' devem ser iguais” dentre outros aspectos inerentes.

4. METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados durante a realização deste estudo. Assim, são descritos: o delineamento da pesquisa, o campo da pesquisa, as estratégias realizadas para a coleta de dados, a intervenção pedagógica, e a técnica de análise dos dados. Tudo isso visando convergir para uma resposta ao questionamento da Pesquisa: "Que contribuições a utilização de simulações interativas, *PhET*, pode trazer ao ensino de Frações?" e ao alcance do Objetivo Geral: "Estudar as potencialidades de simulações interativas do *PhET* no desenvolvimento de atividades inerentes ao ensino de Frações."

4.1 Natureza e delineamento da investigação

Para a execução deste trabalho, o processo metodológico esteve pautado na Pesquisa Qualitativa. Mais especificamente, buscou-se o desenvolvimento de uma Pesquisa-ação por meio de uma intervenção pedagógica envolvendo as tendências metodológicas em Educação Matemática – a Resolução de Problemas (RP) e as Mídias Tecnológicas (MT), no contexto do ensino de Frações nas Salas de Apoio à Aprendizagem de Matemática (SAAM) de duas escolas públicas de Guarapuava – PR, aqui denominados Colégios A e B.

A ação inicial foi a revisão bibliográfica sobre o tema em questão, embasada por livros e artigos que tratam do referido assunto. Esta revisão bibliográfica ocorreu durante toda a execução do trabalho. Em ação concomitante, procedeu-se à Pesquisa Qualitativa.

Assim como Bogdan e Biklen (1994 *apud* OLIVEIRA, 2008, p. 39), entende-se que "o fato de se pretender recolher dados no ambiente natural em que as ações ocorrem, descrever as situações vividas pelos participantes e interpretar os significados que estes lhes atribuem, justifica a realização de uma abordagem qualitativa".

No que se refere ao uso de MT no ensino de Frações, optou-se pelo uso de simulações interativas com o *PhET*. Nesse sentido, ficou caracterizada a modalidade de Pesquisa-ação. Esta, segundo Thiollent (2011, p. 20):

> [...] é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Portanto, é a que mais se adapta ao objetivo do presente estudo, que consiste em idealizar uma ação (uma intervenção pedagógica utilizando TIC) para sanar um problema educacional (as dificuldades no ensino e aprendizagem de Matemática, em especial, do ensino de Frações).

Também, na Pesquisa-ação, há uma interação entre o pesquisador e sujeitos da pesquisa, da qual resulta a ordem de prioridade dos problemas que serão investigados e das soluções que serão propostas em forma de uma ação concreta. O objeto da investigação não são as pessoas, mas a situação social e os diversos problemas nela contidos (THIOLLENT, 2011).

De acordo com Bogdan e Biklen (1982 *apud* MENGA & ANDRÉ, 1986), a Pesquisa Qualitativa possui as seguintes características: a sua fonte direta de dados é o ambiente natural, e o pesquisador é o seu principal instrumento; os dados coletados descrevem pessoas, situações e acontecimentos, e geralmente são analisados de modo indutivo; há maior preocupação com o processo do que com o produto; revela maior interesse do pesquisador pelo "significado" que as pessoas atribuem às coisas e à sua vida.

Em síntese, segundo Thiollent (2011) a Pesquisa-ação apresenta as seguintes características: grande e clara interação entre pesquisador e sujeitos da pesquisa; estabelecimento das prioridades dos problemas pesquisados e das soluções apresentadas sob forma de uma ação concreta; o objeto de investigação é a situação social e os problemas nela encontrados; seu objetivo é resolver ou esclarecer os problemas dessa situação; o acompanhamento das decisões das ações e da atividade intencional dos atores da situação observada, no decurso de todo o processo; procura aumentar o conhecimento do pesquisador e o conhecimento dos sujeitos da pesquisa, ou o seu "nível de consciência".

Portanto, de modo geral, o objetivo da Pesquisa-Ação é a transformação da realidade observada. Koerich *et al.* (2009) contribuem, afirmando que esse tipo de pesquisa interpretativa inicia-se com a identificação do problema, seja no contexto social e/ou institucional. Seguem-se o levantamento de dados referentes ao problema detectado e a análise e significação desses dados. Após selecionar soluções plausíveis, a Pesquisa-Ação intervém na prática, para transformar a realidade. Configura-se, pois, essa pesquisa, "como uma importante ferramenta metodológica capaz de aliar teoria e prática por meio de uma ação que visa à transformação de uma determinada realidade" (Koerich *et. al*, 2009, p. 1).

É também parte de uma pesquisa-ação prática na medida em que mesmo projetando mudanças a prática revela nossas reais concepções, isso de forma subliminar parece expressar uma rebeldia quando mesmo, apesar das orientações continuar pensando e fazendo de maneira própria.

É também em parte uma pesquisa ação política, na medida em que se deve valer-se de cooperações e colaboração de outros, professores, direção, corpo pedagógico e estudantes, nesse caso, nossa luta é com nós mesmos os professores, limitados pela formação, nossas concepções, nossos ideais, nossas intencionalidades na educação. Dessa forma, numa pesquisa ação participam interfaces de todas as modalidades.

O processo metodológico empírico da Pesquisa-Ação, que se caracteriza por "um movimento circular de compartilhamento, de subjetivação e de participação coletiva”, segundo Koerich *et al.,* (2009, p. 1) pode ser ilustrado com a Figura 2.

Figura 2 – Elaboração primária a partir das abstrações teóricas

FONTE: KOERICH *et al*., 2009.

É importante ressaltar que, segundo Tripp (2005), a Pesquisa-Ação é apenas uma das modalidades de investigação-ação, ou seja, um processo superordenado envolvendo um ciclo para o pesquisador se aprimorar, alternando a teoria e a prática e aprendendo com ambos. Outras modalidades de investigação-ação compreendem a aprendizagem-ação; a prática reflexiva; o projeto-ação; a aprendizagem experimental: o ciclo PDCA – Plan, Do, *Check and Act*; PLA – *Participatory Learning and Action*; PAR – *Participatory Action Research*; PAD – *Participatory Action Development*; PALM - *Participatory Action Learning Methods*; PRA - *Participatory Rural Appraisal* e outros; a prática deliberativa; a pesquisa Práxis; a investigação apreciativa; a prática diagnóstica; a avaliação-ação; a metodologia de sistemas flexíveis; e a aprendizagem transformacional.

Por sua vez, a Pesquisa-Ação pode assumir cinco diferentes modalidades, conforme enunciado por Grundy (1983 *apud* TRIPP, 2009):

1 - Pesquisa-ação técnica: abordagem pontual, consiste na implementação de uma prática existente em outro lugar, objetivando melhora; o pesquisador segue um manual;

2 - Pesquisa-ação prática: o pesquisador escolhe ou projeta as mudanças; desenvolver essa pesquisa é semelhante a praticar um ofício, pois o artífice pode receber uma ordem, mas o faz do seu jeito, com base nas suas experiências, suas ideias e concepções profissionais. Por exemplo: na área educacional, o objetivo do pesquisador é contribuir para o desenvolvimento infantil, e

procurará mudanças para a melhoria da aprendizagem e a autoestima de seus alunos, para aumentar interesse, autonomia ou cooperação, dentre outros atributos/valores;

3 - Pesquisa-ação política: para tentar mudar ou analisar as limitações da cultura institucional é necessário engajamento político. O pesquisador vai trabalhar com ou contra outros, se deseja mudar "o sistema". Visto que isso só pode ser feito pelo exercício do poder, a ação torna-se política;

4 - Pesquisa-ação socialmente crítica: modalidade de pesquisa-ação política que se sobrepõe a ela pois, quando o pesquisador trabalha para transformar ou superar as limitações àquilo que pode fazer, geralmente isso reflete uma mudança em seu modo de pensar a respeito do valor último e da política;

5 - Pesquisa-ação emancipatória: outra variação da pesquisa-ação política; o pesquisador objetiva uma mudança ampla da situação, não só para si mesmo e seus companheiros, mas para todo o grupo social.

Ao observar as modalidades elencadas, percebe-se que a presente Pesquisa-ação enquadra-se como Pesquisa-ação prática, pois a pesquisadora procura contribuir para o desenvolvimento educacional, e procura mudanças para a melhoria da aprendizagem do conteúdo Frações.

Assim, com o início da Pesquisa-ação prática, observou-se a realidade de duas SAAM, de dois colégios estaduais do município de Guarapuava-PR. Averiguou-se as dificuldades em Frações, em seguida procedeu-se a uma intervenção pedagógica com uso do *PhET Simulation* e da RP, objetivando proporcionar uma aprendizagem promissora sobre o conteúdo específico. Essas dificuldades foram confirmadas com um Pré-Teste aplicado aos alunos das SAAM (Apêndice I).

Após o desenvolvimento das simulações, observações participativas e outras atividades práticas – ação, – foi aplicado o Pós-Teste, com o intuito de identificar o conhecimento construído pelos alunos. Desse modo, observou-se a realidade, interferiu-se nela e procurou-se transformá-la, levando os alunos a uma melhor compreensão dos números racionais na sua forma fracionária.

Além da Pesquisa-ação prática, foi utilizada a observação participante, conforme comentários anteriores. Ressalta-se que alguns autores incluem a Pesquisa Participante como uma modalidade de pesquisa, quanto aos procedimentos. Conforme Gerhardt e Silveira (2009), a Pesquisa Participante tem como sua marca registrada o envolvimento e a identificação do pesquisador com os sujeitos da pesquisa.

4.2 Os locais de desenvolvimento

Para a realização da Pesquisa foram selecionados dois estabelecimentos públicos estaduais de Ensino Fundamental II, do Município de Guarapuava–PR, denominados como Colégio A e Colégio B.

O Colégio A localiza-se no centro do município de Guarapuava – Pr. Conforme seu portal foi criado em 1962, para ministrar o Ensino de 1.º Grau (Fundamental). Somente no final de dezembro de 2005 é que foi autorizada a oferta do Ensino Médio. Atualmente o Colégio funciona nos períodos matutino e vespertino, ofertando todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. Os alunos estão distribuídos em 12 salas de aula, todas com disponibilidade de aparelho televisor com entrada USB. Esse Colégio conta com Laboratório de Informática, com 12 computadores interligados pela rede Paraná Digital, rede de fibra ótica que permite acesso aos computadores da rede pública de ensino do estado do Paraná, e mais os computadores do Programa Nacional de Tecnologia Educacional – PROINFO. Possui também uma Biblioteca, com um acervo de mais de 5.000 volumes, cantina e quadra poliesportiva. No momento da intervenção, atuavam no Colégio cerca de 20 funcionários e aproximadamente 60 professores, conforme o Projeto Político Pedagógico de 2012. O número de alunos era de aproximadamente 600, oriundos de diversos bairros vizinhos. Desses estudantes, alguns utilizam computadores em casa, em *lanhouse*, no Colégio ou em residência de amigos e parentes. No ano letivo de 2015, funcionavam no Colégio A duas salas de apoio no período matutino, uma de Língua Portuguesa e outra de Matemática, sendo a professora da SAAM a mesma professora regente de duas das três turmas de 6.º Anos do colégio.

O Colégio B, criado em 1979, também destinava-se ao Ensino de 1.º Grau (Fundamental). Em 1998 recebeu autorização para oferecer também o Ensino Médio. De acordo com as informações do *site* do Colégio, atualmente possui cerca de 550 alunos, 50 professores e mais de 10 funcionários. Funciona com 17 turmas, sendo 13 de Ensino Fundamental e 4 de Ensino Médio. Localiza-se em um bairro próximo ao centro da cidade de Guarapuava – Pr, e de acordo com o Projeto Político Pedagógico do Colégio, seu funcionamento ocorre nos três turnos: matutino, vespertino e noturno. Apesar de estar situado em um bairro nobre, o Colégio B recebe alunos oriundos da classe trabalhadora, com nível socioeconômico médio baixo, que estudavam em escolas municipais, algumas localizadas em suas adjacências e outras mais longínquas.

No início do ano letivo de 2015, ocasião da intervenção pedagógica, funcionavam no Colégio B, duas salas de apoio no período matutino, uma de Língua Portuguesa e outra de Matemática, para alunos do 6.º Ano. Neste colégio o professor da SAAM não é o professor regente das turmas de 6.º Ano.

Conforme já mencionado, devido às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos iniciantes do último ciclo do Ensino Fundamental, foi criada no Estado do Paraná a Sala de Apoio à Aprendizagem.

> O Programa Sala de Apoio à Aprendizagem é proposto pela Secretaria de Estado de Educação desde 2004, com o propósito de recuperar alunos que ingressam aos anos finais do Ensino Fundamental com dificuldades de aprendizagem, por meio de atividades diferenciadas, em período contra turno (PARANÁ, 2011).

Oliveira e Macedo (2011) esclarecem que esse Programa atende a quinze mil alunos paranaenses, sendo que funcionam cerca de oitocentas turmas no contraturno. Segundo Oliveira *et al.* (2009), essas Salas de Apoio à Aprendizagem têm apoio legal na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN nº 9394/96, onde, de acordo com o princípio de flexibilidade, o sistema de ensino deve assegurar o direito do aluno à aprendizagem. Também encontram respaldo na Deliberação nº 007/99, do Conselho Estadual de Educação – CEE; na Instrução nº 22/2008 e na Resolução Secretarial nº 371/2008, que regulamenta a criação das Salas de Apoio à Aprendizagem, dentre outras normativas. Essa legislação é sumariada a seguir, por ordem cronológica.

Em consonância com a Instrução nº. 0001/2008 – SUED/SEED, o aluno é dispensado de participar da Sala de Apoio quando supera as dificuldades diagnosticadas. Outro aluno é chamado em seu lugar, e assim sucessivamente (PARANÁ, 2008). Dessa forma, os alunos usuários podem resgatar conceitos não entendidos anteriormente, aprendendo de forma diferenciada, e devem voltar a acompanhar os colegas do turno regular.

Os requisitos para a abertura e organização das Salas de Apoio estão insculpidos na Instrução Estadual nº 022/2008, da SUED/SEED – PR, segundo a qual contemplam apenas as disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática. Existe uma Sala de Apoio para cada três turmas de 6º Ano, sendo quatro horas semanais de aula para os alunos, em cada disciplina, e o professor recebe uma Hora Atividade a cada período de quatro horas lecionadas. O número de alunos em cada sala deve ser no máximo 15, no turno contrário ao qual estudam (OLIVEIRA *et al*., 2009).

Os alunos de 6º. Ano são selecionados para as Salas de Apoio conforme um diagnóstico elaborado pela Equipe Pedagógica, através da Ficha de Encaminhamento do Aluno (Anexo 1). O preenchimento dessa ficha ajuda a diagnosticar, no aluno, defasagens de conteúdos acumulados no decorrer dos anos anteriores. A avaliação segue as regras da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED-PR). Nessa ficha é preenchido a data de ingresso na Sala de Apoio e a data de saída, anotando-se o tempo de permanência no Programa (PARANÁ, 2011).

De acordo com a Instrução n° 007/2011, SEED/SUED[6], a Sala de Apoio à Aprendizagem tem como objetivo metodológico apresentar atividades diferenciadas das trabalhadas no turno regular. Segundo essa Instrução, a Direção e Equipe Pedagógica devem: "Orientar sobre a elaboração do Plano de Trabalho Docente para as Salas de Apoio à Aprendizagem, acompanhando sua efetivação e propondo metodologias adequadas às necessidades dos alunos, diferenciando-as das atividades da classe comum" (PARANÁ, 2011, p. 3).

Segundo a Instrução nº. 007/2011 (SEED/SUED) quem decide a liberação ou permanência do aluno é o professor regente da disciplina, juntamente com a Equipe Pedagógica e os professores da Sala de Apoio. Também compete ao professor regente o preenchimento da Ficha de

[6] SEED – Secretaria de Estado da Educação; SUED – Superintendência da Educação.

Encaminhamento do Aluno (PARANÁ, 2011). A operacionalização e o fluxo de alunos na Sala de Apoio à Aprendizagem ocorrem conforme o diagrama representado na Figura 3.

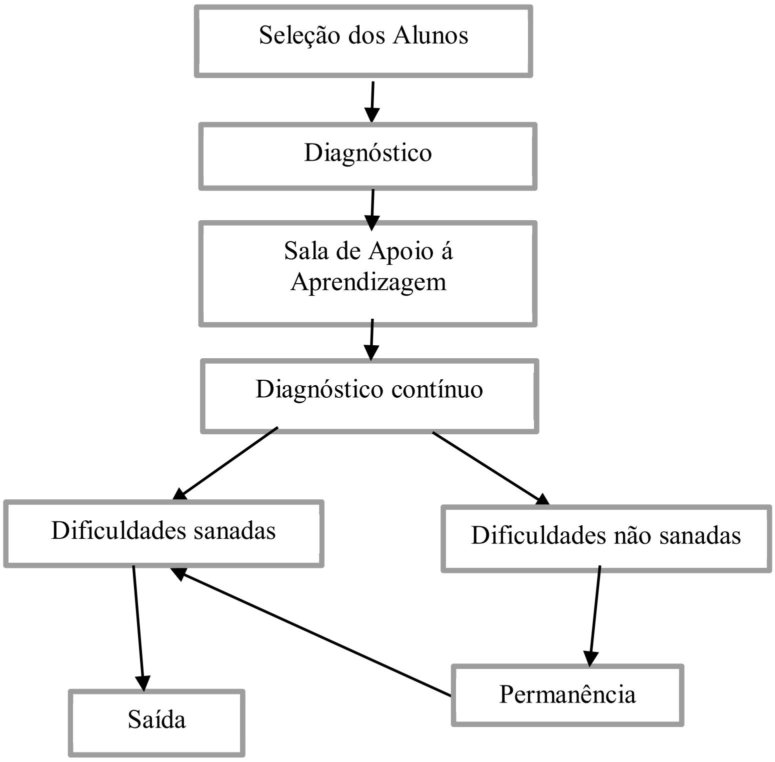


Figura 3 - Fluxo de alunos na Sala de Apoio

A presente intervenção pedagógica foi desenvolvida em 10 encontros no Colégio A e em 12 encontros no Colégio B. Justifica-se 10 encontros no colégio A, sendo estes encontros constituídos da realização de 4 atividades, a quinta atividade referente ao conteúdo de operações com Frações, não foi realizada a pedido da professora regente da SAAM que também é a professora regente dos sextos anos, devido a esse conteúdo não ser de conhecimento dos alunos, e como o objetivo da SAAM é reforçar os conteúdos já aprendidos, optou-se por não realizar a quinta atividade no colégio A. Em ambos os colégios as aulas foram cedidas pela professora titular da SAAM. Cada encontro contou com dois períodos de aula, totalizando 20 horas/aula no Colégio A e 24 horas/aula no Colégio B.

Cabe ressaltar que a utilização de metodologias alternativas à sala de aula regular é uma necessidade eminente à Sala de Apoio à Aprendizagem de Matemática – SAAM. Entretanto não há um trabalho nesse sentido, o que representa uma lacuna a ser preenchida por estudos de educadores matemáticos interessados em avanços nesse programa.

4.3 Caracterização dos participantes da pesquisa

Desse universo de pesquisa, representado pelas duas escolas estaduais, foram sujeitos os alunos que frequentaram a SAAM em 2015. Ambos os colégios possuíam 3 turmas de 6º. Ano, no período vespertino. Optou-se por trabalhar com dois colégios para conseguir mais alunos para participarem da intervenção pedagógica.

A Instrução n. 010/2014 da SUED/SEED prevê o número máximo de 20 alunos por Sala de Apoio (Paraná, 2014). No entanto, em ambos os colégios esse número não foi atingido. Houve uma participação média de 10 alunos por encontro, sendo que apenas 6 alunos do Colégio A e 4 alunos do Colégio B tiveram participação efetiva em todas as atividades, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Características dos sujeitos envolvidos na pesquisa

	Colégio A			Colégio B		
Idade	Quantidade de alunos	Repetentes	Participação em todas as atividades	Quantidade de alunos	Repetentes	Participação em todas as atividades
10 anos	5	-	2	4	-	-
11 anos	6	-	3	9	-	2
12 anos	1	1	1	2	2	1
14 anos	1	1	-	3	3	1
Total	13	2	6	18	5	4

Os dados inerentes às repetências representadas no Quadro 2, foram coletados a partir de um questionário prévio (Apêndice 1). A idade dos alunos foi obtida junto ao Encaminhamento à SAAM e no próprio instrumento de pesquisa. Assim:

Em ambos os colégios, a maior parte dos alunos da SAAM estava com a idade de 11 anos. Também em ambos os estabelecimentos de ensino, a minoria dos alunos tinha a idade de 14 anos.

A maioria dos alunos que participaram da pesquisa era de classe baixa, motivo pelo qual muitas das vezes ficaram impossibilitados de se deslocarem à SAAM, devido às condições meteorológicas impostas pelo mau tempo.

Ao se comparar os dados do colégio A com os dados do colégio B, observa-se que no Colégio A houve igual número de repetentes com as idades de 12 e 14 anos. No Colégio B, porém, houve mais repetentes com a idade de 14 anos, lembrando que, conforme o Quadro 2, o Colégio A possuía 2 alunos repetentes na SAAM, e o Colégio B possuía 5.

Outra característica acentuada é que os alunos repetentes tinham como principal causa de sua reprovação as dificuldades na disciplina de Matemática – todos os repetentes haviam sido reprovados em Matemática. Esse fato corrobora a afirmação de Melão (2005, p. 13): “O fracasso escolar, as repetidas reprovações e desistências têm atingido um número bastante significativo de crianças no sistema educacional brasileiro. [...] A matemática escolar é responsável por uma parcela bastante significativa desse processo fracassado”.

4.4 Estratégias para Coleta de Dados

A coleta de dados consistiu basicamente da observação sobre como o aluno reconhece, aplica, e soluciona um problema envolvendo o conceito de Frações mediado pelo uso das TIC. Nesta etapa do processo considerou-se o levantamento e a análise do máximo possível de informações, por meio de questionários e do 'Diário de Bordo', que buscam constituir dados acerca do conhecimento prévio que o aluno traz a respeito do estudo com Frações, e das atividades desenvolvidas pelos alunos, com o objetivo de conhecer melhor o objeto de estudo. O levantamento de dados ocorreu durante as aulas. Ao mesmo tempo, buscou-se verificar coerência entre a proposta teórica metodológica das SAAM e a sua realidade prática.

O relato e a análise das produções e das considerações feitas pelos alunos durante as simulações desenvolvidas constituem um diagnóstico que visa identificar as dificuldades e os avanços.

Durante todo o processo o aluno foi avaliado pela sua participação, priorizando a observação contínua, dando oportunidades de desenvolver atividades que objetivam resolver suas dúvidas e progredir seu aprendizado.

Entretanto, como elemento auxiliador, considerou-se o emprego dos instrumentos pré-teste (Apêndice 1) e do pós-teste (Apêndice 2).

Os dados analisados foram a partir dos questionários aplicados, o diário de bordo e das observações em sala de aula, para tanto foram realizadas a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

No intuito de tornar dinâmica e efetiva a Pesquisa-ação prática, considerou-se a Análise de Erros como metodologia de investigação, como proposto por Cury, Bisognin e Bisognin (2015).

> A análise da produção escrita de estudantes, em qualquer nível de ensino, é uma possibilidade de trabalho que pode ser considerada sob o ponto de vista da investigação ou do ensino. Como metodologia de investigação, podemos avaliar o conteúdo das soluções dos estudantes, passando pelas etapas de pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, obtendo informações que nos permitem avançar no conhecimento das causas dos erros (CURY, BISOGNIN & BISOGNIN, 2015, p. 1).

Nessa perspectiva, num primeiro momento, considerou-se a classificação: “totalmente corretas” – respostas subjetivas que revelem o entendimento de um conceito, pelo aluno, ou respostas objetivas com todos os quesitos corretos; “parcialmente corretas” – respostas subjetivas que demonstrem raciocínio incompleto, ao definir um conceito ou fornecer resposta a um problema, ou respostas objetivas com um ou mais itens incorretos; e “incorretas” – respostas subjetivas ou objetivas totalmente em desacordo com o estudo realizado; e “não respondeu”. Posteriormente, foram criadas novas categorias de análise, expostas no Quadro 5, capítulo 5, observando-se as características dos erros discentes.

Como instrumentos auxiliadores da pesquisa, foram utilizados questionários e relatórios para as atividades desenvolvidas pelos participantes, bem como um Diário de Bordo elaborado pela pesquisadora onde foram registrados não somente as observações, mas também os dados dos questionários e relatórios, assim como as reflexões relacionadas.

O primeiro instrumento utilizado para a coleta de dados foi o Questionário Prévio. Seu objetivo consistiu em verificar os conhecimentos que o aluno possuía inicialmente sobre Números Racionais na forma fracionária (Apêndice 1).

Após o desenvolvimento das atividades foi realizado o Questionário Pós-Teste. O objetivo desse foi auxiliar na identificação dos conhecimentos construídos pelos alunos com o desenvolvimento da intervenção pedagógica proposta. Desse modo, ambos os questionários compuseram os instrumentos de análise.

Outro instrumento que serviu de subsídio para a coleta de dados foi o Diário de Bordo ou de Campo, com o objetivo de registrar as informações e ocorrências consideradas relevantes, como datas e locais de todos os fatos, passos, descobertas e indagações ocorridas em sala de aula.

Ainda, como instrumento qualitativo, contou-se com as observações das aulas da professora regente e observação dos alunos enquanto realizavam suas atividades.

4.5 Do Tratamento dos Dados

Para o tratamento dos dados coletados, procurou-se embasamento na Análise de Conteúdo. Conforme Bardin (1979 *apud* CURY, 2007), como método de investigação sistematizado, com normas e princípios, a análise de conteúdo originou-se na análise de artigos jornalísticos, em especial as da Escola de Jornalismo de Colúmbia (EUA). A intensificação dessa metodologia deveu-se à necessidade de análise das propagandas durante as duas grandes guerras mundiais do século XX.

> Designa-se sob o termo de análise de conteúdo: Um conjunto de técnicas de análise das comunicações (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1979, p. 42 *apud* CURY, 2007, p. 62).

Atualmente, a análise de conteúdo, um dos vários métodos de análise textual, é utilizada nas áreas de Educação, Sociologia, Psicologia, Linguística e Comunicação, em pesquisas envolvendo opiniões, percepções, crenças, sentimentos e ideias. Na análise das respostas do aluno, não importa saber se acertou ou não, mas entender de que forma ele se apropriou dos conhecimentos questionados, os quais podem denotar dificuldades de aprendizagem (CURY, 2007).

Nessa análise, conforme Navarro e Díaz (1994 *apud* CURY, 2007), se for considerada somente a classificação e o cômputo das respostas de cada tipo, ninguém sairá beneficiado, nem docentes nem discentes. A investigação perde em qualidade. Por outro lado, se a análise averiguar de que forma o aluno chegou àquela resposta, correta ou não, contribuirá para construir novos níveis de conhecimento.

De acordo com as orientações de Bardin (1979 *apud* CURY, 2007), a análise de conteúdo passa por três etapas: pré-análise, exploração do material (ou descrição analítica), e tratamento dos resultados.

Durante a pré-análise procede-se à leitura e seleção dos documentos, levantamento das hipóteses e determinação dos objetivos da análise. Cada solução recebe um código ou sigla (BARDIN, 1979 *apud* CURY, 2007).

Na etapa de exploração do material, conforme Bardin (1979 *apud* CURY, 2007), procede-se à releitura e se define as unidades de análise. Cada uma delas é individualizada e separada, por código, do *corpus*, ou seja, do conjunto das produções textuais que será analisado. A seguir, passa-se a formar as categorias.

Visto que Bardin (2015) recomenda a preparação do material antes da análise, após a coleta dos dados, na presente pesquisa procedeu-se à preparação do material, separando os questionários por Colégio e por tipo (Pré-Teste ou Pós-Teste). Cada Questionário Prévio recebeu, aleatoriamente, uma numeração sucessiva, caracterizando desde o Aluno 1 até o Aluno 13. Com os codinomes dos alunos, procedeu-se de igual modo com o Questionário-Pós.

Como um exame de questão por questão do Pré e do Pós-Questionário, obedeceu-se a uma categorização das respostas: Totalmente Correta (TC); Parcialmente Correta (PC); Incorreta (I) e Não Respondeu (NR). Desse modo, obteve-se os resultados apresentados no Quadro 5, Capitulo 5, resultados esses apenas quantitativos, pois os resultados qualitativos estão disponíveis na Seção 3.9.

Após preparar o material da presente pesquisa, passou-se à sua exploração, “uma fase longa e fastiosa”, conforme Bardin (2015, p. 101), mas foi interessante e enriquecedora para a pesquisadora. Essa etapa consistiu em operações de codificação. A etapa seguinte foi dos resultados.

Ainda conforme a análise de conteúdo, durante a etapa de tratamento dos resultados, procede-se à descrição das categorias, em tabelas ou quadros. A derradeira fase é a interpretação. Com base nela, os resultados obtidos podem ser usados para auxiliar os alunos na superação das dificuldades evidenciadas (BARDIN, 1979 *apud* CURY, 2007). Portanto, na presente Pesquisa-ação prática, na fase de tratamento dos resultados, as categorias estão apresentadas em tabelas ou quadros, com a respectiva interpretação, em sua fase final.

4.6 Do Produto Educacional

Como Produto Educacional resultante desta pesquisa considerou-se a elaboração de um caderno educacional para o ensino de Frações com o *PhET*, contando com todas as atividades desenvolvidas.

4.7 Do Desenvolvimento das Atividades na Sala de Apoio

No Cronograma de Atividades, buscou-se que os alunos utilizassem o *PhET* em todos os encontros, considerando as simulações como ferramenta auxiliadora para resolver as atividades propostas.

Nos Quadros 3 e 4 são apresentadas as estruturas das atividades desenvolvidas nesta pesquisa, nos colégios A e B, respectivamente.

Quadro 3 – Atividades desenvolvidas no Colégio A

ENCONTRO	ATIVIDADES	DURAÇÃO
1º.	• Apresentação da proposta. • Observação das atividades desenvolvidas na SAAM; • Identificação dos conhecimentos prévios de cada aluno; • Identificação dos aspectos cognitivos de cada aluno: • Exibição do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).	2 hs/aula
2º.	• Observação das atividades desenvolvidas na SAAM; • Identificação dos conhecimentos prévios de cada aluno; • Identificação dos aspectos cognitivos de cada aluno; • Preenchimento do termo de assentimento para criança e adolescente (maiores de 6 anos e menores de 18 anos).	2 hs/aula
3º.	• Aplicação do Pré-teste. (Apêndice 1)	2 hs/aula
4º.	• Atividade 1 (O que é uma Fração?) (Apêndice 3); • Exploração do *PhET* (Intro a Frações); • Discussões, em duplas, para a resolução da atividade; • Socialização dos conhecimentos adquiridos na atividade.	2 hs/aula
5º.	• Formalização do conceito de Fração (Apêndice 4); • Curiosidades sobre as Frações; • Leitura de uma Fração; • Tipos de Frações; • Processos para resolução de um problema.	2 hs/aula
6º.	• Resolução de problemas matemáticos; • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
7º.	• Atividade 2 (Comparando Frações. Parte I) (Apêndice 5); • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
8º.	• Atividade 3 (Frações Equivalentes) (Apêndice 6); • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
9º.	• Atividade 4 (Comparando Frações. Parte II) (Apêndice 7); • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
10º.	• Pós-teste (Apêndice 2).	2 hs/aula
		Tempo total: 20 horas

Quadro 4 - Atividades desenvolvidas no Colégio B

ENCONTRO	ATIVIDADES	DURAÇÃO
1º.	• Apresentação da proposta. • Observação das atividades desenvolvidas na SAAM; • Identificação dos conhecimentos prévios de cada aluno; • Identificação dos aspectos cognitivos de cada aluno: • Exibição do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).	2 hs/aula
2º.	• Observação das atividades desenvolvidas na SAAM; • Identificação dos conhecimentos prévios de cada aluno; • Identificação dos aspectos cognitivos de cada aluno; • Preenchimento do termo de assentimento para criança e adolescente (maiores de 6 anos e menores de 18 anos).	2 hs/aula
3º.	• Aplicação do Pré-teste. (Apêndice 1)	2 hs/aula
4º.	• Atividade 1 (O que é uma Fração?) (Apêndice 3); • Exploração do *PhET* (Intro a Frações); • Discussões em duplas para a resolução da atividade; • Socialização dos conhecimentos adquiridos na atividade.	2 hs/aula
5º.	• Formalização do conceito de Fração (Apêndice 4); • Curiosidades sobre as Frações; • Leitura de uma Fração; • Tipos de Frações; • Processos para resolução de um problema.	2 hs/aula
6º.	• Resolução de problemas matemáticos; • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
7º.	• Atividade 2 (Frações Equivalentes) (Apêndice 5); • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
8º.	• Atividade 3 (Comparando Frações. Parte I) (Apêndice 6); • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
9º.	• Atividade 4 (Comparando Frações. Parte II); (Apêndice 7) • Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
10º.	• Atividade 5 (Operações com frações. Adição e Subtração) (Apêndice 8).	2 hs/aula
11º.	• Socialização das estratégias utilizadas.	2 hs/aula
12º.	• Pós-teste (Apêndice 2).	2 hs/aula
		Tempo total: 24 horas aula

As ideias para o trabalho foram elaboradas a partir do trabalho de Onuchic (2012). Dessa forma, cada atividade compreendeu três momentos: antes, durante e depois da resolução.

Para o primeiro momento, a professora pesquisadora certificou-se de que os alunos estavam preparados para receber a tarefa, assegurando-se de que os problemas a serem resolvidos condiziam com o nível cognitivo deles (Preparação do problema). Nesse momento procedeu-se à leitura do problema, esclarecendo possíveis termos desconhecidos pelos alunos.

Durante a resolução dos problemas, a pesquisadora acompanhou, motivou, estimulou e observou, certificando-se de que todos os alunos sempre estivessem envolvidos.

> Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como

> mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles (ONUCHIC, 2012, p. 13).

No terceiro momento os alunos socializaram as estratégias utilizadas, sem nenhum tipo de avaliação (explícita). Os representantes dos grupos registraram suas ideias e a classe analisou e discutiu, em plenária.

> Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca, como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem (ONUCHIC, 2012, p. 13).

Ainda nesse terceiro momento, os alunos chegaram a um consenso. Somente ao final desse processo é que, como professora, formalizavam-se os novos conceitos e conteúdos.

> Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85 *apud* ONUCHIC, 2012, p. 14).

Esses momentos da RP estão detalhados no capítulo seguinte, ocasião em que são comentados os resultados da intervenção pedagógica desenvolvida nas SAAM.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em 2014 foi acordado com a equipe pedagógica dos colégios A e B que no início das atividades do ano letivo de 2015 o Projeto poderia começar com a SAAM, porém, devido à greve dos professores da rede estadual, houve atrasos em relação às datas iniciais.

Todas as atividades foram elaboradas visando uma abordagem dinâmica e atrativa, buscando-se, preferencialmente, que os alunos sempre estivessem trabalhando em duplas ou grupos, dando-lhes sempre um tempo para que pudessem trocar ideias e discutir estratégias.

De acordo com Arantes, Miranda e Studart (2010, p. 29), "Para melhor aproveitamento, recomenda-se que os alunos utilizem as simulações em duplas, diretamente na sala de aula". As autoras destacam que:

> A principal ideia nesse caso é submeter a dupla de alunos a um roteiro estruturado que lhes possibilite investigar os fenômenos explorando todo o potencial da simulação e todas as relações entre as variáveis do fenômeno. De acordo com o grupo do *PhET*, o objetivo desse roteiro é encorajar os alunos a explorar o comportamento da simulação, questionar suas ideais e desenvolver os correspondentes modelos mentais (ARANTES, MIRANDA & STUDART, 2010, p. 29)

Durante o primeiro encontro, bem como no segundo, em ambos os colégios, a pesquisadora atuou apenas como observadora dos alunos, enquanto realizavam atividades com a professora regente da SAAM. Como a proposta era trabalhar com Frações, procurou-se observar os conhecimentos prévios que os alunos possuíam sobre o tema.

Verificou-se que os alunos não possuíam domínio sobre o conteúdo Frações, mas tinham algumas ideias relacionadas, como: Anderson comprou meio quilo de café; Mariana comeu metade do bolo; Ana quer repartir uma maçã com Leandro.

Ao averiguar os conhecimentos prévios e a situação dos alunos, constatou-se que os repetentes eram aqueles apenas cuja idade estava acima da faixa etária padrão (11 anos), para o 6º. Ano. Isso significa que eles já frequentaram a SAAM no ano anterior, e ainda não dominavam os conteúdos matemáticos de 6º. Ano, ou seja, não possuíam os conhecimentos necessários.

O questionário prévio aplicado aos alunos da SAAM do Colégio A, o Pré-teste (Apêndice 1), constou de 8 questões. A primeira pergunta não versava sobre Frações, esta ajudou a caracterizar os alunos. A segunda pergunta visava avaliar o conhecimento do aluno sobre Frações. Dos 13 alunos respondentes, 2 deixaram a resposta em branco; 2 responderam "*mais ou menos*"[7] [*sic*] e os

[7] Essa expressão "mais ou menos" foi utilizada pelo aluno, para responder a primeira questão.

demais forneceram respostas com a ideia de divisão em partes, porém nenhum conseguiu expressar corretamente o que era uma Fração. Porém, talvez induzidos pelas figuras sobre Frações, constantes no Questionário Prévio, a maioria dos alunos apresentou resposta parcialmente correta.

Exemplos de respostas obtidas na questão 2: *"Eu entendo que pode ser a metade de alguma coisa". "Eu entendo que a fração que reparte as coisas". "Eu entendo por fração que é o nome dado aumacomta"* [*sic*]. *"São Partes iguais de uma coisa". "Dividir na metade".*

Desse modo, foram encontrados os primeiros erros dos (as) alunos(as) do Colégio A, erros esses que serão analisados doravante. Nesse propósito, no presente estudo procurou-se, inicialmente categorizá-los, ou seja, elaborar uma classificação própria. Assim, considerou-se 5 categorias, conforme o Quadro 5.

Quadro 5 - Categorização de erros

TIPO DE ERRO	CARACTERÍSTICAS
Erros Conceituais **(EC)**	Designa os erros com relação ao entendimento de conceitos.
Erro na interpretação de texto não verbal **(EITNV)**	Inclui os erros relacionados a representações icônicas de Frações.
Erro na lecto escrita de números fracionários **(ELENF)**	Erros referentes à leitura/escrita de números fracionários.
Erros na RP **(ERP)**	Erros relacionados aos procedimentos para RP, inclusive, a ausência de resposta ao problema.
Erros no Tratamento de Números Racionais Fracionários **(ETNRF)**	Erros referentes à tendência de considerar os Racionais como Naturais (sobregeneralização, segundo Cury, 2007)

Com essa categorização, a Questão 2 apresentou Erros Conceituais, pois os alunos não souberam definir exatamente o que é uma Fração.

Na pergunta 3, os alunos demonstraram seu pouco conhecimento do conteúdo Fração, embora alguns estivessem deduzindo a partir das figuras. À pergunta "Onde usamos a Fração no nosso dia a dia? Dê exemplos:", resultou em 2 respostas que não explicitam diretamente a ideia de Fração, mas que pode estar implícita, envolvendo Frações nessas situações: "*no mercado para da o dinheiro certo*" [*sic*] e "*para contar dinheiro e pagar as contas*". Um estudante respondeu que usa-se Frações no Colégio, o que não deixa de estar parcialmente certo. A maioria dos alunos apresentou respostas similares: "*bolo, maça*", "*no café da manhã e no almoço no aniversário*", "*Sempre A gente vai comer um pão Uma fatia e meia de pão a se não*", "*Exemplo eu corto a torta e divido fica uma fração", "se você tem só uma maçã e seu primo vai a sua casa voce divide na metade*", "*quando corta uma maçã que fica com 2 partes, também com uma pizza divide em 4 partes, essa é a fração*" [*sic*].

De igual modo, a Questão 3 apresentou Erros Conceituais, ou seja, dificuldades conceituais, conforme o entendimento de Bocalon (2008). Percebeu-se que, mesmo fazendo-se presente, as Frações não são percebidas pelos alunos como elementos de sua rotina, o que corrobora a colocação de Monteiro. O aluno pode falar “meio-dia”, mas não tem consciência de que se trata da metade do dia.

> Embora algumas expressões relacionadas às frações, como “metade”, serem [*sic*] utilizadas espontaneamente pelos alunos de forma rotineira, isso não significa que em expressões como, por exemplo, meio-dia, a criança esteja pensando, necessariamente, na metade de um dia com relação a um dia completo (MONTEIRO & GROENWALD, 2014, p. 110).

Na Adição de Frações, Questão 4 do Pré-Teste, foi verificada apenas uma resposta totalmente correta e uma parcialmente correta; as demais estavam incorretas. Mesmo as questões 4a e 4b, que eram ilustradas, não contribuíram para o raciocínio correto do aluno. As questões 4c e 4d correspondiam a representação numérica de 4a e 4b, respectivamente. Nesse caso, na primeira parte da Questão 4, os erros classificam-se como Erro na Interpretação de Texto Não Verbal, que inclui os erros relacionados a representações icônicas de Frações.

Eco (1980) entende a iconicidade como sinônimo de transcrever, através de artifícios gráficos, as propriedades culturais a ela atribuídas, pois quando uma cultura define seus objetos, remete a códigos de reconhecimento. Neste caso, no presente estudo, considera-se como texto não verbal a representação icônica ou pictórica de Frações.

Pode-se considerar os EITNV como “erros de visualização” ou de percepção, pois 62% dos alunos não conseguiram “ver” ou perceber que uma metade de um bolo $\left(\frac{1}{2}\right)$ mais a outra metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ forma o bolo inteiro, ou seja: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. De forma similar, 85% dos alunos não conseguiram “ver” que uma maçã e meia maça + uma maçã e meia maça totaliza três maçãs, ou seja, $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$. Talvez o que tenha prejudicado essa questão foi o traço colocado ao lado, para o aluno inserir a resposta, pois 53% dos alunos raciocinaram que a resposta seria um número na forma fracionária. Por exemplo, 46% dos alunos colocaram a resposta $\frac{1}{2}$ para a questão 4a e um respondeu $\frac{2}{4}$. Como exemplo, a resolução apresentada por um(uma) aluno(a) do Colégio A.

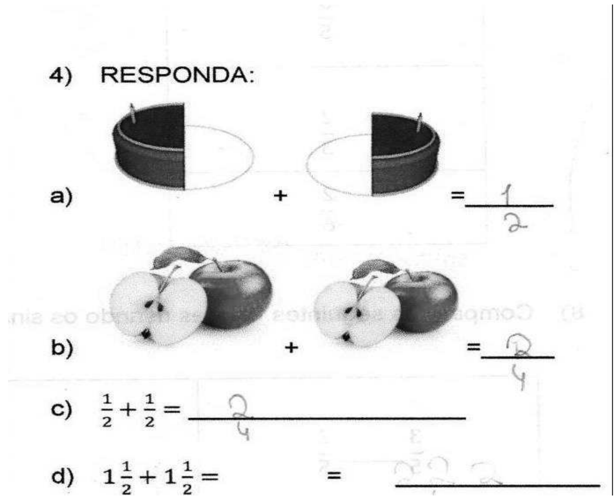


Figura 4 – Questão 4 do Pré-teste respondida por aluno do Colégio A

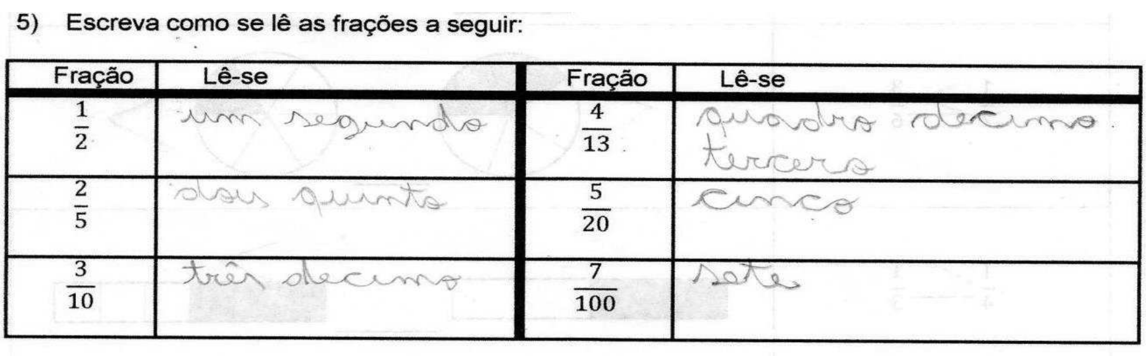
Outro erro a ser destacado, nessa questão, é o Erro de Tratamento de Números Racionais Fracionários, pois na questão 4c o aluno considerou as frações como Número Natural para somar, ou seja, somou direto os numeradores (1+1 = 2) e depois somou direto os denominadores (2+2 = 4). Mais uma vez, ainda destaca-se o "traço", como comentado anteriormente, para ensejar uma resposta errônea.

Segundo Melo e Andrade (2014, p. 55) erros desta forma não acontece apenas no Ensino Fundamental: "Observamos que, mesmo alunos do ensino médio têm aversão às operações com frações e enfrentam muitas dificuldades nas mesmas, principalmente quando precisa-se identificar o mínimo múltiplo comum na hora de somar ou subtrair frações".

Portanto, tratar os Números Fracionários como Naturais dificulta o trabalho com Frações, como também observaram Monteiro e Groenwald (2014, p. 110):

> O ensino e a aprendizagem das frações é um processo complexo para os alunos e as dificuldades podem surgir quando estes transferem as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as frações, não compreendendo as características particulares de cada conjunto numérico.

Na leitura de Frações (Questão 5), 3 alunos NR; apenas 3 respostas eram do tipo Totalmente Corretas; 7 eram Incorretas. A esses erros pode-se chamar de "erros de leitura/escrita", mas a maioria está relacionada à falta de compreensão do conceito de "avos" e do conceito de "terços". Portanto, são Erros Conceituais e/ou Erro na *Lecto* Escrita de Números Fracionários, conforme se expressou um aluno:


5) Escreva como se lê as frações a seguir:

Fração	Lê-se	Fração	Lê-se
$\frac{1}{2}$	um segundo	$\frac{4}{13}$	quadro decimo tercero
$\frac{2}{5}$	dois quinto	$\frac{5}{20}$	cinco
$\frac{3}{10}$	três decimo	$\frac{7}{100}$	sete

Figura 5 – Questão 5 do Pré-teste Colégio A – Aluno 1

O erro de esquecimento dos Avos caracteriza também o desprezo ou não compreenção da leitura do denominador. O erro relacionado foi cometido por dois estudantes do Colégio A.

5) Escreva como se lê as frações a seguir:

Fração	Lê-se	Fração	Lê-se
$\frac{1}{2}$	um terço e dois quarto	$\frac{4}{13}$	quato terço e trêze avos
$\frac{2}{5}$	dois terço e cinco quinto	$\frac{5}{20}$	cinco terço e vinte avos
$\frac{3}{10}$	três terço e dez decemo	$\frac{7}{100}$	sete terço e cem centésimo

Figura 6 – Questão 5 do Pré-teste Colégio A – Aluno 2

Este aluno não conseguiu acertar nem a escrita de $\frac{3}{10}$, pois colocou "terço" em todas as escritas, mas lembrou dos Avos.

5) Escreva como se lê as frações a seguir:

Fração	Lê-se	Fração	Lê-se
$\frac{1}{2}$	Um terço	$\frac{4}{13}$	4 terço
$\frac{2}{5}$	2 terço	$\frac{5}{20}$	5 terço
$\frac{3}{10}$	3 terço	$\frac{7}{100}$	7 terço

Figura 7 – Questão 4 do Pré-teste Colégio A – Aluno 3

Este estudante (Fig. 7) também colocou "terço" em todas as respostas, mas esqueceu dos Avos.

É interessante destacar que, nessa questão, apenas 2 dos 13 alunos escreveram corretamente a expressão $\frac{1}{2}$ (um meio). Como visto acima, 2 alunos "enxergaram" um 3 nessa fração, e escreveram "*um terço*" e "*um terço e dois quartos*"; para um aluno, era "*um segundo*"; para outro, era "*dois quarto*" [*sic*]; 2 alunos responderam "*um de dois*"; 2 escreveram "*um e meio*"; e um escreveu apenas "*dois*".

Associar $\frac{1}{2}$ a "um e meio", de acordo com Merlini (2003, p. 208), corresponde à Estratégia interpretação da Fração literalmente, na qual o aluno faz a interpretação da Fração literalmente: "Ao ler $\frac{1}{2}$ (um meio), o aluno a interpretou como sendo 'um e meio' (1 inteiro e metade do inteiro). Esta estratégia de resolução está diretamente ligada à questão que envolve o significado do Número icônico".

O problema-história[8] da Questão 6 não foi resolvido por 2 alunos; 5 alunos solucionaram-no de forma parcialmente correta, pois não inferiram que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Os demais responderam de maneira incorreta: teria que ser "$\frac{2}{2}$"; "*cada um vai comer 8 se dividir*", "*não por que uma ficaria com mas que aoutra*"; "$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$*não poderão dividir ao meio*"; "*Sim, não*" [*sic*]. Um(a) estudante deu continuidade à história: "*sim, izabela ficou Feliz mas queria a barra inteira ela tinha disfarçado. Mas Vitória não queria reparte ainda mais pegaria todo seu chocolate*" [*sic*]. Classifica-se esse erro como Erros na RP (ERP), ou seja, Erros relacionados aos Procedimentos para RP, inclusive, a ausência de resposta ao problema.

Esse erro, de não compreender que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, segundo a análise de Valera (2003) pode tratar-se de uma "generalização prematura de conceitos" ou uma "apropriação indébita de conceitos". Os dois alunos podem ter fixado a ideia de que 2 > 1 e 4 > 2, então $\frac{1}{2}$ não pode ser igual a $\frac{2}{4}$. Não houve a compreensão de equivalência, caracterizando também Erros Conceituais.

A Questão 7 consistia em relacionar a Fração à sua representação gráfica; apenas dois alunos responderam de modo incorreto, um aluno relacionou $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ e vice-versa; outro, $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$ a $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{5}$. Esse tipo de Erro na Interpretação de Texto Não Verbal também pode ser considerado um "erro visual", pois as representações gráficas eram claras. Os demais estudantes relacionaram de forma totalmente correta. Segue-se uma das respostas incorretas:

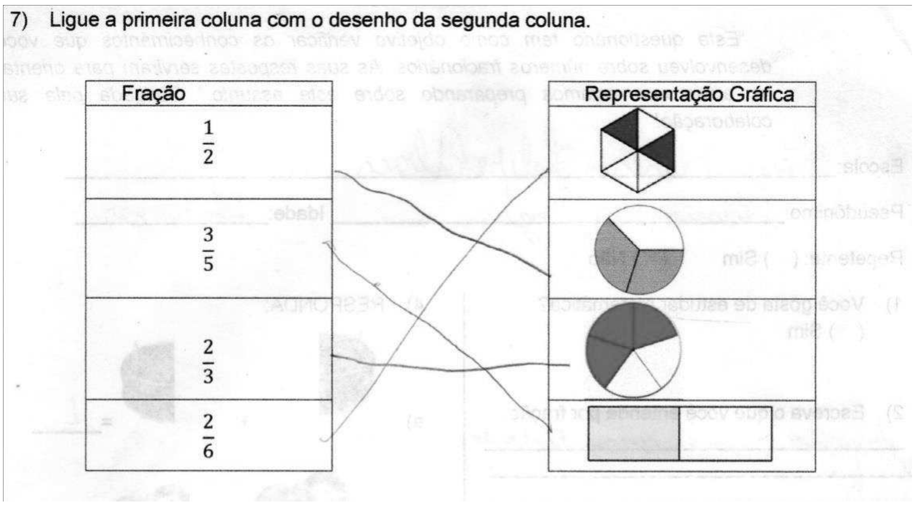


Figura 8 – Questão 7 do Pré-teste Colégio A

[8] "Vitória comprou uma barra de chocolate, então sua amiga Isabela pediu para que ela a dividisse ao meio e cada uma comeria ½ da barra de chocolate. Vitoria respondeu que iria dividir o chocolate em quatro partes e cada uma comeria 2 pedaços. Então Isabela concordou, dizendo que elas comeriam a mesma quantidade de chocolate". Isabela estava certa ao afirmar que elas comeriam o mesmo tanto de chocolate? Pois a proposta inicial de Isabela era dividir o chocolate meio a meio.

De acordo com a representação da figura 8 o aluno conseguiu acertar apenas o correspondente a $\frac{2}{6}$.

Pode-se observar a associação que o aluno fez entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$. Sua explicação foi "*duas partes sem pintar e três pintadas* = $\frac{2}{3}$".

A Questão 8 consistia em comparar as Frações utilizando os sinais de maior, menor ou igual (> , < e =). As respostas em branco totalizaram 3. A maioria dos alunos errou a questão, se não total, parcialmente, pois eram 8 quesitos.

Mais uma vez, tem-se Erro na Interpretação de Texto Não Verbal e/ou Erros Conceituais. Poder-se-ia afirmar que se trata de erro de interpretação visual, onde o aluno raciocina que $\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} > \frac{3}{5}$ e $\frac{1}{2} < \frac{3}{6}$. No entanto, os Erros Conceituais, nesse caso, são devidos à confusão com os sinais, pois os alunos, além de não conhecerem as Frações (pois se conhecessem, saberiam que Frações Equivalentes são iguais), não sabiam distinguir os sinais de Maior, Menor ou Igual.

Para que os alunos acertassem a Questão 8, talvez lhes tenha faltado a sugestão de associar o sinal de menor (<) com o número 4, e o sinal de maior (>) com o número 7. Mas, questiona-se: que sugestão poderia ser dada para que o aluno identificasse, nas representações gráficas, que $\frac{1}{4}$ não é igual a $\frac{1}{3}$, como respondeu um aluno. Talvez, pegar uma régua e medir?

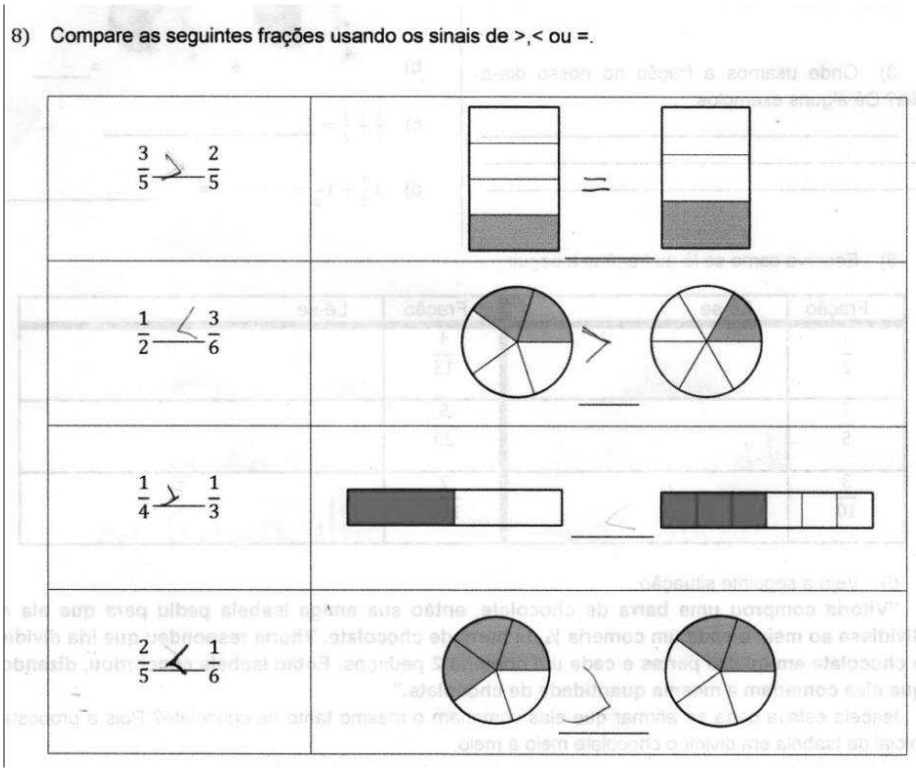


Figura 9 – Questão 8 do Pré-teste Colégio A

Os resultados das questões objetivas podem ser melhor visualizados no Quadro 6.

Quadro 6 – Resultados obtidos no Pré-Teste – Colégio A

Questão	Totalmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Não respondeu
2	2	6	3	2
3	3	1	6	3
4	1	1	11	-
5	1	3	6	3
6	2	3	6	2
7	11	-	2	-
8	0	10	1	2

Numa avaliação quantitativa e mais superficial, observa-se que apenas a questão 7 obteve um grande número de respostas totalmente corretas e, a questão 4 foi a que mais gerou erros, sendo respondida de forma incorreta por 11 dos 13 alunos respondentes do questionário prévio.

No Colégio B, os procedimentos foram idênticos aos do Colégio A. A aplicação do Pré-teste também ocorreu no 3.º Encontro e os resultados estão expressos no Quadro 7.

Quadro 7 – Resultados Obtidos no Pré-Teste – Colégio B

Questão	Totalmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Não respondeu
2	1	-	10	7
3	5	8	4	1
4	1	10	7	-
5	1	9	8	-
6	1	3	9	5
7	16	2	-	-
8	-	7	11	-

Na segunda questão, a maioria dos alunos do Colégio B simplesmente confessou que não entendia nada sobre Fração, nos seguintes termos: "*eu não entendo muito sobre fração*"; "*entendo um pouco*"; "*Nada*"; "*Poriquanto nada*"; "*Nada*"; "E*u aprendi mas eu me esqueci*"; "*Não sei*"; "*Nada*"; "*Eu não entendo nada de fração*" [*sic*]. Um aluno assim se expressou: "*Quando é vamos supor 6 quadrados pinto 4 vai ser eu pinto e decho em Branco*" [*sic*]. Assim, mais de 55% responderam de forma incorreta e aproximadamente 38% dos alunos deixaram de responder à

Questão 2. Apenas um respondeu de forma Totalmente Correta. Assim os erros, na Questão 2, configuraram-se como Erros Conceituais.

A terceira questão indagava onde são usadas as Frações no dia a dia. Cinco alunos responderam corretamente; 8, de modo parcialmente correto; 1 não respondeu. Quatro responderam incorretamente. Para um aluno do Colégio B, as Frações são utilizadas nas seguintes ocasiões: "*Calendário andando de carro pençando etc*" [*sic*]; para outro, são utilizadas nas "*empresaz*" [*sic*]. Um aluno confessou: "*não sei*"; outro, mais otimista, respondeu: "*Porinquanto não sei*" [*sic*]. 8 responderam de forma Parcialmente Correta, por exemplo: "*para dividirmos as coisas*", pois esqueceu que as Frações também são usadas para adicionar, multiplicar ou diminuir "*as coisas*". Também nessa questão, tem-se Erros Conceituais, ou seja, erros com relação ao entendimento do conceito de Fração, estudado pelos alunos na Atividade 1.

Na Questão 4, sobre o conhecimento avaliado era a Adição de Frações, todos os alunos responderam; 7 alunos responderam de forma incorreta, ou seja, praticamente 40% deles não conseguiu entender que as duas metades de um bolo formavam um bolo inteiro: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ inteiro. Tampouco compreenderam que uma maçã e meia mais uma maçã e meia totalizam 3 maçãs, ou seja, $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$ inteiros; 10 alunos responderam a questão de forma parcialmente correta, pois quando conseguiam interpretar as figuras, detinham-se na representação das Frações e muitos responderam que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Faltou-lhes também o entendimento do conceito de Simplificação (ou equivalência), que caracterizou também um Erro Conceitual nessa questão, além Erro na Interpretação de Texto Não Verbal (4ª e 4b) e de Erros no Tratamento dos Números Racionais (4c e 4d).

Esses 'achados' estão de acordo com a investigação Melo e Andrade (2014) realizada com alunos de 6º. Ano. Os autores constataram dificuldades como a má formação do conceito de Fração, erros em operações fundamentais com números inteiros, não identificação do MMC, erros em problemas envolvendo adição e subtração com números racionais, em sua forma fracionária, e na interpretação de problemas.

A Questão 5 avaliava a leitura/escrita de números fracionários. Apenas um aluno respondeu de forma Totalmente Correta. Mais de 44% dos alunos cometeram Erro na *Lecto* Escrita de Números Fracionários, respondendo, por exemplo, que $\frac{1}{2}$ lê-se: "*três ineis*"; "*um terço e dois imeio*"; "*um dois avos*"; "*um dois alvos*"; "*Um inteiro*"; "*um terço e dois inteiros*" [*sic*] ou simplesmente "*um*" [*sic*]. Outros dois estudantes confessaram: "*Não Lembro*"; e um afirmou: "*Não sei*", não só para essa Fração, mas também para todas as demais.

É interessante destacar alguns resultados originais na escrita da Fração $^4/_{13}$: um aluno somou denominador e numerador da Fração $^4/_{13}$ e escreveu: "*desessete ineis*" [*sic*]; outros escreveram:

"*quatro terço e treis inteiro*"; "*quarto terço e treze inteiros*"; "q*uatro dez terços*"; "*Quatro trese alvos*"; "*quatro treze*" [*sic*]. Pode-se classificar esses erros como Erros Conceituais, pois indicam o desconhecimento dos conceitos de "terço", "avos", "números decimais[9]" e "inteiro".

Quanto ao caso dos "*desessete ineis*" [*sic*], pode-se afirmar que é um erro construído pelo aluno, um saber dele, pois, para escrever $^5/_{20}$ também somou 5 + 20 e respondeu: "*vinte sinco ineis*" [*sic*]. Cabe recordar aqui a afirmação de Cury (2007): "o erro não é um desconhecimento, mas sim um conhecimento, um saber construído pelo aluno". O professor precisa intervir, desestabilizar as certezas do aluno para que ele questione suas próprias respostas.

Sobre a Questão 6, que era um problema-história, constatou-se 9 respostas incorretas, ou seja, 50% dos alunos do Colégio B revelaram não possuir a mínima noção de Frações equivalentes para poder entender que, dividir uma barra de chocolate ao meio e repartir meio a meio com duas meninas, é o mesmo que dividi-la em quatro partes e repartir igualmente. Além do mais, 5 alunos não responderam e 3 responderam de forma parcialmente correta, ou seja, responderam "*sim*" mas não justificaram sua resposta. Somente um aluno respondeu corretamente. Mais uma vez, trata-se de um Erro Conceitual e também Erros Relacionados aos Procedimentos para a RP, inclusive a ausência de resposta ao problema.

A Questão 7 era extremamente fácil, mas 2 alunos não conseguiram ligar corretamente as Frações às suas representações gráficas. Esses erros configuram-se como Erros na Interpretação de Texto Não Verbal (EITNV).

A última questão, objetiva, era parcialmente fácil, pois parte envolvia representações gráficas e a outra, para usar os símbolos <, > ou =. Nenhum aluno acertou todas as 8 questões dessa pergunta. A maioria dos alunos respondeu de forma Parcialmente Correta, e 8 responderam de forma Incorreta. Os erros podem ser atribuídos à falta de domínio dos sinais e também do desconhecimento do conceito de Frações Equivalentes, pois alguns colocaram sinal de maior, ou menor, entre duas Frações Equivalentes. São, portanto, Erros Conceituais e, também, Erros na Interpretação de Texto Não Verbal.

Para VALERA, (2003, p. 68), esse erro (no uso dos sinais) "diz respeito à comparação entre os racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ ".

Do quarto ao nono encontro (a seguir), estão retratadas as atividades desenvolvidas nos colégios A e B (simultaneamente).

O quarto encontro.

9 A Questão continha a fração três décimos, que foi escrita como "*três dez avos*", "*treis dez alvos*"; "t*rês terços e 10 inteiros*" [*sic*]. Também, a fração sete centésimos recebeu diferentes versões.

No quarto encontro, em ambos os colégios, ocorreu o primeiro contato dos alunos com o *PhET,* na simulação “Intro a Frações”.

A Figura 10 apresenta a interface da simulação abordada nesta aula. De início, os alunos mostraram-se entusiasmados por terem ido ao Laboratório de Informática. Ao chegarem, os computadores já estavam ligados e com o *PhET* aberto, foi entregue então a Atividade 1 (Apêndice 3) cujo objetivo era que o aluno fosse capaz de definir Fração e explicar o significado do numerador e do denominador. Nesta atividade o primeiro item, solicitou que, durante aproximadamente 20 minutos, os alunos apenas explorassem as funções da simulação. Todos dispenderam mais tempo na aba “monte uma fração” (Figura 10), e exploraram por alguns minutos as outras abas.

Figura 10 – Interface da simulação Intro a Frações e aba Monte uma Fração

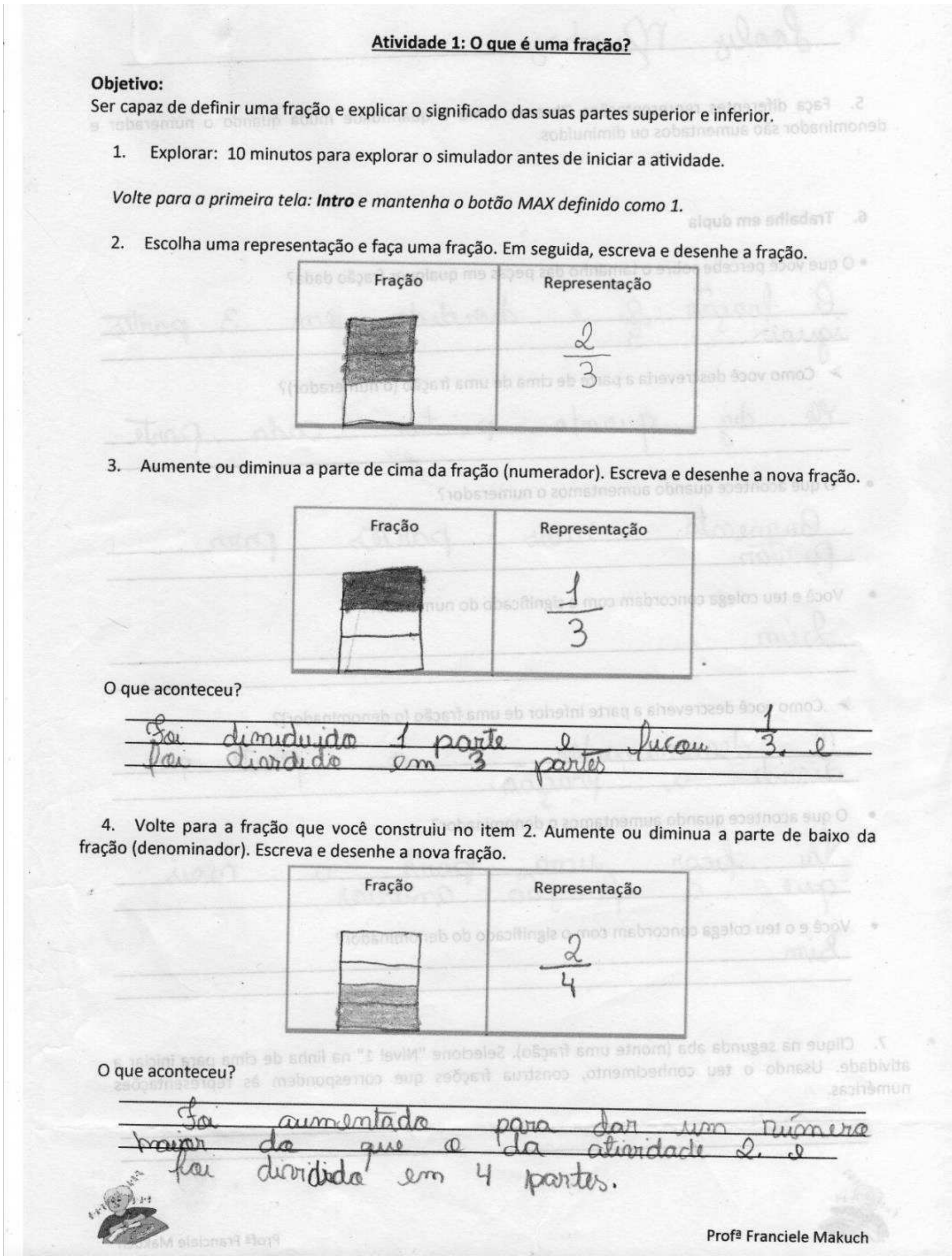
FONTE: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/fractions-intro

Após esse contato, solicitou-se aos alunos para discutirem as características encontradas durante a exploração do *PhET*. Apenas dois alunos se sentiram à vontade para explicar os atributos encontrados, por eles, sobre as Frações durante a experimentação.

Os exercícios 2, 3, 4, 5 e 6 (Apêndice 3) foram abordados inicialmente em duplas ou trios, e resolvidos com o auxílio do *PhET*. Em seguida foram socializadas as conclusões obtidas, por "equipe", com a turma. Todos conseguiram descrever corretamente o que era a parte de cima da Fração, o Numerador, e a parte de baixo da Fração, o Denominador.

Com a simulação os alunos mostraram-se mais confiantes ao responder, quando questionados sobre o que aconteceria se aumentássemos/diminuíssemos a parte superior/inferior de uma Fração. Em todos os momentos de socialização, expressaram a necessidade de realizar representações geométricas, para poder visualizar as situações envolvendo números fracionários.

A Figura 11, a seguir, mostra parcialmente a Atividade 1, desenvolvida pelo aluno A do Colégio A.



Atividade 1: O que é uma fração?

Objetivo:
Ser capaz de definir uma fração e explicar o significado das suas partes superior e inferior.

1. Explorar: 10 minutos para explorar o simulador antes de iniciar a atividade.

Volte para a primeira tela: ***Intro*** *e mantenha o botão MAX definido como 1.*

2. Escolha uma representação e faça uma fração. Em seguida, escreva e desenhe a fração.

Fração	Representação
	$\frac{2}{3}$

3. Aumente ou diminua a parte de cima da fração (numerador). Escreva e desenhe a nova fração.

Fração	Representação
	$\frac{1}{3}$

O que aconteceu?

Foi diminuido 1 parte e ficou $\frac{1}{3}$. e foi dividido em 3 partes

4. Volte para a fração que você construiu no item 2. Aumente ou diminua a parte de baixo da fração (denominador). Escreva e desenhe a nova fração.

Fração	Representação
	$\frac{2}{4}$

O que aconteceu?

Foi aumentado para dar um número maior do que o da atividade 2. e foi dividida em 4 partes.

Profª Franciele Makuch

Figura. 11 – Atividade 1 desenvolvida pelo aluno A do Colégio A

O (a) Aluno(a) 1 atingiu o objetivo desta atividade, dividiu corretamente as figuras em partes iguais e mostrou ter entendido o conceito de numerador e denominador, conforme apresentada na Figura 11 e nas demais questões (5 a 7), constantes no verso.

O uso do *PhET* nesta atividade correspondeu 100%, este foi a ferramenta utilizada durante a atividade para se estabelecer o conceito de Frações.

O Quinto encontro.

Devido ao período de greve considerou-se necessário, no quinto encontro, proceder a uma retomada do conteúdo, com base na apostila elaborada (Apêndice 4). A finalidade foi trazer algumas curiosidades sobre as Frações e explorar a leitura das Frações, além de retomar as ideias já exploradas anteriormente pelos alunos. O *PhET* foi utilizado pelos alunos a fim de verificar as ideias apresentadas no material e por meio da segunda aba da simulação Intro a Frações, pudessem por em pratica as ideias já estabelecidas (Figura 10), que corresponde a Montar uma Fração, há 10 níveis, cujo desafio é preencher as caixas à direita, alguns desafios são numéricos e outros de imagens. A Figura 12 explana o nível 6 da referida aba.

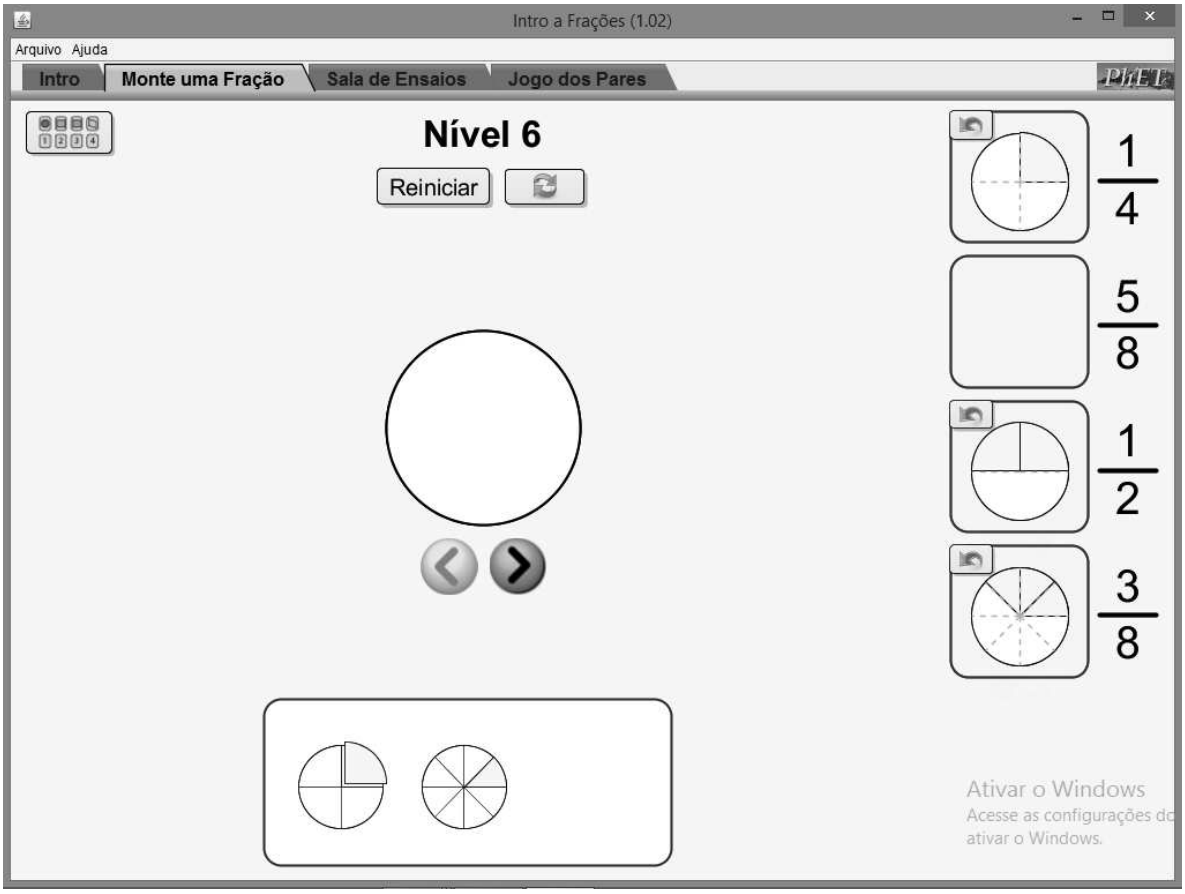


Figura 12 – Nível 6, aba Monte uma Fração

FONTE: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/fractions-intro

Nesta aula foi dado o enfoque à RP, e iniciou-se com as seguintes perguntas: *O que é um problema matemático?*

Quando tentaram responder à pergunta, todos os alunos, de certa forma, apresentaram como resposta um exemplo de problema matemático. "*Quando estamos no mercado e precisamos comprar algo e temos certa quantia de dinheiro, será que essa quantia seria suficiente?*"

A partir da explanação dos alunos sobre "o que é um problema matemático?", formalizou-se a ideia de que um problema matemático corresponde a qualquer tarefa ou atividade para a qual não havia caminhos predeterminados ou regras memorizadas. Essa conclusão é similar ao pensamento de Polya (1987, p. 1-2) que assim define a RP:

> Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.

Os alunos também concluíram que era preciso encontrar alguns procedimentos para resolver os problemas matemáticos. Desse modo, foram gerados os seguintes procedimentos para a resolução dos problemas:

Quadro 8 - Procedimentos para a RP

1. Ler atentamente o problema, certificando-se de que compreendeu todo o texto apresentado.
2. Fazer uma segunda leitura, destacando os dados que o problema apresenta e a pergunta.
3. Verificar se os dados são suficientes para resolver o problema.
4. Buscar por estratégias que possibilitem a solução. Essas estratégias podem ser: desenhos, esquemas, algoritmo, cálculo mental, entre outros. Seja qual for a estratégia escolhida, deve-se registrá-la, para que possa socializar em um próximo momento (esta foi a orientação).
5. Voltar ao enunciado e verificar se a resposta obtida é coerente com o contexto.
6. Verificar qual foi a pergunta feita e dar a sua resposta ao problema.

Essas orientações coadunam com as quatro fases da RP apresentadas por Polya (*apud* LEBLANC, PROUDFIT & PUTT, 1987): a) compreender o problema; b) conceber um plano; c) implementar o plano e d) fazer um retrospecto.

O Sexto encontro.

No sexto encontro, iniciou-se o trabalho com a RP revendo os passos para a resolução. Enfatizou-se que o importante era a estratégia utilizada para se chegar à solução, e que os processos deveriam estar todos registrados, pois seriam utilizados no momento de socialização das ideias.

Os alunos trabalharam em duplas e trios, utilizando o *PhET* quando julgavam ser necessário, sendo que este caracterizou-se pelos alunos como uma ferramenta auxiliadora na resolução dos problemas. Percebeu-se que os alunos apresentavam grande dificuldade para interpretar os enunciados das questões. Manifestaram a vontade de fazer uma operação de Adição/Subtração/Divisão/Multiplicação, sem analisar o que o problema realmente queria dizer. Nesse momento, a professora-pesquisadora interviu, procedendo às explicações necessárias e enfatizando a importância de se respeitar as etapas da RP.

Durante as resoluções dos problemas apresentados aos alunos dos Colégios A e B (Quadro 9), a professora-pesquisadora buscou motivar os alunos e procurou sempre fazer com que todos estivessem envolvidos com a aula, de modo participativo. A esse respeito, Bana e Nelson (1977, p. 278 *apud* SUYDAM, 1987, p. 61) pontuam que:

> [...] a baixa taxa de êxito de alunos que respondem impulsivamente sugere que os professores não devem apressar as respostas das crianças; ao contrário, eles deveriam incentivá-las a refletirem sobre cada problema e, dessa forma, fornecer mais oportunidade para enfrentar distrações.

Quadro 9 – Problemas apresentados aos alunos

Problemas:
1. Uma semana tem 7 dias. Que fração da semana 3 dias representam? 2. Numa prova havia 20 questões e Lucas errou 4 delas. Que fração da prova representa as questões que Lucas errou? 3. Leandro ganhou uma barra de chocolate muito grande e por isso resolveu dividi-la em 8 pedaços de mesmo tamanho e comer 1 pedaço por dia. Se até hoje Leandro comeu 5 pedaços, que fração da barra representa o pedaço que Leandro ainda não comeu? 4. Uma corrida de fórmula 1 tem um total de 56 voltas. Um piloto percorreu $\frac{5}{8}$ do total de voltas e abandonou a prova por defeito mecânico em seu carro. Em que volta isso ocorreu? 5. Uma classe tem 35 alunos. Num dia de muito frio, faltaram $\frac{3}{7}$ dos alunos. Quantos alunos faltaram? Qual a fração que representa a quantidade de alunos presentes em relação ao total de alunos da classe? 6. Tereza comprou 52 bolinhas de gude para distribuir entre seus dois sobrinhos. Emanuel, o sobrinho mais velho, recebera três quartos das bolinhas de gude e João, o sobrinho mais novo, recebera o restante. Quantas bolinhas João irá ganhar? 7. Fabíola está lendo um livro de ficção que contém 60 páginas. Tendo lido $\frac{2}{3}$ do livro, quantas páginas ainda faltam para ela concluir a leitura?

Esses problemas relacionam histórias que fazem parte do cotidiano dos alunos. A estratégia de contar histórias foi muito utilizada por George Polya: “Polya frequentemente usa histórias para introduzir seus problemas. Trata-se de um recurso para envolver os alunos com o problema” (DEGUIRE, 1997, p. 100). Conforme Davis e Mckllip (1997, p. 125), “[...] o principal objetivo da resolução de um problema-história é analisar a situação e selecionar as operações apropriadas”. Segundo os autores, duas estratégias podem ser conjugadas para a resolução de problemas-história: “O método de tentativa-e-erro, quando organizado, é uma estratégia poderosa para a resolução de problemas-história. Estimula a análise e atenua a pressão para se obter a resposta correta imediatamente” (DAVIS & MCKLLIP, 1997, p. 125).

Também foram utilizados problemas simples e problemas de livros didáticos. Como afirma Butts (1987, p. 32), “o verdadeiro prazer em estudar Matemática é o sentimento de alegria que vem da resolução de um problema – quanto mais difícil o problema, maior a satisfação”. No entanto, iniciou-se com problemas mais simples, para que os alunos obtivessem êxito na sua resolução. São problemas simples, como recomendam Davis e Mckillip (1997, p. 115): “Descarte qualquer consideração sobre série e comece com problemas muito fáceis. Proponha ou passe problemas simples, que todas as crianças, em seu grupo, possam resolver”. A Figura 13 mostra os alunos do

Colégio A resolvendo esses problemas com o *PhET Simulation*.

Figura 13 – Alunos do Colégio A trabalhando no Laboratório de Informática

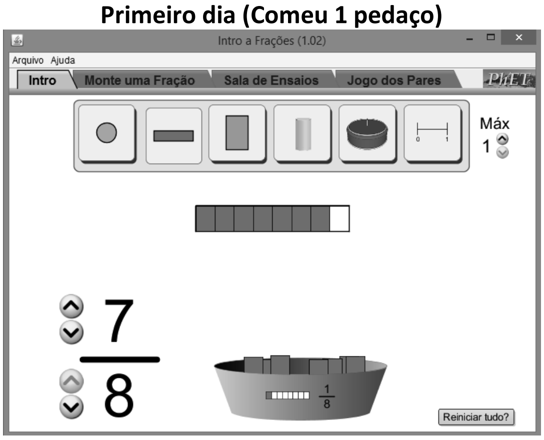
FONTE: Arquivo da autora

A utilização do *PhET* além de ferramenta auxiliadora na resolução dos problemas, também apresentou-se durante a socialização das estratégias utilizadas para a resolução, como é apresentado no quadro 10, as equipes mostraram suas estratégias de resolução dos problemas utilizando o *PhET* para ilustrar suas ideias.

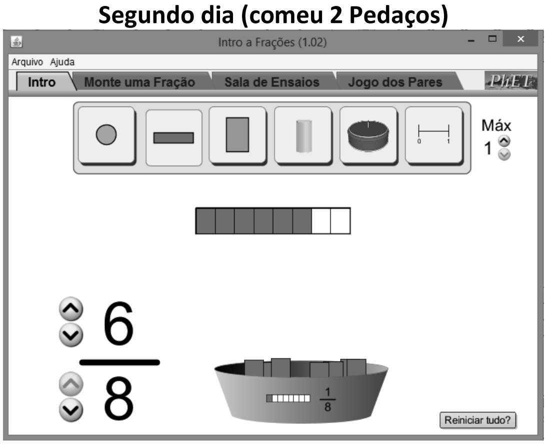
Quadro 10 – Estratégia utilizada para a socialização da resolução da questão 3.

Problema 3 – Leandro ganhou uma barra de chocolate muito grande e por isso resolveu dividi-la em 8 pedaços de mesmo tamanho e comer 1 pedaço por dia. Se até hoje Leandro comeu 5 pedaços, que fração da barra representa o pedaço que Leandro ainda não comeu?

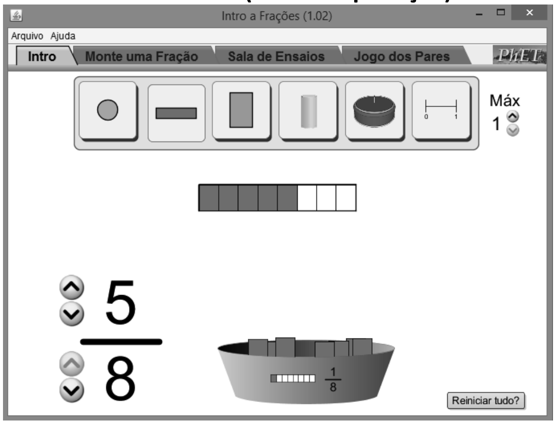
Primeiro dia (Comeu 1 pedaço)



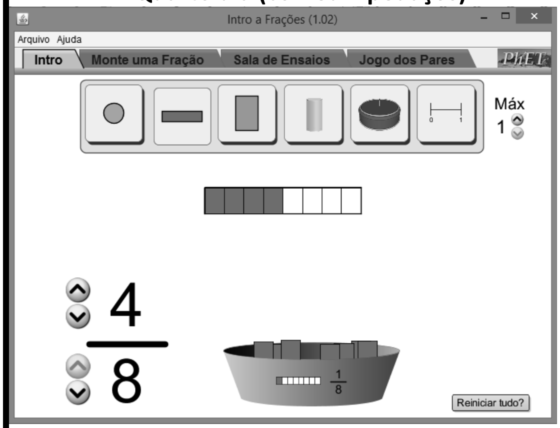
Segundo dia (comeu 2 Pedaços)



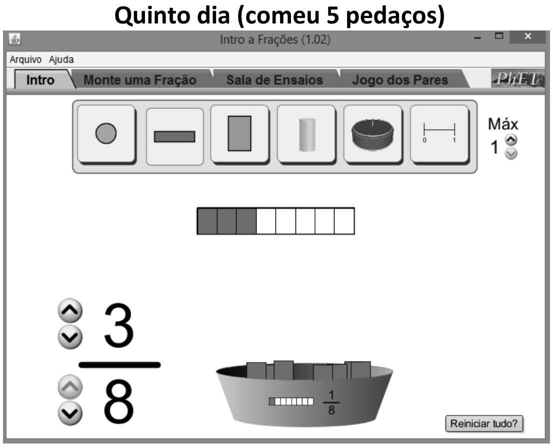
Terceiro dia (comeu 3 pedaços)



Quarto dia (comeu 4 pedaços)



Quinto dia (comeu 5 pedaços)



Resposta: Leandro ainda não comeu $\frac{3}{8}$ da barra de chocolate.

O Sétimo encontro.

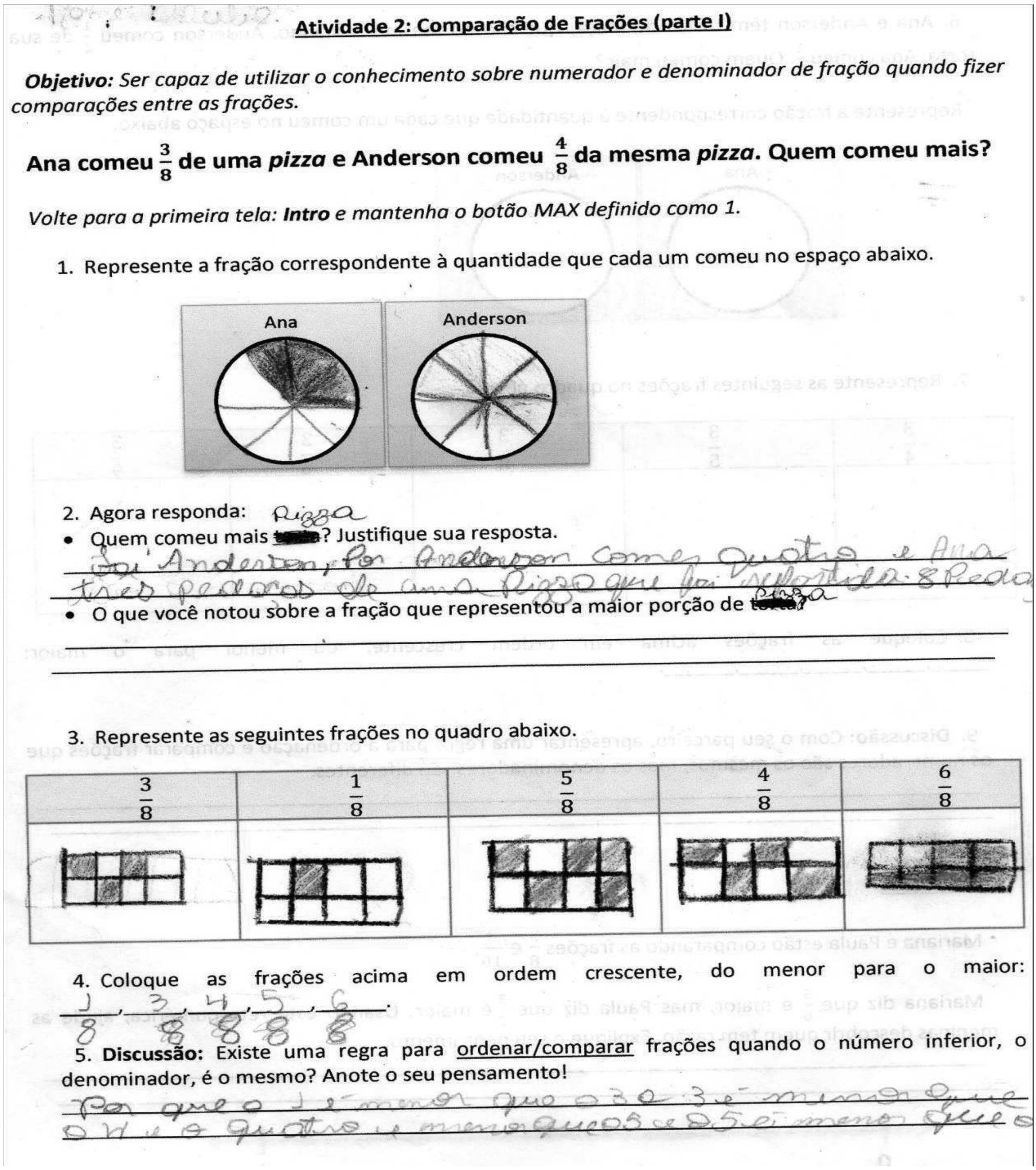
No sétimo encontro iniciou-se a Atividade 2 (Apêndice 5), referente à comparação de Fração (parte I), cujo objetivo era que os alunos fossem capazes de utilizar o conhecimento sobre numerador e denominador quando fizessem comparações entre as Frações.

Essa atividade foi composta por dois problemas. O primeiro problema: "*Ana comeu* $\frac{3}{8}$ *de uma pizza e Anderson comeu* $\frac{4}{8}$ *da mesma pizza. Quem comeu mais?*", objetivava que os alunos pudessem comparar Frações que tivessem o mesmo denominador. Já o segundo problema – "*Ana e Anderson têm tortas de maçã, que são do mesmo tamanho. Anderson comeu* $\frac{1}{6}$ *de sua torta. Ana comeu* $\frac{1}{2}$. *Quem comeu mais?*" – objetivava-se que os alunos pudessem fazer comparações de Frações com o mesmo numerador.

Contatou-se que, todos conseguiram resolver o problema, mas tiveram dificuldades no julgamento sobre a existência de uma regra para comparar/ordenar as Frações. Sabiam ordenar, porém não conseguiam escrever como faziam. Essa dificuldade foi sanada apenas no momento de socialização das informações, em que uma dupla solicitou para fazer a explicação das estratégias utilizadas, e os demais alunos discutiram sobre a solução proposta, e dessa forma conseguiram, colaborativamente, estabelecer os dois conceitos de comparação de Fração.

- Entre duas ou mais Frações de mesmo denominador, será maior a que tiver o maior numerador. Ocorre devido às frações serem divididas em uma mesma quantidade de partes iguais, sendo necessária apenas a comparação entre os numeradores.
- Entre duas ou mais Frações de mesmo numerador, será maior a que tiver menor denominador. Isso acontece porque o denominador indica o número de partes iguais em que o inteiro foi dividido. Assim sendo, aquela que tem um denominador maior representará uma parte menor do inteiro. A Figura 14 mostra o resultado da Atividade 2, desenvolvida por aluno B do Colégio A.

Alguns alunos julgaram desnecessário a utilização do *PhET* para a resolução dos problemas, porém os mesmos utilizaram o *PhET* para conferencia de suas resoluções. Com isso foi possível verificar que os alunos já haviam estabelecido o conceito de frações, o que é o numerador e o que é denominador quando fizeram a comparação de frações.



Atividade 2: Comparação de Frações (parte I)

Objetivo: *Ser capaz de utilizar o conhecimento sobre numerador e denominador de fração quando fizer comparações entre as frações.*

Ana comeu $\frac{3}{8}$ de uma *pizza* e Anderson comeu $\frac{4}{8}$ da mesma *pizza*. Quem comeu mais?

Volte para a primeira tela: ***Intro*** *e mantenha o botão MAX definido como 1.*

1. Represente a fração correspondente à quantidade que cada um comeu no espaço abaixo.

2. Agora responda: Pizza
- Quem comeu mais ~~torta~~? Justifique sua resposta.
foi Anderson, por Anderson comeu quatro e Ana três pedaços de uma pizza que foi repartida 8 Peda
- O que você notou sobre a fração que representou a maior porção de ~~torta~~ pizza?

3. Represente as seguintes frações no quadro abaixo.

$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{8}$

4. Coloque as frações acima em ordem crescente, do menor para o maior:
$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$.

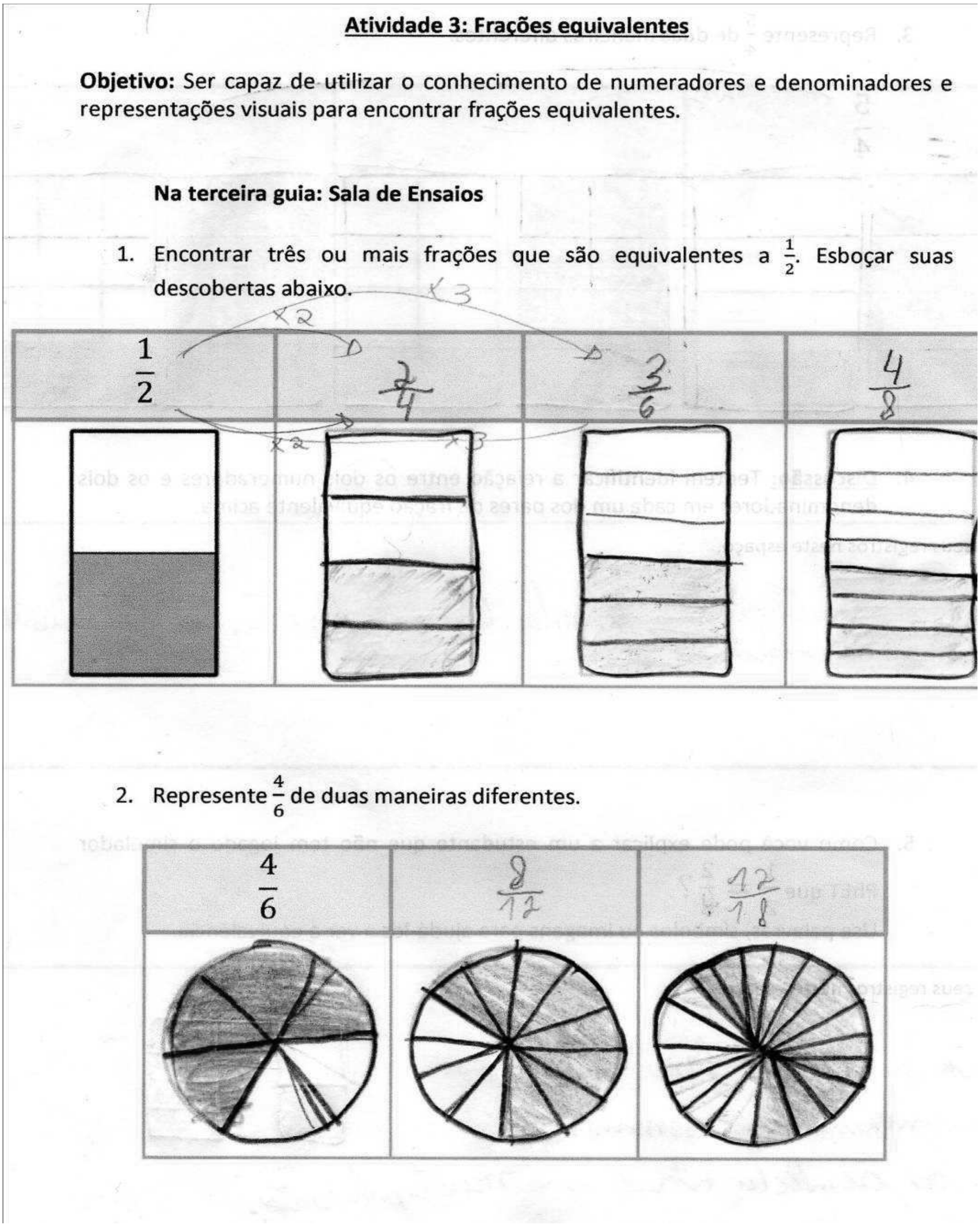
5. **Discussão:** Existe uma regra para <u>ordenar/comparar</u> frações quando o número inferior, o denominador, é o mesmo? Anote o seu pensamento!
Por que o 1 é menor que o 3 o 3 é menor que o 4 e o quatro é menor que o 5 e o 5 é menor que o 6

Figura 14 – Atividade 2 desenvolvida por aluno B do Colégio A

O Oitavo encontro.

A Atividade 3 (Apêndice 6), sobre Frações Equivalentes, teve como objetivo que os alunos fossem capazes de utilizar o conhecimento de numerador, denominador e representações visuais para encontrar Frações Equivalentes.

Essa atividade propôs aos alunos a utilização da terceira guia do *PhET* (Sala de Ensaios), em que se solicitava que esboçassem todas as suas descobertas, conforme exemplificado na Figura 15.



Atividade 3: Frações equivalentes

Objetivo: Ser capaz de utilizar o conhecimento de numeradores e denominadores e representações visuais para encontrar frações equivalentes.

Na terceira guia: Sala de Ensaios

1. Encontrar três ou mais frações que são equivalentes a $\frac{1}{2}$. Esboçar suas descobertas abaixo.

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$

2. Represente $\frac{4}{6}$ de duas maneiras diferentes.

$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{12}{18}$

Figura 15 - Atividade 3 desenvolvida pelo aluno C do Colégio A

A guia Sala de Ensaios permite aos alunos fazer frações do lado esquerdo e ver representações equivalentes do lado direito. Melhor exemplificado na Figura 16.

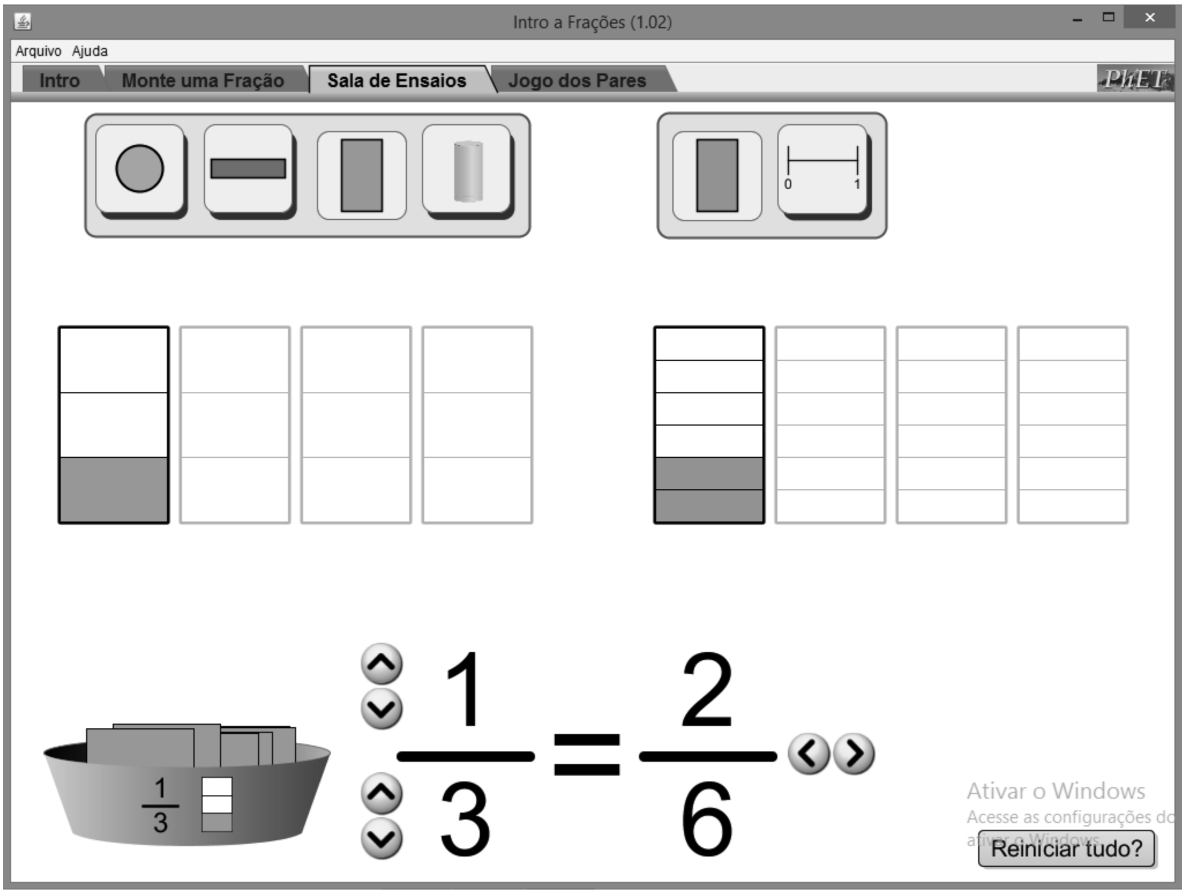


Figura 16 – Sala de ensaios

FONTE: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/fractions-intro

Durante a socialização das informações, os alunos julgaram ter duas explicações diferentes para a obtenção de uma Fração Equivalente. Uma das explicações consistia em multiplicar o denominador e o numerador pelo dobro, ou pelo triplo, ou pelo quádruplo e assim seguia, conforme Figura 17. A outra explicação é que, se deveria adicionar o valor do numerador ao numerador anterior e adicionar o valor do denominador ao denominador anterior, conforme Figura 18.

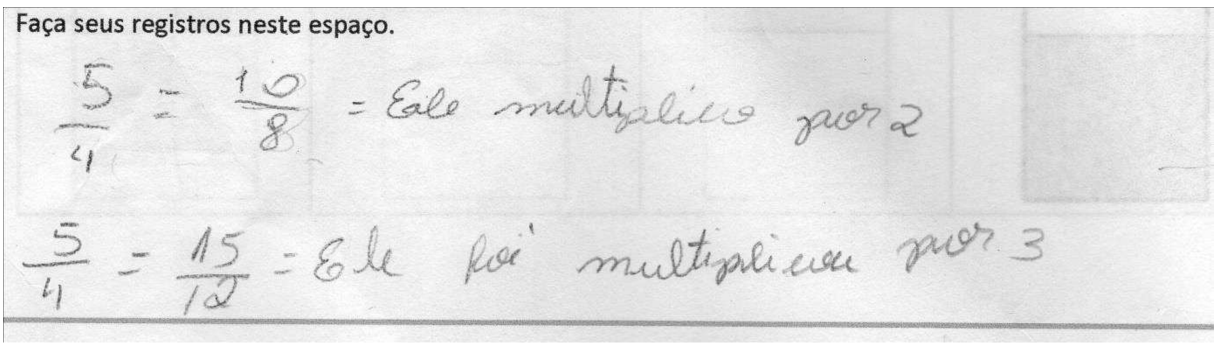


Figura 17 – Questão 4 da atividade 3 desenvolvida pelo aluno D do Colégio B

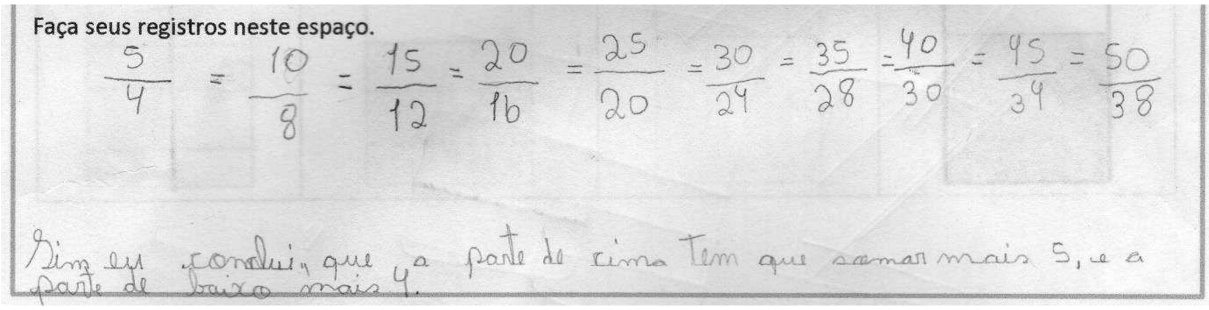


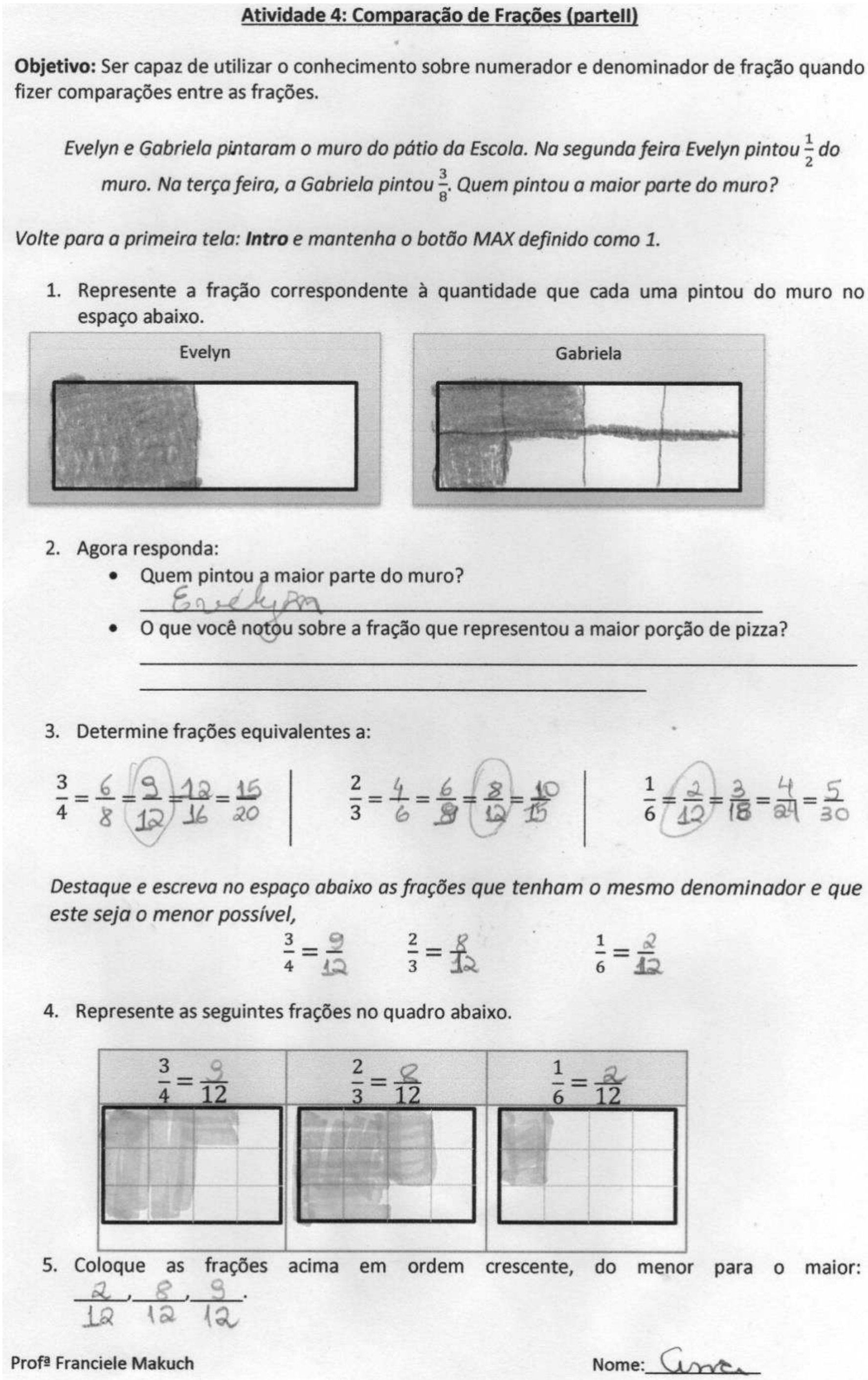
Figura 18 – Questão 4 da atividade 3 desenvolvida pelo aluno E do Colégio B

Os alunos também trabalharam com uma situação-problema, envolvendo Frações Equivalentes.

O Nono encontro.

No nono encontro iniciou-se com a Atividade 4 (Apêndice 7), referente à Comparação de Frações (parte II), cujo objetivo consistia em favorecer a compreensão sobre numerador e denominador de uma Fração quando fizessem comparações entre as Frações. Nessa atividade, o problema inicial foi determinar qual Fração representava a maior porção. *"Evelyn e Gabriela pintaram o muro do pátio da Escola. Na segunda feira Evelyn pintou* $\frac{1}{2}$ *do muro. Na terça feira, a Gabriela pintou* $\frac{3}{8}$*. Quem pintou a maior parte do muro?",* sendo esse problema resolvido pelos alunos com representações geométricas. A professora-pesquisadora questionou os alunos a propósito do que notaram sobre a Fração que representava a maior porção. Os estudantes não conseguiram estabelecer nenhuma relação entre a comparação de duas Frações, com denominadores diferentes. Nessa questão, os alunos que fizeram a representação geométrica de ambas as frações, concluíram ter sido Evelyn quem pintou a maior porção do muro. Percebeu-se, ainda, ser necessário um encaminhamento na estratégia dos alunos, uma orientação, pois esses apresentaram uma dificuldade em estabelecer uma relação de comparação de Frações com denominadores diferentes. Então, solicitou aos alunos que encontrassem algumas Frações equivalentes a $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$, e que destacassem as Frações que possuíam o mesmo denominador e este denominador fosse o menor possível, para isso os alunos utilizaram guia Sala de Ensaios, porém encontraram uma barreira sendo que a simulação apresenta apenas duas frações equivalentes à Fração feita pelo aluno, sendo que neste momento o aluno teve que colocar em pratica seu conhecimento sobre Frações equivalentes. Só então se solicitou que colocassem as Frações $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ em ordem crescente. Todos os alunos conseguiram ordenar as Frações, quando essas tinham o mesmo Denominador

O próximo problema, "*Malu e Ana usam o mesmo tipo de álbum para colar figurinhas. Malu já colou* $\frac{2}{3}$*do total de figurinhas e Ana já colou* $\frac{4}{5}$*. Quem colou mais figurinhas em seu* *álbum*?", consistiu em dizer qual das duas meninas havia colado mais figurinhas em seu álbum. Na resolução desse problema, os alunos, em maioria, não utilizaram o *PhET*, seguiram a ideia de obter a menor Fração, cujo Denominador era comum para então fazer a comparação entre elas. Após esse momento foi indagado se existia uma regra para que pudessem fazer a comparação de Frações com denominadores diferentes. Dos 9 alunos participantes desse encontro, 5 responderam com clareza o que deveria ser feito para comparar as Frações com denominadores diferentes, ou seja, conforme a Figura 19.



Atividade 4: Comparação de Frações (parteII)

Objetivo: Ser capaz de utilizar o conhecimento sobre numerador e denominador de fração quando fizer comparações entre as frações.

Evelyn e Gabriela pintaram o muro do pátio da Escola. Na segunda feira Evelyn pintou $\frac{1}{2}$ do muro. Na terça feira, a Gabriela pintou $\frac{3}{8}$. Quem pintou a maior parte do muro?

Volte para a primeira tela: ***Intro*** *e mantenha o botão MAX definido como 1.*

1. Represente a fração correspondente à quantidade que cada uma pintou do muro no espaço abaixo.

Evelyn

Gabriela

2. Agora responda:
   - Quem pintou a maior parte do muro? Evelyn
   - O que você notou sobre a fração que representou a maior porção de pizza?

3. Determine frações equivalentes a:

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}$ | $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}$ | $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{3}{18}=\frac{4}{24}=\frac{5}{30}$

Destaque e escreva no espaço abaixo as frações que tenham o mesmo denominador e que este seja o menor possível,

$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$

4. Represente as seguintes frações no quadro abaixo.

$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$	$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$	$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$

5. Coloque as frações acima em ordem crescente, do menor para o maior: $\frac{2}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$.

Profª Franciele Makuch Nome: Ana

Figura 19 - Atividade 4 desenvolvida pelo aluno F do Colégio A

Após a resolução da atividade, onde nem todos os alunos conseguiram finalizar todos os exercícios dentro do tempo estipulado para a resolução (1,5 hora/aula), procedeu-se à socialização das estratégias utilizadas e a formalização do conceito e da regra estabelecida para que pudessem comparar Frações de Denominadores diferentes.

A socialização aconteceu de maneira tranquila, pois todos os alunos que haviam conseguido criar uma regra para a comparação de Frações com denominadores diferentes, concluíram que bastava encontrar Frações Equivalentes, às dadas inicialmente, e que tenham o mesmo Denominador, e depois utilizar a ideia de Comparação de Frações com mesmo Denominador (ATIVIDADE 2). Não houve necessidade de que todos os grupos apresentassem, os alunos que não haviam concluído passaram a compreender melhor após a explicação da estratégia adotada pelos colegas.

Como a ideia da SAAM é trabalhar com conteúdos vistos em anos anteriores, finalizou-se o trabalho com o conteúdo de Frações no Colégio A, a pedido da professora da SAAM que é a professora regente dos sextos anos.

O Décimo encontro.

O décimo e último encontro no Colégio A foi destinado ao preenchimento do Questionário Pós (Apêndice 2). Participaram 12 alunos. Neste questionário, iniciou-se com as questões objetivas, e foram acrescentadas mais três questões, a título de avaliação dos métodos utilizados. Assim, a Questão 1 do Pós-Teste corresponde à Questão 2 do Pré-Teste, e assim sucessivamente. Ou seja, no Pré-Teste a Questão 1 era subjetiva ("Você gosta de estudar Matemática?") e no Pós-Teste ela foi eliminada.

A Questão 1 ("*Você sabe o que é Fração*?") indicou que os alunos conseguiram construir um conceito de Fração: 9 alunos responderam de modo totalmente correto. Apenas 2 deixaram de responder, e um respondeu de forma parcialmente correta – "*Fração é aquela que e numerador e denominador*" [*sic*]. Pode-se dizer que as atividades desenvolvidas após o Pré-Teste contribuíram na elaboração do conceito de Frações, pelos alunos, mas 3 alunos persistiram nos Erros Conceituais.

Na Questão 2, ("*Onde usamos Fração no nosso dia a dia? Dê exemplos*.") observou-se que alguns alunos mudaram suas posições, principalmente aqueles que relacionaram Frações com contagem de dinheiro e com pagamento de conta, no Pré-teste. Um aluno não respondeu; 6 responderam de forma totalmente correta; 4 responderam de forma parcialmente correta; e 1 respondeu de forma incorreta ("*nas golozemas*" [*sic*]). Persistiu, portanto, um Erro Conceitual.

A Questão 3, que solicitava o somatório de frações, apresentou algumas melhoras em relação ao Questionário Prévio, pois apresentaram avanço na compreensão do conceito: 3 alunos responderam de forma Totalmente Correta; 4, de forma Parcialmente Correta; e 5, incorretamente. Persistiu a falta de observação atenta das imagens, gerando Erros na Interpretação de Texto Não Verbal e Erros no Tratamento de Números Racionais Fracionários (ETNRF), ou seja, erros referentes à tendência de considerar os Racionais como Naturais, uma vez que as imagens não foram interpretadas, tampouco suas respectivas representações. A Figura 20 exemplifica alguns desses erros.

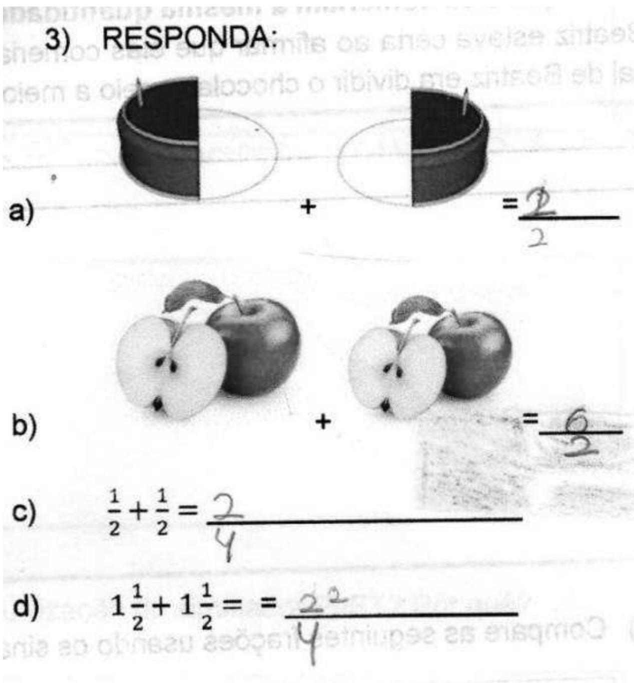
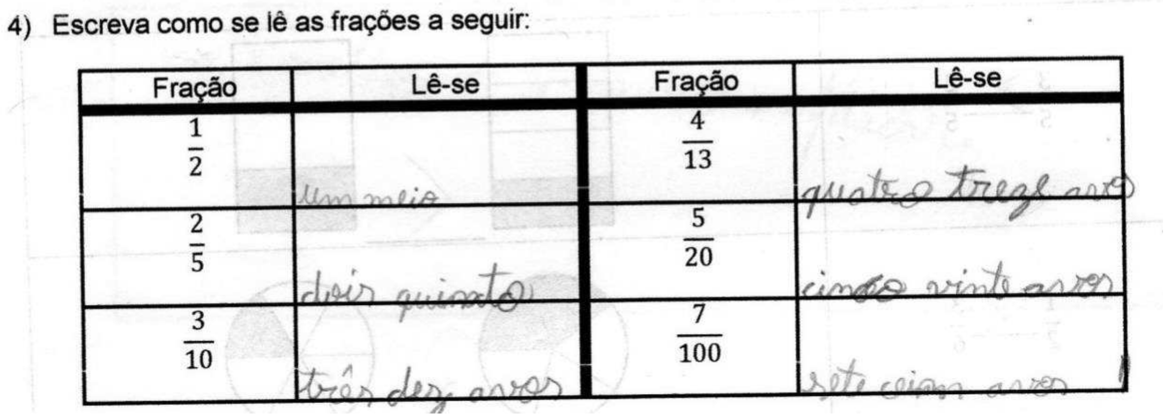


Figura 20 – Resposta de aluno g do Colégio A à Questão 3 Pós Teste

A Questão 4 avaliava a compreensão da leitura/escrita de frações. A avaliação resultou em 6 respostas Totalmente Correta e 6 Parcialmente Correta. As dificuldades ocorreram principalmente na leitura de $\frac{7}{100}$ que resultou em (alguns exemplos): "*sete centos avos*"; "*sete seis avos*"; "*sete cem avos*" [*sic*] (4 respostas, uma das quais é mostrada, na Figura 21). A partir dessa questão não se registraram mais respostas incorretas. Os erros enquadraram-se em Erros Conceituais (desconhecimento dos conceitos de Decimais e Avos) e Erro na *Lecto* Escrita de Números Fracionários.



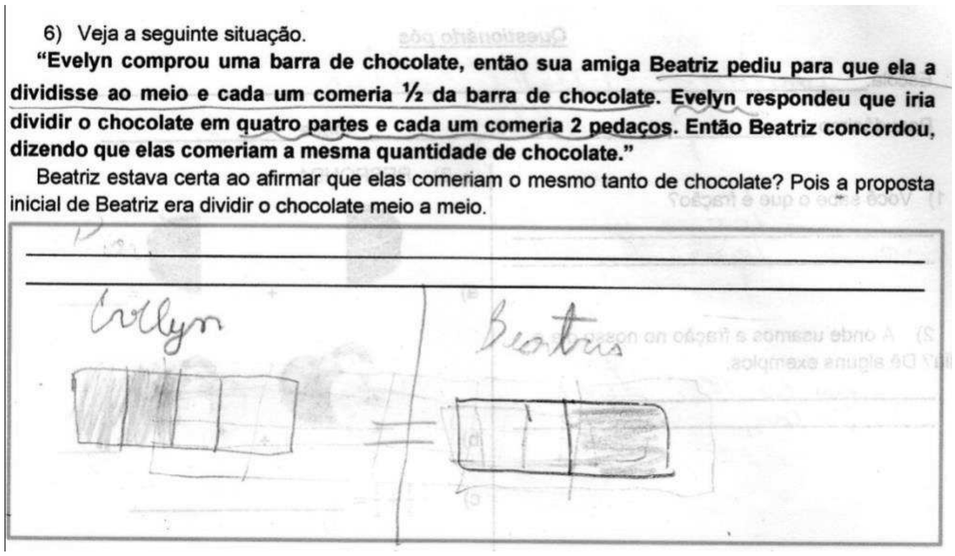
4) Escreva como se lê as frações a seguir:

Fração	Lê-se	Fração	Lê-se
$\frac{1}{2}$	Um meio	$\frac{4}{13}$	quatro treze avos
$\frac{2}{5}$	dois quinto	$\frac{5}{20}$	cinco vinte avos
$\frac{3}{10}$	três dez avos	$\frac{7}{100}$	sete cem avos

Figura 21 – Resposta de aluno H do Colégio A à Questão 4 Pós Teste

O objetivo da Questão 5 foi associar o número fracionário à sua representação gráfica, e todos os participantes da pesquisa conseguiram alcançar essa meta.

A Questão 6 almejava os objetivo específicos da intervenção pedagógica, que consistia em trabalhar com Resolução de Problema. Nessa questão obteve-se 10 respostas Totalmente Correta e apenas 2 Parcialmente Correta. Um(a) aluno(a) respondeu "*Sim porque 2 dividido em partes inguais*" [*sic*]. O outro apenas desenhou, mas não respondeu como mostra a imagem a seguir. Trata-se de Erro Conceitual, relacionado à falta de compreensão das Frações Equivalentes, e também Erros Relacionados aos Procedimentos para Resolução de Problemas, inclusive a ausência de resposta ao problema (Figura 22).



6) Veja a seguinte situação.

"Evelyn comprou uma barra de chocolate, então sua amiga Beatriz pediu para que ela a dividisse ao meio e cada um comeria ½ da barra de chocolate. Evelyn respondeu que iria dividir o chocolate em quatro partes e cada um comeria 2 pedaços. Então Beatriz concordou, dizendo que elas comeriam a mesma quantidade de chocolate."

Beatriz estava certa ao afirmar que elas comeriam o mesmo tanto de chocolate? Pois a proposta inicial de Beatriz era dividir o chocolate meio a meio.

Evelyn Beatriz

Figura 22 – Resposta de aluno I do Colégio A à Questão 6 do Pós Teste

A Questão 7 objetivou avaliar a compreensão dos sinais <, > e =. Houve igual número de respostas Totalmente Correta e Parcialmente Correta. Os erros foram devidos à incompreensão de

Fração Equivalente e também à falta de domínio/compreensão do significado dos sinais – Erro Conceitual e EITNV. Exemplo (Figura 23):

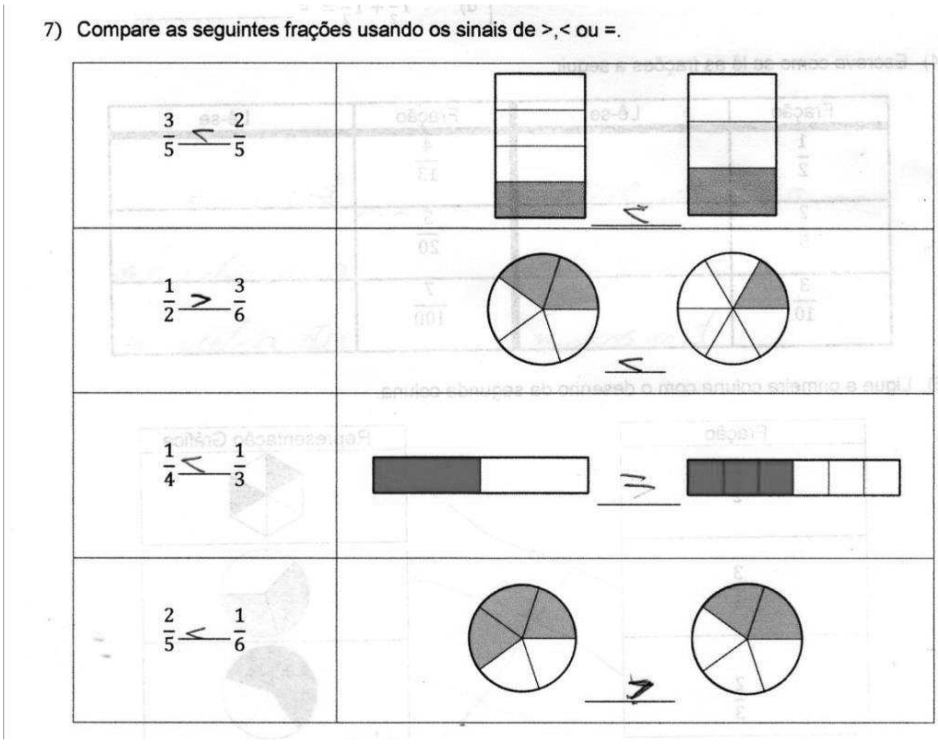


Figura 23 – Resposta de aluno J do Colégio A à Questão 7 do Pós-Teste

Os resultados quantitativos do Pós-teste, segundo a classificação primária adotada, estão expostos no Quadro 11.

Quadro 11 – Resultados obtidos no Pós-Teste – Colégio A

Questão	Totalmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Não respondeu
1	9	1	-	2
2	6	4	1	1
3	3	4	5	-
4	6	6	-	-
5	12	-	-	-
6	10	2	-	-
7	6	6	-	-

Quanto à quantidade apenas, constata-se a grande queda no número de respostas incorretas. Esses resultados finais indicam que os alunos evoluíram em seus conhecimentos, desde o Questionário Prévio até o Pós, passando pelas atividades e simulações no *PhET*. Ainda, em termos apenas quantitativos, o Quadro 12 ilustra as diferenças entre os testes.

Quadro 12 – Resultados comparativos Pré-Teste e Pós-Teste – Colégio A

Questão	Totalmente correta		Parcialmente correta		Incorreta		Não respondeu	
	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T
1	2	9	6	1	3	-	2	2
2	3	6	1	4	6	1	3	1
3	1	3	1	4	11	5	-	-
4	1	6	3	6	6	-	3	-
5	2	12	3	-	6	-	2	-
6	12	10	-	2	1	-	-	-
7	0	6	10	6	1	-	2	-

É interessante observar a queda na quantidade de respostas parcialmente corretas, a grande redução de respostas incorretas, no Pós-Teste, e até mesmo a redução do número de respostas deixadas em branco.

No Colégio B, no décimo encontro foi realizada ainda a Atividade 5 (Apêndice 8), sobre Operações com Frações (Adição e Subtração), conforme as figuras 24 e 25.

Atividade 5: Operações com frações (Adição e Subtração)

Objetivo: Compreender e realizar as operações de adição e subtração com números racionais.

A Prof. Fran resolveu fazer um regime, mas, como sua irmã não sabia, gentilmente deu-lhe um bolo de pote com cobertura de brigadeiro.

Como quase todos os que estão querendo emagrecer, a Prof. Fran disse consigo mesma: "Vou experimentar só um pedacinho!"

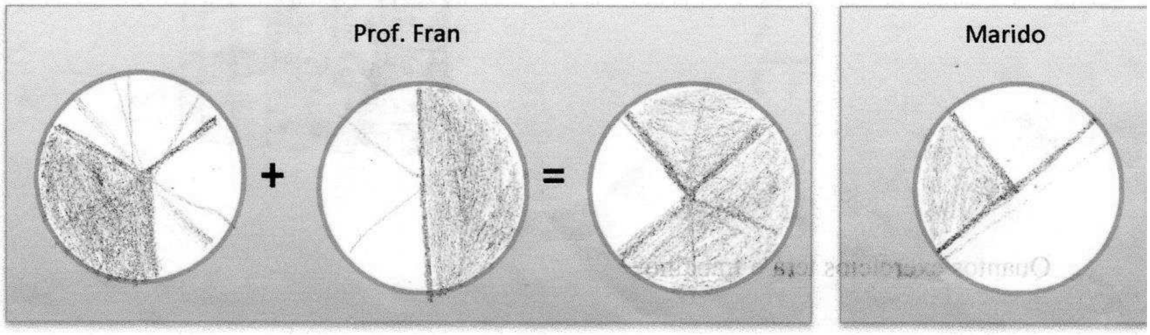
E comeu 1/3 do bolo.

Após meia hora, não resistiu e comeu outro pedaço: 1/2 do bolo!

Para não se sentir tão culpada, "generosamente" ela guardou o que sobrou para seu marido.

Volte para a primeira tela: ***Intro*** *e mantenha o botão MAX definido como 1.*

1. Represente geometricamente a fração correspondente à quantidade de bolo que a Prof. Fran comeu, e a quantidade que deixou para seu marido. Utilize o espaço abaixo.



2. Represente algebricamente a fração correspondente à quantidade de bolo que a Prof. Fran comeu, e a quantidade que deixou para seu marido. Utilize o espaço abaixo.

Prof. Fran	Marido
$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Agora responda:

- *Que fração a Prof. Fran comeu?*
  A prof Fran comeu $\frac{5}{6}$
- *Que fração corresponde à parte que guardou para seu marido?*
  A fração mostra que ela deixou $\frac{1}{6}$ para o marido
- *Você acha que ela foi generosa?*
  Nem pensar

Figura 24 – Atividade 5 lado A, desenvolvida pelo aluno L do Colégio B

$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{8}{28}$ $\frac{10}{}$

Agora é sua vez, não se esqueça dos passos para a resolução de problemas.

1) *A professora de matemática do 7º ano passou uma lista de exercícios para os alunos, e Maria Eduarda, como é muito dedicada, já fez 2/7 do trabalho em um dia e 1/4 no dia seguinte. Nesses dois dias, Maria Eduarda resolveu 45 exercícios.*

Responda ao que se pede.

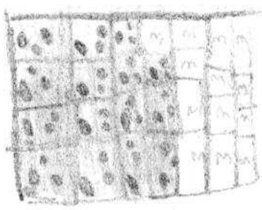
Que fração do trabalho resta para Maria resolver?

$\frac{2}{7} + \frac{1}{4}$

$\frac{10}{28} + \frac{5}{56} = \frac{15}{28} - \frac{13}{28}$

Quantos exercícios faltam para concluir o trabalho?

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$



faltão 39 exercícios

Quantos exercícios terá o trabalho?

$\begin{array}{r} \scriptstyle 2 \\ 28 \\ \times 3 \\ \hline 84 \end{array}$

terá 84 exercícios do trabalho

2) Crie uma situação-problema que seja resolvida da seguinte maneira:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Rodrigo e sua mãe fizeram um bolo e comeram $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

e deu para seu irmão $\frac{3}{6}$

e guardou $\frac{5}{6}$.

Figura 25 – Continuação da Atividade 5, desenvolvida por aluno M do Colégio B

Nessa atividade os(as) alunos(as) trabalharam com 2 problemas e tiveram a oportunidade de inventar um situação-problema, adequada as frações dadas. No trabalho acima, entretanto, a situação não condiz com a resposta apresentada. Por exemplo, a situação poderia ser: “Rodrigo e sua mãe fizeram um bolo e comeram $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Que Fração do bolo (inteiro) isso representa?". Então encontraria o MMC de 3 e 2, resultando em $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

O Décimo primeiro encontro.

O décimo primeiro encontro ocorreu apenas no colégio B, esse encontro foi destinado à socialização das estratégias utilizadas durante a atividade 5.

O Décimo segundo encontro.

O decimo segundo encontro foi destinado ao preenchimento do questionário final. O número de alunos participantes do Questionário Final, no colégio B, reduziu em 55,6%, pois eram 18 alunos no Questionário Pré e apenas 8 responderam ao Pós.

Todas as respostas à Questão 1 do Pós-Teste ("*Você sabe o que é Fração?*") foram consideradas PC, pois os alunos ainda não elaboraram um conceito consistente sobre Frações, persistindo os Erros Conceituais. Porém, a maioria das respostas cita os termos Numerador e Denominador.

Aluno(a) 1: "*o numerador e o denominador o numerador mostra quanto quadrados são*" [*sic*].

Aluno(a) 2: "*O numerador e que tem que pintar as partes e o numerador e para dividir as partes que sobram*" [*sic*].

Aluno(a) 4: "*Numerador e denominador*" [*sic*].

Aluno(a) 6: "*uma divizão formada por denominador e numerador para dividir as coisas*" [*sic*].

Aluno(a) 8: "*Denominador indica cuantos come. Numerador indica cuantos tem*" ém[*sic*].

Como se observa, são respostas inconsistentes, mais relacionadas à forma, o que revela uma compreensão "mecânica" do conteúdo.

Os demais alunos responderam de formas diversas. Para o Aluno(a) 3, "*fração é uma maneira de aprender mais da matemática*". Não deixa de ser uma resposta correta, mas é muito genérica. O Aluno(a) 5 entendeu que "*fração é quando você divide algo*", mas faltou acrescentar "em partes iguais", pois essa é a essência da Fração. A resposta do Aluno(a) 7 é interessante, e também deve ter o seu percentual de verdade: ele(a) simplesmente respondeu "sim".

Pode-se afirmar que esse foi um resultado expressivo, ao levar em consideração o resultado do Pré-Teste, no qual a maioria respondeu de forma incorreta (mais de 55% dos estudantes); cerca de 39% dos alunos deixou de responder a essa e somente um respondeu de forma Totalmente Correta.

A Questão 2 indagava "*Onde usamos a fração no nosso dia a dia? Dê alguns exemplos*". Na questão anterior, todas as respostas não eram TC, persistindo os Erros Conceituais.. A maioria das respostas está relacionada a "comidas":

Aluno(a) 3: "*quando irei comer uma pizza ou um bolo*"

Aluno(a) 4: "*comida e corpo humano*"

Aluno(a) 5: "*quando eu como chocolate e bolo*"

Aluno(a) 7: "*cortar bolos, maças, e outras coisas*"

Aluno(a) 8: "*nas horas do almoço na janta até nos anivercos e pizzarias, bolo, pizza quando formos comer isso*" [*sic*].

A ideia de divisão foi lembrada apenas por 2 estudantes do Colégio B:

Aluno(a) 1: "*quando vamos comer chocolate dividimos*" [*sic*].

Aluno(a) 6: "*para dividir as coisas*" (repetição parcial da questão anterior)

Com desconto, por assim dizer, considerou-se PC a resposta do(a) Aluno(a) 2, que escreveu: "*no horario*" [*sic*]. Conforme abordado (Atividade 1), usa-se a Fração quando se diz, por exemplo, "*um terço de hora*". Com certeza ele lembrou-se dessa utilização, mas não soube se expressar. Provavelmente é o mesmo caso do(a) Aluno(a) 4, que escreveu "*comida e corpo humano*", pois foi abordado como curiosidade (Atividade 1) que "*Cerca de* $\frac{3}{4}$ *do nosso corpo é composto por água*". Então, este estudante poderia ter escrito "para representar a quantidade de água contida no corpo humano", e aquele, "para informar as horas".

A partir da Questão 3 surgem respostas do tipo TC, mas uma resposta é do tipo I (conforme a Figura 26).

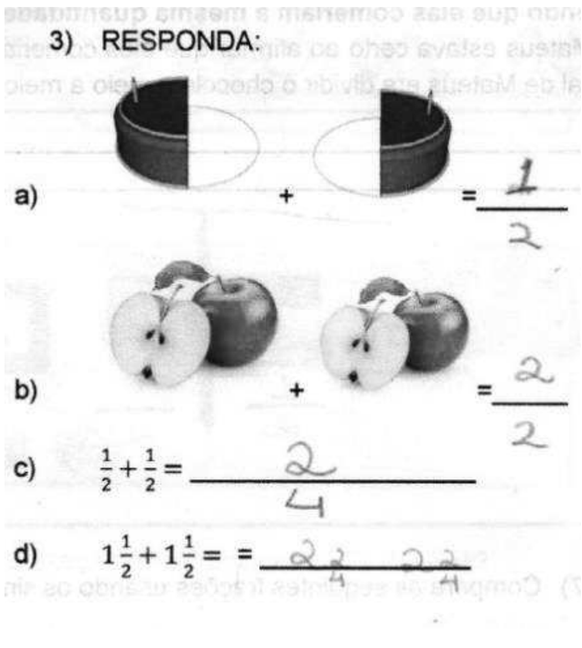


Figura 26 – Resposta Incorreta – Aluno N do Colégio B

As respostas PC decorreram ora de erros na compreensão pictórica (Erro na Interpretação de Texto Não Verbal), ora de erros na soma das Frações (Erros no Tratamento dos Números Racionais). Por exemplo:

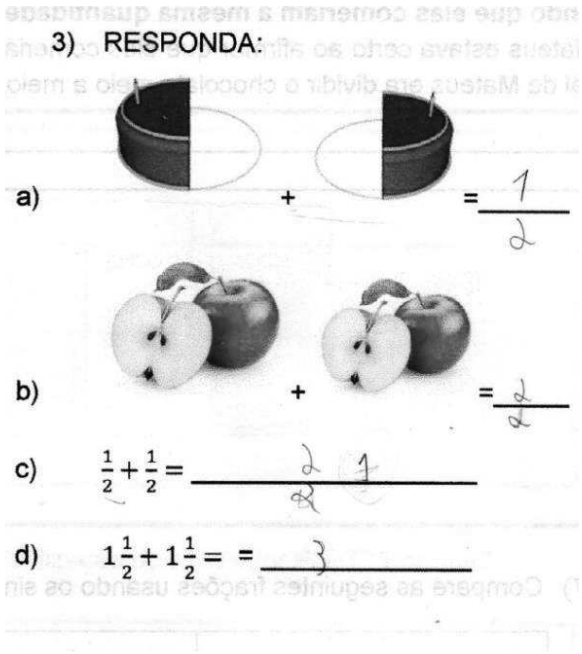


Figura 27 – Resposta PC – Aluno O do Colégio B

Esse estudante acertou as questões 3c e 3d, e errou ao "visualizar" que uma metade de um bolo mais a outra metade forma $\frac{1}{2}$ (3a). De igual modo, não conseguiu contar as duas maçãs mais as metades de cada uma, colocando como resposta $\frac{2}{2}$ (3b). Nesse caso, o apoio icônico não ajudou.

Outro estudante acertou a primeira parte da questão, mas errou a segunda parte, como mostra a Figura 28. A representação icônica ajudou, nesse caso, e o aluno respondeu com desenhos também.

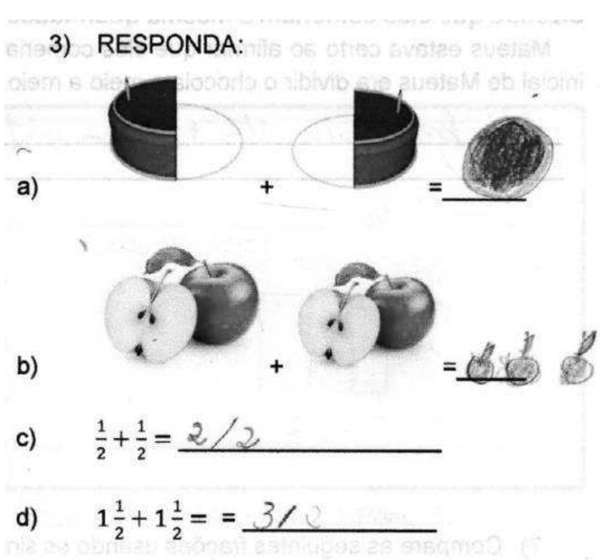
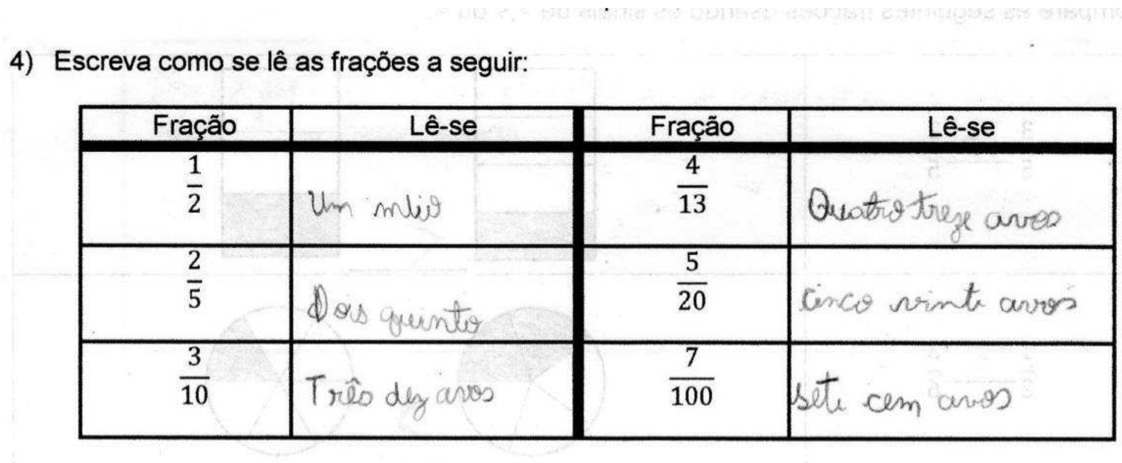


Figura 28 – Outra resposta PC – Aluno P do Colégio B

A Questão 4 solicitava que os alunos escrevessem como se lia, seis frações. Foi uma pergunta que gerou 5 respostas PC e 3 TC, pois envolvia também números decimais e avos, o que pode ter gerado certa confusão para os alunos. Por exemplo, a fração $\frac{3}{10}$ foi identificada como "*Três e dez avos*" [*sic*] por 2 estudantes; a fração $\frac{7}{100}$foi descrita como "*sete cem avos*" [*sic*] por 3 estudantes. Um(a) estudante errou apenas a fração $\frac{5}{20}$, escrevendo "*cinco visegimo*" [*sic*]. Esse foi um resultado expressivo, pois no Questionário Prévio mais de 44% dos alunos erraram essa pergunta. Além de Erros na *Lecto* Escrita de Números Fracionários, essa questão apresentou Erros Conceituais. Ainda na Questão 4, vale destacar que praticamente todos acertaram a leitura/escrita de ½. Apenas 2 estudantes não conseguiram escrever corretamente, um porque não respondeu e o outro porque respondeu "*um quarto*". O mesmo ocorreu com a fração $\frac{7}{100}$, que foi escrita por alguns alunos como "*sete cem avos*" [*sic*], como indica a Figura 29.


4) Escreva como se lê as frações a seguir:

Fração	Lê-se	Fração	Lê-se
$\frac{1}{2}$	Um meio	$\frac{4}{13}$	Quatro treze avos
$\frac{2}{5}$	Dois quinto	$\frac{5}{20}$	cinco vinte avos
$\frac{3}{10}$	Três dez avos	$\frac{7}{100}$	sete cem avos

Figura 29 – Questão 4, Pós-Teste, desenvolvida por aluno Q do Colégio B

Apesar do progresso dos alunos, uma minoria ainda não conseguiu apropriar-se dos conhecimentos relativos à leitura/escrita de frações, incidindo ainda em erros da Classe C, ou seja, Erros na *Lecto* Escrita de Números Fracionários.

Passando para a quinta questão, observa-se a quase totalidade de respostas TC, pois houve apenas uma PC, conforme a Figura 30.

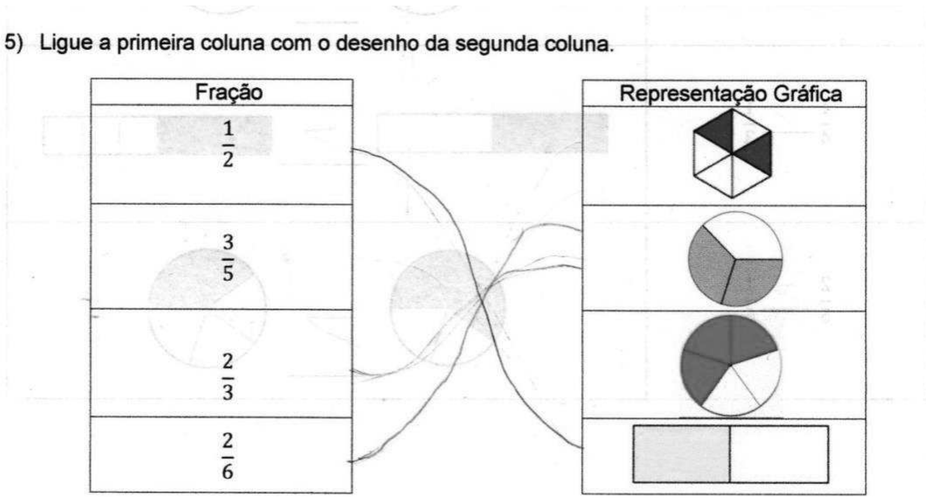


Figura 30 – Resposta PC, Aluno R do Colégio B

Para esse estudante, portanto, a representação icônica não ajudou muito. Cometeu Erros na Interpretação de Texto Não Verbal. Esses resultados estão de acordo com estudos de Sá (2011), que constatou a dificuldade dos alunos para determinarem que quantia uma Fração representa em relação ao todo, além de dificuldades para inventar problemas simples.

A Questão 6 trouxe um problema[10], que foi resolvido corretamente apenas por 4 estudantes; 1 errou e 3 acertaram parcialmente. Destes, um(a) estudante apenas repartiu a barra em 12 partes aparentemente iguais e assinalaram o meio (6 partes de cada lado) e outro repartiu a barra em 18 partes iguais e demarcou os dois meios (9 de cada lado), mas não responderam. Um dividiu em 24 partes e indicou a metade com um traço vertical e respondeu "sim". Considerou-se erradas as respostas do aluno 8, pois o(a) Aluno(a) 8 respondeu: "*Mateus esta certo por dividir em 2 cada um fica com 1 sim por que juntando as duas metades fica um enteiro*" [*sic*]. Esse Erro na RP da categorização utilizada na presente Dissertação, e também revelam ausência do conceito de Fração Equivalente, caracterizando Erro Conceitual.

A última questão também confundiu os alunos, pois consistia em comparar Frações usando os sinais de <, > ou =. Apenas 1 aluno(a) acertou todos os 8 exercícios propostos nessa questão, e 7 responderam de modo Parcialmente Correto. Alguns alunos não compreenderam que igual significa

[10] "Luiz comprou uma barra de chocolate, então seu amigo Mateus pediu para que ele a dividisse ao meio e cada um comeria ½ da barra de chocolate. Luiz respondeu que iria dividir o chocolate em quatro partes e cada um comeria 2 pedaços. Então Mateus concordou, dizendo que eles comeriam a mesma quantidade de chocolate". Mateus estava certo ao afirmar que eles comeriam o mesmo tanto de chocolate? Pois a proposta inicial de Mateus a era dividir o chocolate meio a meio.

equivalência, ou a mesma quantidade considerada. Portanto, os erros caracterizaram-se como Erros Conceituais e Erros na Interpretação de Texto Não Verbal.

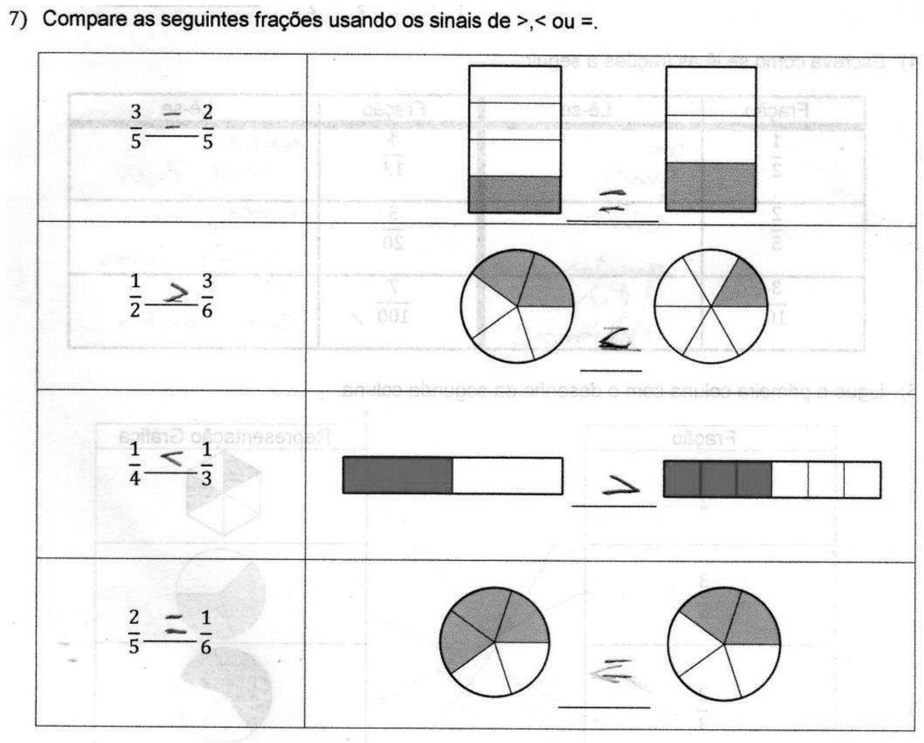


Figura 31 – Questão 7, Aluno S do Colégio B

As três questões seguintes eram subjetivas e visavam a uma espécie de avaliação da metodologia utilizada nas aulas. Todos os alunos avaliaram positivamente os métodos; muitos gostaram de trabalhar com o computador, com o *PhET* e afirmaram ter aprendido mais com os métodos utilizados nas aulas.

Com os resultados do Colégio B no Quadro 13, pode-se observar a evolução dos participantes da ação, no sentido de construírem seus conhecimentos sobre Frações.

Quadro 13 – Resultados comparativos Pré-Teste e Pós-Teste – Colégio B

Questão	Totalmente correta		Parcialmente correta		Incorreta		Não respondeu	
	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T	Pré-T	Pós-T
1	1	-	-	8	10	-	7	-
2	5	-	8	8	4	1	-	--
3	1	3	10	4	7	1	-	-
4	1	3	9	5	8	-	-	-
5	1	1	3	7	9	-	5	-
6	3	4	6	3	9	1	-	-
7	-	1	7	7	11	-	-	-

Síntese dos erros dos alunos no colégio A e B

Ao realizar as análises, procurou-se identificar os erros na aprendizagem de Frações e os motivos, tentando mudar essa realidade e ajudar os alunos. Nesse sentido, comunga-se o pensamento de Davis e Espósito (2015, p. 132), que afirmam:

> Se queremos, pois, exercer com propriedade o nosso papel de educadores, temos de aprender a identificar as razões que se encontram na base das respostas errôneas de nossos alunos, dando-lhes, no momento certo, o remédio certo. De outra forma, estaremos sonegando-lhes não só a ajuda a que têm direito, como também a que precisam e esperam de nós.

Os erros dos alunos do Colégio A são sintetizados no Quadro 14.

Quadro 14 – Ocorrência e Tipo de Erros - Pré-Teste e Pós-Teste – Colégio A

Questão	Pré-T	Pós-T
1	EC	EC
2	EC	EC
3	EITNV e ETNRF	EITNV e ETNRF
4	EC e ELENRF	EC e ELENRF
5	EC e EITNV	-
6	EC e ERP	EC e ERP
7	EC e EITNV	EC e EITNV

Houve uma melhora qualitativa dos alunos do Colégio A e do Colégio B no Pós-Teste, em relação ao Pré-Teste, além da evolução nos aspectos quantitativos, pois deixaram de cometer Erros de Interpretação Não-Verbal.

Quadro 15 – Classificação de Erros Pré-Teste e Pós-Teste – Colégio B

Questão	Pré-T	Pós-T
1	EC	EC
2	EC	EC
3	EITNV e ETNRF	EITNV e ETNRF
4	EC e ELENRF	EC e ELENRF
5	EC e EITNV	EC e EITNV
6	EC e ERP	EC e ERP
7	EC e EITNV	EC e EITNV

Deve-se considerar que foram analisados todos os questionários do Pré-Teste e do Pós-Teste, e constatou-se que, desses, muitos alunos não participaram de todas as atividades propostas.

CONSIDERAÇÕES

Novas práticas e metodologias têm sido utilizadas pelos professores de matemática almejando mudanças. E, como consequência, um ensino efetivo. Nesse sentido, procedeu-se no presente estudo ao que se caracteriza como uma Pesquisa-ação.

O objetivo consistiu, em idealizar uma ação (uma intervenção pedagógica utilizando MT - *PhET*,) para sanar um problema educacional (as dificuldades no ensino e aprendizagem de Matemática, em especial, do ensino de Frações).

Procurou-se aliar duas das tendências em Educação Matemática, a Resolução de Problemas e as Mídias Tecnológicas, para ensinar Frações aos alunos de duas SAAM do município de Guarapuava – Pr. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados questionários, atividades e um Diário de Bordo.

Após a análise das atividades desenvolvidas, constatou-se uma evolução dos conhecimentos dos alunos em relação ao conteúdo de Fração. Se em princípio poucos alunos tinham noção sobre Frações, deixavam a resposta em branco ou confessavam não saber nada, ao final cada um procurou responder ao seu modo, sem deixar perguntas sem respostas.

Nas atividades, os alunos pareciam ter dominado o conteúdo. No entanto, no teste final alguns ainda apresentavam-se confusos. A maioria entendeu e foi bem no Pós-Teste, porém alguns não demonstraram evolução. Vale ressaltar que o Pós-Teste do Colégio A demonstrou que os alunos conseguiram superar os Erros na Interpretação de Texto Não Verbal.

Dentre as contribuições da presente pesquisa, a mais importante certamente foi a metodologia de ensino de Frações. A utilização da MT aliada a RP na intervenção pedagógica na SAAM, por meio do *PhET*, causou grande entusiasmo e motivação nos alunos, contribuindo para a aprendizagem de Frações.

No desenvolvimento dos alunos aprenderam a ser colaborativos, pois sempre que um aluno pedia esclarecimento sobre algo, eles próprios se ofereciam para responder, cooperando uns com os outros. Também na socialização das respostas, alguns alunos tiveram a oportunidade de ensinar seus colegas, e mostrar como chegaram a uma solução correta – o que representou um fator positivo.

Com base nos resultados obtidos, pode-se afirmar que o *PhET Simulations* trouxe contribuições significativas ao ensino de Frações na SAAM, considerando-se a abordagem da RP, pois em todas as atividades utilizavam o *PhET* como ferramenta para solucionar e explicar suas estratégias adotadas na resolução das atividades.

As atividades passaram por três etapas: antes (Preparação do Problema), durante (Resolução do Problema) e depois (Plenária e Formalização), conforme sistemática adotada por Onuchic (2012).

Todos os conteúdos praticamente eram novidade para os alunos, pois tinham vagas noções do tema, que foi trabalhado em: dez encontros de duas horas/aula no Colégio A e doze encontros de duas horas/aula no Colégio B. Além disso, uma dificuldade enfrentada durante a pesquisa foi a assiduidade dos alunos. No colégio A iniciou-se com 13; em um determinado dia, compareceram somente 50%, e ao final eram apenas 10, e destes apenas 6 participaram de todos os encontros. No colégio B iniciou-se com 18 alunos, e apenas 8 fizeram o Pós-Teste; somente 4 participaram de todos os encontros. Como nem todos participaram de todos os encontros, alguns ficaram com déficits na aprendizagem do tema.

As principais dificuldades encontradas pelos alunos no conteúdo de frações foram:

- Dificuldades no julgamento sobre a existência de uma regra para comparar/ordenar as frações;
- Não conseguiram estabelecer nenhuma relação entre a comparação de duas Frações, com denominadores diferentes;
- Falta de compreensão das Frações Equivalentes;
- Erros Relacionados aos Procedimentos para Resolução de Problemas.

As contribuições com a utilização de simulações interativas do *Phet Simulation*, no ensino de frações foram diversas, entre elas:

- Variedade de estímulos: textual, visual e auditivo, podendo combinar estímulos atendendo a diversos tipos de aprendizagem;
- Familiaridade dos alunos com a maioria das tecnologias;
- O potencial comunicativo e instrucional do som e da imagem para os alunos;
- O dinamismo que pode proporcionar a aula, principalmente no que diz respeito a uma aprendizagem significativa.

O *Phet* foi capaz de potencializar a aprendizagem, com o apoio do professor na função de mediador do saber, fomentando críticas baseadas em domínios teóricos e práticos a medida que os recursos utilizados para o alcance de objetivos atenderam a proposta do plano de aula, que foi o ensino de frações.

Estes resultados sugerem que as simulações interativas do *PhET*, quando combinadas com um ensino eficaz, podem ser ferramentas altamente eficazes para apoiar o ensino e aprendizagem. Ao recomendar o *PhET*, ou outras tecnologias, espera-se que os professores possam sanas as dúvidas discentes sobre Frações, evitando que seus alunos levem para as outras etapas de sua escolarização essas dificuldades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, Wieman K. *Student engagement and learning with PhET interactive simulations*. Procedingsof multimídia in PhysicsTeachingand Learning, 2009.Doi 10.1393/ncc/i2010-10623-0.

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

AMARAL, Gisele Restell. **Trabalhando em ambientes informatizados**. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_gisele_resstel_amaral.pdf> Acesso em: 10.set.2015.

ANDRADE, Débora de Oliveira; GRANDO, Regina Célia. **Contando histórias nas aulas de matemática**: produção/mobilização de conceitos na perspectiva da resolução de problemas. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/contando.pdf> Acesso em: 10.set.2015.

ANDRÉ, Neusa; ACORSI, Cledina Regina Lonardan. **Reaprender a aprender e ensinar matemática**. Campo Mourão, 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2332-8.pdf> Acesso em: 20.jul.2015.

ARANTES, Alessandra Riposati; MIRANDA, Márcio; STUDART, Nelson. Objetos de aprendizagem no ensino de física. **Física na Escola**, v. 11, n. 1, 2010. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol11/Num1/a08.pdf> Acesso em: 20.jul.2015.

ARIAS, J. O. C.; YERA, A. P. O que é a Pedagogia Construtivista? **Rev. Educ. Pública**, Cuiabá, v. 5, n. 8, jul/dez. 1996.

BARDIN, Lourence. **Análise de conteúdo**. Edições 70. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/RonanTocafundo/bardin-laurence-anlise-de-contedo> Acesso em: 02.dez.2015.

BARNETT, Jeffrey C.; SOWDER, Larry e VOS, Kenneth E. Problemas de livros didáticos: complementando-os e entendendo-os. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BERTI, Nívia Martins. **Erro e estratégias do aluno na resolução de problemas de matemática**: contribuições para o processo avaliativo. Material Didático PDE. Cascavel: UNIOESTE, 2007. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/496-4.pdf> Acesso em: 20.jul.2015.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Educação e linguagem matemática**. 2003. Disponível em: <4http://www.sbembrasil.org.br/files/fracoes.pdf >Acesso em: 21.jun.2015.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das Frações. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife, 15 a 18 de julho de 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA01.pdf Acesso em: 12.jun.2015.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e suas representações**: uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2001.

BOCALON, Graciela Zanchet. **O erro na aprendizagem de frações no ensino fundamental**: concepções docentes. Dissertação de Mestrado em Educação. Curitiba: Universidade Católica do Paraná. Setor de Teologia e Ciências Humanas, 2008. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1160> Acesso em: 20.jul.2015.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL é o 8.º pais com maior número de analfabetos. **Jornal Bom Dia Brasil**. G1 Educação. Globo. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/01/brasil-e-o-8-pais-com-mais-analfabetos-adultos-diz-unesco.html> Acesso em: 25.nov.2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. 1 a 4 séries, Brasília. SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

_____. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 3. ed. Brasília: MEC/SEF, 2001.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU,

BUCKINGHAM, David. Aprendizagem e cultura digital. **Revista Pátio**, Ano XI, n. 44, Jan.2008. Disponível em: <http://www.cereja.org.br/arquivos_upload/david_buckingham_aprendizagem_cultura_digital.pdf> Acesso em: 01.dez.2015.

BURAK, Dionísio. Da matemática à educação matemática: olhares múltiplos e complexos para a educação do século XXI. **X EPREMI – Encontro Paranaense de Educação Matemática**. 17 a 19 de set.2009. Disponível em: <http://www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/PE/02.pdf> Acesso em: 10.set.2015.

_____. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. v. 1, n. 1, 2010, p. 10-27.

BURAK, Dionísio; MARTINS, Márcio André. Modelagem Matemática nos anos iniciais da educação básica: uma discussão necessária. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. v. 8, n. 1, jan-abr.2015, p. 92 -111. Disponível em:

<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/viewFile/1925/1982> Acesso em: 20.jul.2015.

BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Scientiae**, v.10, n.2, jul./dez. 2008.

_____. Modelagem matemática na educação básica numa perspectiva de educação matemática. In: BURAK, Dionísio; PACHECO, Edilson Roberto; KLÜBER, Tiago Emanuel (Orgs.) **Educação matemática**: reflexões e ações. Curitiba: Editora CVR, 2010.

BUTTS, Thomas. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

CARVALHO, José Sergio. **Reflexões sobre educação, formação e esfera pública**. [recurso eletrônico]. Dados eletrônicos. Porto Alegre: Penso, 2013.

CAVALIERI, Leandro. **O ensino das frações.** Dissertação de Especialização em Matemática. Umuarama: Universidade Paranaense – UNIPAR, 2005. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Cavalieri.pdf> Acesso em: 02.jun.2015.

COOL, C. *et al*. **O construtivismo na sala de aula**. 6 ed. São Paulo: Ática, 2009.

COSTA, José Roberto. **Desenvolvimento profissional de professores que lecionam matemática no ensino fundamental**: possibilidades a partir da reflexão sobre os erros dos alunos. Tese de Doutorado. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2014.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. **A análise de erros como metodologia de investigação.** Disponível em: <http://www.apm.pt/files/142359_CO_Cury_Bisognin_Bisognin_4a36c5d50a09a.pdf> Acesso em: 02.jun.2015.

CURY, Helena Noronha. **O papel do erro na aprendizagem de matemática** Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Palestra/PA%20-%2013.doc> Acesso em: 02.jun.2015.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DAVIS, Cláudia; ESPÓSITO, Yara L. **Algumas considerações sobre a teoria psicogenética na escola**. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_08_p127-132_ c.pdf> Acesso em: 05.dez.2015.

DAVIS, Edward J. e MCKILLIP, William D. Aperfeiçoando a resolução de problemas- história na matemática da *elementary school*. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

DEGUIRE, Linda J. Polya visita a sala de aula. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

DEOLINDO, Karina Luciane Silva; YAEGASHI, Solange Franci R. Língua escrita e relação do erro na perspectiva construtivista. **XX Semana de Pesquisa da UEM. VIII Encontro de Pesquisa em Educação. I Jornada Parfor**. Universidade Estadual de Maringá, 17 a 20 de setembro de 2013. Disponível em: <http://www.ppe.uem.br/semanadepedagogia/2013/PDF/T-06/13.pdf> Acesso em: 20.set.2015.

DOMINGUES, Hygino. Apresentação. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

DRECHMER, Patricia Aparecida de Oliveira; ANDRADE, Susimeire Vivien Rosotti de. **O estudo de frações e seus cinco significados**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1959-8.pdf Acesso em: 20.jun.2015.

ECO, Uberto. **Tratado geral de semiótica**. Trad. Antônio de Pádua Danesi e Gilson Cesar Cardoso de Souza. São Paulo: Perspectiva, 1980.

ESPÍNDOLA, Nederson Antonio**. A concepção do erro como uma estratégia de revisão do processo de ensino e aprendizagem em matemática do nível fundamental**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Lajeado, Centro Universitário Univates, 2009. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/116/1/NedersonEspindola.pdf> Acesso em: 24.maio.2015.

FABIAN, Eloi Pedro. A epistemologia evolucionária a partir da tentativa de ensaio e erro nas obras tardias de Popper. **Revista Ciências Humanas**. n. 11, v. 8, dez.2007, p. 49-62.

FELTES, Rejane Zeferino. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007. Disponível em: <http://tede.pucrs.br/tde_arquivos/24/TDE-2007-03-22T061520Z-429/Publico/388459.pdf> Acesso em: 02.ago.2015.

FERREIRA, Simone de Lucena; BIANCHETTI, Lucídio. As tecnologias da informação e da comunicação e as possibilidades de interatividade para a educação. **Revista da FAEEBA**. Universidade do Estado da Bahia, Departamento de Educação I – v. 1, n. 1 (jan./jun., 1992) - Salvador: UNEB, 1992. Disponível em: <www.uneb.br/revistadafaeeba/files/2011/05/numero22.pdf> Acesso em: 23.maio.2015.

FERNANDES, S. F. H. **As frações do dia a dia:** operações. Programa de Desenvolvimento Educacional. Universidade Estadual de Ponta Grossa. 2008. 27 p.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**. Ano 3, n. 4, 1995. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2561/2305>

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa de. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema** [online]. 2013, v.27, n.47, p. 917-938. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000400011>

Acesso em: 01.dez.2015.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço **Tendências em educação matemática** - 2. ed. - Palhoça: UnisulVirtual, 2005. 87 p.

FONSECA, João José Saraiva de. **Apostila de metodologia científica**. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oB5x2SChpSEC&pg=PA35&lpg=PA35&dq=O+objeto+da+pesquisa-ação+é+uma+situação+social+situ[...]> Acesso em: 10.mar.2015.

FONSECA, Simone Silva da. Uma análise sobre as tendências da educação matemática nos parâmetros curriculares nacionais da matemática no ensino fundamental (3º e 4º ciclos). **Anais do VI Fórum Identidades e Alteridades e II Congresso Nacional Educação e Diversidade**. Itabaiana/SE: UFS, 28 a 30 de nov.2013. Disponível em: <200.17.141.110/forumidentidades/VIforum/textos/Texto_VI_Forum_60.pdf> Acesso em: 01.dez.2015.

FRANÇA, I. S. Programa sala de apoio à aprendizagem em Matemática: minimizando as dificuldades em busca da Integração para os níveis do ensino fundamental. **IX Congresso Nacional de Educação EDUCERE**. PUC. Paraná. 2009.

FURLANETTO, Virginia; DULLIUS, Maria Madalena e ALTHAUS, Neiva. Estratégias de resolução de problemas para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática**. IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul – ANPED**. 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/view/2551/275> Acesso em: 03.mar.2015.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. (Org.) **Métodos de pesquisa**. Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS; Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. (Coord.) Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GOLDIN, Gerald A. e MCCLINTOCK, C. Edwin. O tema da simetria na resolução de problemas. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

GOMES, Thiago de Azevedo; RIBEIRO, Chang Kuo. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.4, n.3, set/dez.2014.

GOMES, Giancarlo; TORRENS, Edson Wilson; DA CUNHA, Paulo Roberto. **Motivação e Resistência ao Uso da Tecnologia da Informação**: Um Estudo Entre Professores. In: CONTECSI-International Conference on Information Systems and Technology Management. 2012. p. 151-164.

GONÇALVES, Heitor Antônio. **Educação matemática e cálculo mental**: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Tese de doutorado em Ciências, Sociedade e Educação. Niterói, Universidade Federal Fluminense, 2008. Disponível em: <http://www.uff.br/pos_educacao/joomla/images/stories/Teses/mental.pdf> Acesso em: 30.nov.2015.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 1. Editora LTC, v. 5, 2001.

HOUSE, Peggy A. Aventurando-se pelos caminhos da resolução de problemas. In:
KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

JACINTO, Hélia e CARRERA, Susana. **Estratégias de resolução de problemas de matemática:** que lugar no currículo? Dissertação de Doutoramento. Portugal, 2012. Disponível em: <http://www.academia.edu/1821778/Jacinto_H._and_Carreira_S._2012_._Estrat%C3%A9gias_de_resolu%C3%A7%C3%A3o_de_problemas_de_matem%C3%A1tica_que_lugar_no_desenvolvimento_do_curr%C3%ADculo2012> Acesso em: 07.mar.2015.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** implicações da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas, São Paulo: Papirus, 2012.

KILPATRICK, Jeremy. **Fincando estacas**: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como um campo profissional e científico. Tradução Rosana G. S. Miskulin; Cármem Lúcia B. Passos; Regina C. Grando e Elisabeth A. Araújo. Disponível em: <http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/235539/mod_resource/content/1/TEXTO%20B-Kilpatrick,%20J.pdf> Acesso em: 03.dez.2015.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio.**Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática**: aspectos filosóficos e epistemológicos. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG, 2007.
Disponível em: <http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=139> Acesso em: 30.nov.2015.

KOERICH, Magda Santos *et al*. Pesquisa-ação: ferramenta metodológica para a pesquisa qualitativa. **Revista Eletrônica de Enfermagem**. 2009; v.11, ano 3, p. 717-23. Disponível em: < https://www.fen.ufg.br/revista/v11/n3/v11n3a33.htm> Acesso em: 06.dez.2015.

LEÃO, Denise Maria Maciel. Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, n. 107, julho/1999, p. 187-206.
Disponível em: <www.scielo.br/pdf/cp/n107/n107a08.pdf > Acesso em: 21.jun.2015.

LEBLANC, John F.; PROUDFT, Linda e PUTT, Ian J. Ensinando resolução de problemas na *elementary school*. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática:** Velhos e novos temas. Goiânia: Edição do Autor. 2002.

LIMA, Karina Medeiros de. Determinismo Tecnológico. INTERCOM – Sociedade Brasileira de Estudos Interdisciplinares da Comunicação. XXIV Congresso Brasileiro da Comunicação: Campo Grande /MS, setembro/2001. Disponível em:
< http://www.infoamerica.org/documentos_pdf/determinismo.pdf> Acesso em: 21.nov.2015.

LIMA, João Epifânio Regis. Considerações sobre filosofia da tecnologia**. I Conferência Brasileira de Comunicação e Tecnologias Digitais da UMESP**. 27-11-07. Disponível em: <http://www.walterlima.jor.br/academico/Pos/casper/evolutech_efpifanio.pdf> Acesso em: 27.nov.2015.

LOUREIRO, Vanilda. **Dificuldades na aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, 2013. Disponível em:

<portais4.ufes.br/posgrad/teses/tese_7682_DISSERTACAO FINALIZADA_VANILDA LOUREIRO_completa.pdf> Acesso em: 21.maio.2015.

MÂCEDO, Josué Antunes de; e DICKMAN, Adriana Gomes. **Roteiro de atividades**: simulações computacionais como ferramenta auxiliar ao ensino de conceitos básicos de eletromagnetismo. Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Belo Horizonte, PUC Minas, 2009.

MAIOR, Ludovico; TROBIA, José. **Tendências metodologicas de ensino-aprendizagem em educação matemática**: resolução de problemas - um caminho. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1785-8.pdf> Acesso em: 11.jun.2015.

MARTINI, Carma Maria; BUENO, Jose Lucas Pedreira. O desafio das tecnologias de informação e comunicação na formação inicial dos professores de matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.16, n. 2, p. 385-406, 2014. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/16952/pdf> Acesso em: 11.jun.2015.

MARTINS, Valdemar Nascimento Parreira. **Avaliação do valor educativo de um *software* de elaboração de partituras**: um estudo de caso com o programa Finale no 1º ciclo. 2006. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/6326/6/F-%20Cap%C3%ADtulo%203.pdf> Acesso em: 27.nov.2015.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de. Possibilidades e Limitações das Simulações Computacionais no Ensino da Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. 2002, v. 24, n. 2, p. 77-86. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v24n2/a02v24n2.pdf> Acesso em: 11.jun.2015.

MELÃO, Valderez Soares. Educação Matemática: a matemática escolar como instrumento de educação. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Departamento de Ensino Fundamental. **Orientações pedagógicas, matemática**: sala de apoio à aprendizagem. Curitiba: SEED - Pr., 2005.

MELO, Igor Augusto Sampaio da Costa de; ANDRADE, Pedro Henrique Freitas. Análise de erros em questões de adição e subtração com frações. **Revista WEB-MAT.** Belém, v. 1, n. 1, p. 51-60, Jan.jul.2014. Disponível em: <paginas.uepa.br/seer/index.php/web-mat/article/view/265/229> Acesso em: 31.jul.2015.

MENGA, Lüdke; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MERCADO, Luís Paulo Leopoldo. Formação docente e novas tecnologias. In: MERCADO, Luís Paulo Leopoldo (Org.). **Novas tecnologias na educação**: reflexões sobre a prática. Maceió. Edufal, 2002.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-14T12:42:59Z-3489/Publico/dissertacao_vera_lucia_merlini.pdf> Acesso em: 31.jul.2015.

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.103-135, novembro 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/38217/29121> Acesso em: 21.jun.2015.

MUSSER, Gary L.; SHAUGHNESSY, J. Michael. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

NASCIMENTO, Juliane do. O ensino e a aprendizagem das Frações no contexto das novas propostas curriculares. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 9, n. 2, p. 158 -170, 2009. Disponível em: <http://www.bjis.unesp.br/ojs-2.4.5/index.php/ric/article/viewFile/254/212> Acesso em: 01.jun.2015.

NOÉ, M. **A importância do estudo das frações algébricas**. Brasil Escola. 2014.

OLIVEIRA, Helena Margarida Martins Rosário de. **O supervisor pedagógico enquanto mediador entre o aluno estagiário e o educador acompanhante**: o caso específico do estágio na educação pré-escolar. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa, 2008. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/775> Acesso em: 30.nov.2015.

OLIVEIRA, Francismara Neves e MACEDO, Lino de. Resiliência e insucesso escolar: uma reflexão sobre as salas de apoio à aprendizagem. **Estudos e pesquisas em psicologia**. [online]. 2011, vol.11, n.3, p. 983-1004. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1808-42812011000300015> Acesso em: 06.jun.2015.

OLIVEIRA, Francismara Neves *et al*. Sala de apoio à aprendizagem: significações de dificuldades de aprendizagem para alunos e professores. IX Congresso Nacional de Educação – Educere; III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. 26 a 29 de out.2009, PUC-PR. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3474_1945.pdf>

Acesso em: 05.jun.2015.

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa. Novas Reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani e BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs.) **Educação Matemática** – pesquisa em movimento, São Paulo, Editora Cortez, 2004.

_____.. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? IV Jornada Nacional de Educação Matemática. XVII Jornada Regional de Educação Matemática. 06 a 09 de maio de 2012, Universidade de Passo Fundo. Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_1onuchic.pdf> Acesso em: 21.maio.2015.

_____. Conselho Estadual da Educação. Deliberação n. 007/1999. Disponível em: <http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/deliberacoes/deliberacao071999cee.pdf> Acesso em: 05.jun.2015.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Departamento de Ensino Fundamental. **Orientações pedagógicas, matemática:** sala de apoio à aprendizagem / Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Departamento de Ensino Fundamental. – Curitiba : SEED - Pr., 2005. - 130p.

. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Departamento de Ensino Fundamental. **Orientações pedagógicas, matemática**: sala de apoio à aprendizagem. Curitiba: SEED - Pr., 2008.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Instrução n. 001/2008-SUED/SEED. Disponível em: <http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/instrucoes/instrucao012008.pdf>
Acesso em: 05.jun.2015.

_____. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. SEED: Curitiba, 2008.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Instrução n. 007/2011-SUED/SEED**. Disponível em:
<http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/instrucoes/instrucao0072011.pdf>
Acesso em: 05.jun.2015.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Instrução nº 010/2014. **Autorização de salas de apoio à aprendizagem.** 2014.

PAULO, David. **Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) em Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) como instrumento de aprendizagem significativa de física no ensino médio**. Dissertação de Mestrado. São Carlos: UFSCar, 2014. Disponível em: Acesso em: 20.jun.2015.

PERANZONI, Vaneza Cauduro; CAMARGO, Maria Aparecida Santana. **Proposta construtivista**: um desafio sempre atual. Efdeportes.com. Revista digital, Buenos Aires, n. 61, ano 16, out.2011. Disponível em:
<http://www.efdeportes.com/efd161/proposta-construtivista-um-desafio-sempre-atual.htm> Acesso em: 21.jul.2015.

PEREIRA, Taciany da Silva; ZÚÑICA, Nora Olinda Cabrera. **Uma investigação sobre as dificuldades dos alunos das séries iniciais do ensino médio envolvendo frações**. Disponível em:
<http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/UMA-INVESTIGA%C3%87%C3%83O-SOBRE-AS-DIFICULDADES-DOS-ALUNOS-DAS-S%C3%89RIES-INICIAIS-DO-ENSINO-M%C3%89DIO-ENVOLVENDO-FRA%C3%87%C3%95ES.pdf> Acesso em: 30.nov.2015.

PIAGET, Jean. **Epistemologia genética**. Tradução de Álvaro Cabral. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

PINTO, Marcianinha Aparecida. **As novas tecnologias e a educação**. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/126065590/04-53-48-as-Novas-Tecnologias-e-a-Educacao#scribd>
Acesso em: 16.maio.2015.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

PREVÊ, Deison Teixeira; SHENECKEMBERG, Cleder Marcos; MUNHOZ, Regina Helena. **Lúdico no ensino de Frações**. BoEM, v.2. n.2, Joinville, jan./jul. 2014, p. 88-99. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/3970/3235> Acesso em: 02.jun.2015.

QUARTIERO, Elisa Maria. As tecnologias da informação e comunicação e a educação. **Revista Brasileira de Informática na Educação**. n. 4, 1999. Disponível em: <www.lbd.dcc.ufmg.br/bdbcomp/servlet/Periodico?id=RBIE> Acesso em: 26.maio.2015.

RODRIGUES, Nara Caetano Tecnologias de informação e comunicação na educação: um desafio na prática docente. **Fórum Lingüístico**, Florianópolis, v. 6, n.1, p. 1-22, jan-jun, 2009. Disponível em: <https://www.faecpr.edu.br/universidadevirtual/artigos/artigo_tecnologia_da_informacao_e_comunicacao_na_educacao.pdf> Acesso em: 15.jan.2015.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br> Acesso em: 12.mar.2015.

ROSA, Rosemar. **Trabalho docente**: dificuldades apontadas pelos professores no uso das tecnologias. VII Encontro de Pesquisa em Educação. II Congresso Internacional: Trabalho Docente e Processos Educativos. II Simpósio de Ética em Pesquisa. Universidade Uberaba, Campus Aeroporto, 21 a 25 de outubro de 2013. Revista Encontro de Pesquisa em Educação. Uberaba, v. 1, n. 1, p. 214-227, 2013.
Disponível em: <http://revistas.uniube.br/index.php/anais/article/viewFile/710/1007>
Acesso em: 28.maio.2015.

RUIZ, Adriano Rodrigues. A matemática, os matemáticos, as crianças e alguns sonhos educacionais. **Ciência & Educação**, v. 8, n. 2, p. 217-225, 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v8n2/06.pdf> Acesso em: 26.nov.2015.

SÁ, Fernanda Bartz de. **Aprendizagem de Frações no ensino fundamental**. TCC. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31633/000784031.pdf> Acesso em: 02.ago.2015.

SANTANNA, Neide F. P., PALIS Gilda de La Rocque, NEVES, Maria Apparecida C. Mamede.Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra. **Zetetiké**. FE/Unicamp, v. 21, n. 39 – jan/jun 2013, p. 169-195. Disponível em:
Acesso em: 26.maio.2015.

SANTOS, José Jefferson Aguiar dos; MOITA, Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática**: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade.. Disponível em: <www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf> Acesso em: 25.jun.2015.

_____. D**esenvolvimento de um objeto de aprendizagem para o ensino de conceitos de probabilidade.** Dissertação de Mestrado em Ensino e Matemática. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba, 2011. Disponível em: <pos-graduacao.uepb.edu.br/.../José%20Jefferson%20Aguiar%20dos%20...> Acesso em: 05.dez.2015.

SANTOS, Marcelo Camara; LIMA, Paulo Figueiredo. Considerações sobre a matemática no ensino fundamental. **Anais do I seminário nacional:** currículo em movimento – perspectivas atuais. Belo horizonte, novembro de 2010.

SILVA, Adelmo Carvalho da. **Reflexão sobre a matemática e seu processo de ensino-aprendizagem**: implicações na (re)elaboração de concepções e práticas de professores.Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba (PPGE/UFPB). João Pessoa, 2009. Disponível em: <http://www.ce.ufpb.br/ppge/Teses/teses09/ADELMO%20CARVALHO%20DA%20SILVA/REFLEXAO_SOBRE_A_MATEMATICA_E_SEU_PROCESSO_DE_ENSINO-APRENDIZAGEM_IMPLICA%C7OES_NA_%28RE%29ELABORA%C7AO_D.pdf> Acesso em: 28.maio.2015.

SOUSA, Jailma Gomes de. **Analfabetismo funcional em matemática no ensino médio: o caso do município de Itaporanga.** João Pessoa: Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba, 2011.

SOUZA, Fabrício de. **Levantamento e análise de *softwares* livres de física para o ensino médio**. TCC Física. Porto Velho: Departamento de Física da Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR Campus de Porto Velho, 2012. Disponível em: <http://www.fisica.unir.br/downloads/TCC/TCCFABRICIO.pdf> Acesso em: 22. abr. 2015.

SUYDAM, Marilyn N. Desemaranhando pistas a partir da pesquisa sobre resolução de problemas. In: KRULIK, Stephen e REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. **A análise de erros**: uma perspectiva cognitivista para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nuances. Set. 1997. v. 3.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 2011.

TRIPP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n3/a09v31n3> Acesso em: 05.dez.2015.

VALENTE, José Armando. **Informática na educação**: instrucionismo x construcionismo. Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/tecnologia/0003.html> Acesso em: 21.jun.2015.

VALERA, Alcir Rojas. **Uso social e escolar dos números racionais**: representação fracionária e decimal. Dissertação de Mestrado em Educação. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2003. Disponível em: <repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90210/valera_ar_me_mar.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 06.dez.2015.

VÀSQUEZ, Rafael Sales Brito Fernandes. **Um estudo do laboratório virtual no ensino de física e o uso do PhET como instrumento de ensino** [manuscrito]. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Exatas). Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas. Universidade Estadual da Paraíba, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/3055/1/PDF%20-%20Rafael%20Sales%20Brito%20Fern%C3%A1ndez%20V%C3%A1squez.pdf> Acesso em: 17.maio.2015.

ZUFFI Edna Maura; ONUCHIC Lourdes de la Rosa. O Ensino Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Unión. Revista Íbero-americana de Educación Matemática**. n. 11, set.2007, p. 79-97.

ANEXOS

APÊNDICES