

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE, UNICENTRO-PR

**PROCEDIMENTOS DOS ALUNOS ASSOCIADOS ÀS SUAS AÇÕES COGNITIVAS
EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

GUARAPUAVA – PR

2017

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

**PROCEDIMENTOS DOS ALUNOS ASSOCIADOS ÀS SUAS AÇÕES COGNITIVAS
EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Orientadora

GUARAPUAVA - PR

2017

Catálogo na Publicação
Biblioteca Central da Unicentro, Campus Cedeteg

C355p Castro, Élica Maiara Velozo de
Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática / Élica Maiara Velozo de Castro. – – Guarapuava, 2017.
xii, 61 f. : il. ; 28 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, 2017

Orientadora: Michele Regiane Dias Veronez

Banca examinadora: Michele Regiane Dias Veronez, Rodolfo Vertuan, Márcio André Martins

Inclui: Produto Educacional intitulado "Atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de 8º ano do ensino fundamental de uma escola do campo - material de apoio pedagógico"

Bibliografia

1. Ciências Naturais. 2. Matemática. 3. Atividades de modelagem matemática. 4. Ações cognitivas. 5. Procedimento dos alunos. I. Título. II. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

CDD 500.7

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

**PROCEDIMENTOS DOS ALUNOS ASSOCIADOS ÀS SUAS AÇÕES
COGNITIVAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

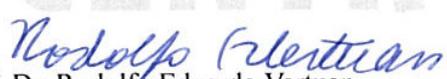
Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 23 de fevereiro de 2017.



Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez

Universidade Estadual do Centro-Oeste -UNICENTRO
Orientadora



Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR



Prof. Dr. Márcio André Martins

Universidade Estadual do Centro-Oeste -UNICENTRO

Guarapuava, PR
2017

Agradecimentos

À Deus, O Criador, meu alicerce.

Agradeço todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado, com carinho especial:

À minha orientadora, Prof. Dr. Michele pela atenção, crítica, ensinamentos e pela paciência.

Agradeço pela sua confiança e pela grandiosa contribuição para a minha formação.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Rodolfo e Prof. Dr. Márcio pelos relevantes apontamentos e sugestões.

À minha família, Márcia, Luana e Eliane, pelo incentivo, amor e apoio incondicional.

Ao Cláudio pelo companheirismo.

Aos colegas do mestrado, pelos conhecimentos compartilhados.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

*...prefiram o conhecimento em lugar do ouro,
porque a Sabedoria vale mais que pérolas, e
nenhuma jóia se compara a ela. (Pv. 8, 10-11)*

Resumo

Élida Maiara Velozo de Castro. **Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática.**

Nesta pesquisa assumimos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica em que se abordam situações problema da realidade e/ou do interesse do aluno e que possibilita aprendizagem de Matemática e de outras áreas do conhecimento. Como objetivo buscamos investigar o que se revela das ações cognitivas dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Para isso, a pesquisa foi realizada em duas turmas de 8^o anos do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná. A opção metodológica adotada fundamenta-se na abordagem qualitativa e contou com estudos bibliográficos sobre Modelagem Matemática, como: Almeida Silva e Vertuan (2013), Almeida e Silva (2012), Vertuan (2013), Veronez (2013), entre outros. Para a análise dos dados utilizamos gravações em áudio e vídeo e registros escritos dos alunos. Tais dados foram coletados durante trinta aulas, nas quais foram desenvolvidas várias atividades de modelagem matemática, entre elas os temas Erva-Mate, Milho e Planetas do Sistema Solar. Os resultados da pesquisa apontam que o processo de busca por uma solução para o problema, quando os alunos se envolvem com atividades de modelagem matemática, exige deles certa mobilização e construção de conhecimentos e isso os leva a explicitar, alterar e/ou modificar seus modos de pensar e suas decisões, reflexos de suas ações cognitivas e manifestadas por meio de procedimentos. Tais procedimentos, além de retratar mobilização/construção de conhecimentos dos alunos, uma vez que estão relacionados ao seu modo de pensar, entender e administrar as informações sobre o tema em estudo que originou tal atividade de modelagem matemática, sinalizam que não há linearidade nas ações cognitivas dos alunos. Ainda, tal mobilização provoca um processo de idas e vindas em relação aos aspectos da situação ou problema em estudo, aos objetos matemáticos e às respostas reconhecidas como solução, para além de revelar que os procedimentos manifestos pelos alunos se complementam ao passo que buscam responder à pergunta que originou a atividade de modelagem matemática.

Palavras-chave: Atividades de modelagem matemática. Ações cognitivas. Procedimentos dos alunos.

Abstract

Élida Maiara Velozo de Castro. **Students' procedures associated with their cognitive actions in mathematical modeling activities.**

In this research we use the Mathematical Modeling as a pedagogical alternative to approach problem situations of the reality and interest of the student and to improve the learning of Mathematics and other areas of knowledge. The objective of this study is to investigate what is revealed of students' cognitive actions in the development of mathematical modeling activities. The research was realized in two classes of eighth grade students from a public school in the state of Paraná. The methodological option adopted is based on the qualitative approach and counted on bibliographical studies on the Mathematical Modeling such as Almeida Silva and Vertuan (2013), Almeida e Silva (2012), Vertuan (2013), Veronez (2013), and others. For the data analysis we used audio and video recordings and the students' written statements. These data were collected during thirty classes, in which several mathematical modeling activities were developed, such as: Mate-herb, Maize and Planets of the Solar System. The results of the research point out that the process of searching for a solution to the problem, when the students involved themselves in mathematical modeling activities, requires them to mobilize and construct knowledge and this leads them to explain, modify and/or modify their ways of thinking and their decisions, reflections of their cognitive actions and manifested through procedures. These procedures, in addition to portraying students' mobilization/construction of knowledge, since they are related to their way of thinking, understanding and administering the information about the subject that originated this activity of mathematical modeling, indicate that there is no linearity in the actions of the students. Such mobilization provokes a process of comings and goings in relation to the aspects of the situation or problem studied, the mathematical objects and the answers recognized as solution, besides revealing that the procedures manifested by the students are complemented to the step that they seek to respond to the question that originated the mathematical modeling activity.

Keywords: Mathematical modeling activities. Cognitive actions. Student procedures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: As ações cognitivas associadas às características fundamentais de uma atividade de modelagem matemática.....	16
Figura 2: Problemas rotineiros elaborados pelos alunos.	31
Figura 3: Produção de Erva-Mate de acordo com a área de cultivo e o intervalo entre as colheitas.	38
Figura 4: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Erva-Mate – Grupo A.	40
Figura 5: Verificação de fórmulas para calcular a quantidade de Erva-Mate seca, produzida em um dado terreno retangular.	49
Figura 6: Procedimentos dos alunos associados as suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Erva-Mate – Grupo B.	50
Figura 7: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema “Planetas do Sistema Solar”.	60
Figura 8: Silo circular.	65
Figura 9: Volume de um silo de armazenamento.....	67
Figura 10: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Milho.....	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Questões propostas pelos alunos.	21
Quadro 2. Temas e questões propostas pelos alunos.....	22
Quadro 3. Resumo de informações relevantes sobre Erva-Mate.....	30
Quadro 4. Quadro elaborado pelos alunos para resolver a situação problema.....	32
Quadro 5. Quantidade de pacotes de 1 kg de Erva-Mate restantes.	36
Quadro 6. Perguntas elaboradas pelos alunos sobre Erva-Mate.....	41
Quadro 7. Síntese das informações mais relevantes sobre a Erva-Mate.	43
Quadro 8. Fórmulas para calcular a quantidade de Erva-Mate produzida de acordo com a medida dos lados de um terreno retangular em determinado intervalo de tempo.	45
Quadro 9. Teste de fórmula.	46
Quadro 10. Categorias associadas aos procedimentos dos alunos.	75
Quadro 11. Síntese das potencialidades das intervenções.	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Escala da distância entre os Planetas do Sistema Solarem relação ao Sol.	56
Tabela 2: Diâmetro, Raio e Circunferência Equatorial dos Planetas do Sistema Solar.	58
Tabela 3: Variação do volume de silo cilíndrico de altura 10 m e raio r.....	70
Tabela 4: Variação do volume de silo cilíndrico de raio 4 m e altura h.....	70

SUMÁRIO

Introdução	1
1. Modelagem Matemática na Educação Matemática	4
1.1. Modelagem Matemática sob uma perspectiva cognitivista	4
1.2. As fases da Modelagem Matemática	9
1.3. Professor e alunos no contexto de atividades de modelagem matemática	12
1.3.1. Ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática.....	15
2. Aspectos metodológicos do estudo	19
2.1. Caracterização da pesquisa	19
2.2. O cenário de investigação	20
2.2.1. As atividades de modelagem matemática desenvolvidas	20
2.3. As atividades de modelagem matemáticas detalhadas neste estudo.....	23
2.4. A coleta de dados	25
2.5. O processo de análise dos dados	26
3. Descrição e análise – um olhar para os procedimentos dos alunos.	28
3.1. Atividade Estudo da produção de Erva-Mate: Grupo A.....	28
3.2. Atividade Estudo da produção de Erva-Mate: Grupo B.....	41
3.3. Atividade Planetas do Sistema Solar	51
3.4. Atividade Milho	61
4. Resultados e discussão	74
Considerações Finais	87
Referências	92
Anexos	94

Introdução

A afirmação que algumas pessoas fazem a respeito de que a Matemática é “verdadeira e inútil” e a dificuldade em perceber a Matemática em diferentes contextos, segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), se deve ao fato de que as descobertas Matemáticas só fazem sentido aos matemáticos, pois a maioria das pessoas não consegue relacioná-las nem com outras ciências, nem com situações do seu cotidiano, da sua realidade. Mesmo os povos da antiguidade tendo desenvolvido a Matemática para algum fim, conforme apontam Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), considerando aspectos da Matemática sempre na perspectiva do que lhes era útil, não sustenta a ideia da utilidade e necessidade da Matemática para os dias atuais.

Com o propósito de discutir acerca da Matemática presente nas escolas e também na vida das pessoas, aliado à preocupação com questões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, surge a Educação Matemática. Considerando essa área de estudo assumimos que um caminho para aproximar a Matemática da realidade do aluno pode ser possibilitado por meio da Modelagem Matemática¹.

De modo geral, o trabalho com Modelagem Matemática desmistifica a ideia de que a Matemática é algo que está posto e que não se relaciona com situações do cotidiano. Isso porque, a Modelagem Matemática envolve a busca por uma solução para um problema, que pode ser sugerido pelos alunos ou pelo professor, um conjunto de procedimentos, que viabiliza o envolvimento com estruturas e conceitos matemáticos e uma análise consciente da resposta obtida para tal problema, podendo essa ser reconhecida, ou não, como solução. Nessa busca, professor e alunos têm, portanto, oportunidade de matematizar a situação em estudo e analisar as soluções, ao passo que reconhecem a matemática em situações reais.

Partindo do pressuposto de que a Modelagem Matemática requer um comportamento ativo de professores e alunos, Almeida, Silva e Vertuan (2013) expõem que há necessidade de ambos buscarem relacionar conhecimento científico com conhecimento escolar², que levem em conta as características da situação em estudo das mais diversas naturezas.

¹ O termo “Modelagem Matemática” (em maiúsculo) será utilizado quando se referir à abordagem metodológica e, em minúsculo, quando se referir à atividade decorrente dessa abordagem.

² Ao nosso entendimento conhecimento científico é aquele construído como ciência. Enquanto que o conhecimento escolar é “uma parte” da ciência apresentada no âmbito da escola.

Sendo assim, o trabalho com Modelagem Matemática considera ações diferenciadas de professores e alunos, em relação às aulas tradicionais e rotineiras nas quais o conteúdo é exposto e o exercício mais comum é a repetição de técnicas e fórmulas, e diversifica as aulas, uma vez que sugere o estudo de problemas diferentes daqueles comumente propostos nos livros didáticos. Em contrapartida, a inserção da Modelagem Matemática no contexto escolar, pode levar os professores a vivenciar algumas dificuldades. Tais dificuldades, que são de naturezas diversas, podem surgir também por parte do aluno, pois incita a saída da zona de conforto³ (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013); MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS (2013); OLIVEIRA (2010)). A origem dessas dificuldades, de modo geral, reside no fato de que a Modelagem Matemática não apresenta uma forma linear de tratar os conteúdos, isto é, professor e aluno vão se envolvendo com conceitos matemáticos a partir do interesse por resolver o problema que suscitou a atividade de modelagem matemática e de melhor compreender a situação em foco.

Essa dinamicidade que a Modelagem Matemática sugere, também possibilita um olhar atento para os procedimentos⁴ adotados pelos alunos. Em outros contextos, apenas o resultado final é considerado, já em atividades de modelagem matemática, os procedimentos utilizados ao longo do processo, podem configurar-se como objeto de estudo, na medida em que eles servem como ponto de partida para discussões sobre o modo como o aluno compreende e soluciona situações da realidade por meio da matemática. Tais procedimentos podem ser resultados de ações cognitivas⁵ mobilizadas pelos alunos ao se envolverem com Modelagem Matemática.

Diante do exposto, elegemos como foco de investigação a seguinte questão: O que se revela das ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática? Neste sentido, com a presente pesquisa temos como objetivo investigar acerca dos procedimentos manifestos pelos alunos do 8º ano durante suas ações cognitivas. O que justifica o interesse por essa investigação é a intenção de compreender a dinâmica promovida pelo envolvimento e

³Ação, comportamento, pensamento e condição onde “[...] quase tudo é conhecido ou previsível e há pouco espaço para a ‘imprevisibilidade’ associada às atividades de Modelagem Matemática” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p.24).

⁴Nesse contexto “procedimento” associa-se ao modo como o aluno executa, faz, realiza um ato. Está relacionado ao modo de agir ou de proceder durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Pode também se relacionar com o comportamento ou conduta do aluno ao longo da atividade.

⁵“A ação cognitiva de um sujeito corresponde à transição de sua intenção para a ação e vice-versa” (SILVA, 2013, p. 34, nota de rodapé).

atuação dos alunos em atividades de modelagem matemática, já que o tema que rege a aula, em grande parte, é sugerido por eles.

A partir de tal objetivo, destacamos duas questões que podem viabilizar reflexões acerca dos propósitos desta investigação: 1) Quais procedimentos são manifestos pelos alunos ao longo da atividade de modelagem matemática, desde a situação inicial (problemática) até a situação final (solução possível para a problemática) e como eles se relacionam? 2) O discurso e as intervenções do professor favorecem ou limitam a manifestação dos procedimentos dos alunos?

Diante de tais propósitos de investigação o presente trabalho de dissertação está estruturado em quatro capítulos, além da *Introdução* e das *Considerações Finais*.

Na *Introdução*, apresentamos a temática da pesquisa, bem como o problema de investigação e os objetivos.

O referencial teórico que fundamenta este estudo compõe o Capítulo 1 intitulado *Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Nesse capítulo discutimos sobre Modelagem Matemática sob a perspectiva cognitivista, apresentamos as fases de uma atividade de modelagem matemática e discorremos sobre o papel do professor e do aluno no contexto de sala de aula ao se envolverem com atividades dessa natureza. Ao abordamos sobre os alunos trazemos à tona algumas ações deles, denominadas ações cognitivas, por Almeida e Silva (2012). Tecemos considerações acerca dos aspectos metodológicos do estudo no Capítulo 2 – *Aspectos metodológicos do estudo*, no qual apresentamos a caracterização da pesquisa, o cenário de investigação, descrevemos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas de forma global e de modo sucinto, as quatro atividades que analisamos, bem como a coleta de dados e o processo de análise.

No Capítulo 3 – *Descrição e análise – um olhar para os procedimentos dos alunos*, relatamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos dos 8º anos do Ensino Fundamental, evidenciando os procedimentos manifestos por eles ao longo dessas atividades e no Capítulo 4 apresentamos os resultados a partir da discussão que ensaiamos e que visa responder à questão de investigação.

Por fim, trazemos as Considerações acerca da pesquisa desenvolvida, que precedem as Referências utilizadas na dissertação.

1. Modelagem Matemática na Educação Matemática

Neste capítulo apresentamos a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática no que tange à realização de atividades de modelagem matemática em sala de aula, sob a perspectiva cognitivista de Kaiser e Sriraman (2006). Também tecemos considerações acerca das fases da Modelagem Matemática e das ações cognitivas mobilizadas pelos alunos no momento que a desenvolve.

1.1. Modelagem Matemática sob uma perspectiva cognitivista

Em Modelagem Matemática, de acordo com o interesse, o professor pode adotar diferentes encaminhamentos. Tais encaminhamentos evidenciam diferentes perspectivas da Modelagem Matemática, se compreendidas sob as lentes de Kaiser e Sriraman (2006). Essas autoras argumentam que a perspectiva pode variar de acordo com o objetivo central que orienta o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e as classificam como: perspectiva realística ou aplicada, perspectiva contextual, perspectiva sócio-crítica, perspectiva epistemológica ou teórica, perspectiva educacional e perspectiva cognitivista.

Embora reconheçamos que uma atividade de modelagem matemática pode apresentar traços de mais de uma perspectiva, na presente investigação adotamos como pano de fundo a perspectiva cognitivista da Modelagem Matemática. Essa perspectiva, segundo Kaiser e Sriraman (2006) tem como pressuposto “favorecer que os alunos mobilizem conhecimentos da situação, de matemática e de ambos, de forma articulada” (VERONEZ, 2013, p. 30). Para Kaiser e Sriraman (2006), considerar a Modelagem Matemática na perspectiva cognitivista é propor-se a analisar as escolhas que os alunos fazem e as atitudes que assumem quando buscam por uma solução para a situação problema que originou a atividade de modelagem matemática.

No âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática diversos são os trabalhos realizados à luz da perspectiva cognitivista, dentre eles destacamos Borromeo Ferri (2006, 2007, 2010a, 2010b), Almeida e Palharini (2012), Vertuan (2013) e Veronez (2013).

Borromeo Ferri (2006, 2007, 2010b), em seus trabalhos sobre Modelagem Matemática, propõe-se a estudar os estilos de pensamento matemático⁶ na transição do mundo real para a matemática⁷. Borromeo Ferri (2006) discute sobre a rota de modelagem⁸ com enfoque nos procedimentos cognitivos⁹ dos alunos durante essa transição. Para a autora, os procedimentos cognitivos envolvidos na Modelagem Matemática apontam indícios das competências dos alunos e implicações para o ensino da matemática. Em Borromeo Ferri (2007), a autora também traz considerações sobre o comportamento do professor, suas ações e interações, diante dos procedimentos cognitivos dos alunos quando se envolvem com atividades de modelagem matemática.

Ainda sobre os estilos de pensamento matemático dos alunos em atividades de modelagem matemática, Borromeo Ferri (2010a) em seu trabalho “Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática”, busca promover reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática e destaca a importância dessa disciplina para além de ensinar fórmulas e cálculos. A autora destaca como necessária a articulação entre a Matemática e a prática matemática como parte do mundo real, ou seja, que faz parte do papel do professor construir um ambiente favorável para que o aluno seja capaz de estabelecer conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. Borromeo Ferri cita como exemplo uma atividade de modelagem matemática que realizou com alunos do 3º ano (1º ciclo do Ensino Fundamental). Tal atividade baseou-se no estudo de um problema sobre “a casa e o homem”, cujo estudo desenvolvido foi sobre suas alturas, considerando medidas reais. Posteriormente realizou uma síntese do trabalho do professor em cada fase da atividade, o tempo destinado, as atividades dos alunos e o objetivo de cada fase. Com isso, traz indicações de que a

⁶Termo usado por Ferri para designar a maneira que um indivíduo prefere utilizar para entender e pensar sobre fatos matemáticos e conexões matemáticas, usando imaginações internas e / ou representações externas. De modo geral, pode ser caracterizado como uma forma de pensar e não como uma habilidade.

⁷Para Borromeo Ferri, diferente do que acreditamos neste trabalho, a Matemática e o mundo real existem isoladamente (Matemática separada do Resto do Mundo). A Modelagem Matemática é um meio para ligar o mundo real e a matemática nos dois sentidos – da realidade para a matemática e da matemática para a realidade.

⁸Rota de Modelagem ou "Rota Modelling", segundo Borromeo Ferri (2007), é o termo usado para denotar o processo individual de modelagem. O indivíduo começa tal processo em certa fase, de acordo com as suas preferências, e, em seguida, passa por diferentes fases várias vezes ou apenas uma vez, focando em uma e ignorando outra, de acordo com o que requer a atividade. Em outros termos é o caminho, ou “a rota”, percorrido pelo aluno durante a atividade de modelagem matemática.

⁹Diz respeito à maneira como o aluno pensa, individual ou em grupo, durante o processo de aprendizagem por meio da Modelagem Matemática. Está associado ao pensamento do aluno enquanto se envolvem com atividades de modelagem matemática.

matemática pode ser relacionada com situações do mundo real e de que a proposta de trabalhar com atividades dessa natureza é acessível e simples para desenvolver no cotidiano de sala de aula.

Almeida e Palharini (2012), têm como propósito investigar a Modelagem Matemática como prática favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. As autoras realizaram análises sobre a transição da situação inicial para a situação final e do conjunto de procedimentos adotados para solucionar o problema identificado na situação inicial, a partir de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Ademais, fazem reflexões e considerações sobre o pensamento matemático dos alunos e os processos cognitivos por eles mobilizados, o que lhes permitem apontar que os alunos transitam pelos Três Mundos da Matemática¹⁰ durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Os resultados obtidos indicam que atividades de modelagem matemática têm potencial para desencadear os processos de pensamento.

No trabalho de Vertuan (2013), cuja coleta de dados aconteceu durante um curso intitulado “Investigações de assuntos do cotidiano por meio da Matemática”, voltado para alunos de um curso técnico profissionalizante vinculado ao Ensino Médio e alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o autor teve como objetivo pesquisar como os alunos monitoram as próprias ações cognitivas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e quais as influências deste monitoramento no desenvolvimento da própria atividade de modelagem matemática. Concluiu, portanto, que práticas de monitoramento cognitivo são aprendidas pelos sujeitos em seu entorno social e cultural. Ainda, que tais práticas fortalecem a importância da *unicidade*¹¹ da atividade de modelagem matemática e que, o trabalho em grupo exerce influência no desenvolvimento das atividades de modelagem e medeiam as aprendizagens dos diferentes sujeitos.

¹⁰A perspectiva de David Tall surge do estudo das teorias de Sfard, Piaget e Bruner, que tratam do desenvolvimento cognitivo e da necessidade de explicar como se dá o aprendizado em Matemática. Tall associa o desenvolvimento cognitivo em relação à Matemática com “Os Três Mundos da Matemática”, sendo eles: O Mundo Conceitual Corporificado, O Mundo Simbólico Proceitual, O Mundo Axiomático Formal (ALMEIDA e PALHARINI, 2012).

¹¹A unicidade pode ser entendida como “a prática constante de analisar o desenvolvimento da atividade considerando-a em sua totalidade” (VERTUAN, 2013, p.196).

Veronez (2013), discute acerca dos signos¹² utilizados e/ou produzidos pelos alunos, de um curso de Licenciatura em Matemática, quando eles mobilizam um conjunto de ações cognitivas ao desenvolver atividades de modelagem matemática. A autora elucida os papéis desses signos nos encaminhamentos tomados pelos alunos na busca por uma solução para o problema que originou a atividade de modelagem matemática. Veronez (2013), pontua que os signos mobilizados ou produzidos durante cada ação cognitiva associam-se a diferentes contextos de referências¹³ e encontram-se, de certa forma, entrelaçados, o que favorece a emergência de outros signos que “atrelados a outra ação cognitiva se relacionam a outro contexto de referência que geram outros signos e assim por diante, sempre em conexão com o conceito suscitado em cada ação cognitiva dos alunos” (p.156).

De maneira geral, os trabalhos que adotam a Modelagem Matemática na perspectiva cognitivista o fazem por considerar que essa perspectiva possibilita analisar e compreender aspectos relacionados ao pensar e agir dos alunos, quando envolvidos com atividades de modelagem matemática em contextos educacionais.

A caracterização de Modelagem Matemática que adotamos é a de que ela se “constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p. 9). Em outras palavras, consiste em abordar problemas ou situações da realidade e/ou do interesse do aluno, ao passo que ele se envolve em um processo de construção/mobilização de conhecimentos matemáticos e extra matemáticos.

Uma característica relevante de uma atividade de modelagem matemática é o trabalho em grupo, uma vez que organizados em grupos os alunos têm oportunidade de refletir, decidir e agir sobre as mais diversas situações, favorecendo um olhar crítico para elas, já que podem ser analisadas e compreendidas a partir de diferentes pontos de vista. Ao tratar de diversas situações problema, no contexto da Modelagem Matemática, os alunos podem passar a atribuir significado para os diferentes conhecimentos nelas requeridos, e ainda, na medida em

¹²Veronez (2013, p.17) em seu trabalho aborda o signo, na concepção de Peirce (2012), como “algo que está no lugar de outra coisa. [...] os signos se referem a algo que se quer comunicar ou representar, sem substituir aquilo ao qual ele está relacionado”, ainda, “os signos revelam conhecimentos sobre o que comunicam ou representam”.

¹³Contexto de referência, segundo Veronez (2013),corresponde ao contexto no qual a atividade de modelagem matemática emergiu ou está associada.Mudando-se o contexto de referência mudam-se os signos produzidos pelos alunos, ou seja, uma atividade de modelagem matemática se associa há vários contextos de referência ao longo do seu desenvolvimento.

que eles não se deparam com problemas rotineiros, tendo que repetir fórmulas, podendo assumir-se como responsáveis por sua aprendizagem, além de terem a oportunidade de refletir criticamente e criar argumentos consistentes.

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), “os verdadeiros problemas na sociedade vêm, muitas vezes, sem a pergunta! Quem dirá as respostas” (p.97). Esses autores consideram que a Modelagem Matemática permite incorporar o saber do aluno nas práticas de sala de aula, bem como retrata a necessidade de conceitos matemáticos para realizar uma aproximação crítica e consciente de soluções obtidas para uma situação problema.

Possibilitar ao aluno o envolvimento com situações da sua realidade, de seu interesse, a ponto que ele compreenda conceitos matemáticos é, portanto, uma característica da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Nesse contexto Almeida, Silva e Vertuan (2013, p.12) expõem que

uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

São as relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos matemáticos estão fundamentados) que contribuem para ativar, produzir e/ou integrar conhecimentos matemáticos e não matemáticos. À situação inicial, problemática, os autores associam ao *lócus* no qual se originou o problema a ser investigado, e à situação final, a uma resposta para esse problema.

Cabe esclarecer que a situação problema associa-se a um aspecto do tema que se deseja investigar; uma delimitação da temática sobre a qual o aluno realizará seus estudos. As perguntas ou questões de investigação são entendidas como o problema a se resolver, ou seja, são elas que originam a atividade de modelagem matemática. Assim, o problema é considerado nessa pesquisa como sendo uma “questão maior” sobre a qual os alunos depreenderão vários conhecimentos (matemáticos e não matemáticos) e manifestarão procedimentos na tentativa solucioná-la, e responder às demais questões elencadas no decorrer da atividade.

Atividades de modelagem matemática possibilitam, portanto, que os alunos se envolvam com um conjunto de atitudes, mediante o qual se define estratégias de ação em

relação ao problema identificado na situação inicial (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013) e que de certo modo aparece implícito nos modelos matemáticos que elaboram.

Esses fazeres e dizeres presentes no processo de busca por uma solução para o problema identificado e/ou estruturado na situação inicial da atividade de modelagem matemática emergem nas fases da Modelagem Matemática, que serão apresentadas a seguir.

1.2.As fases da Modelagem Matemática

As fases da Modelagem Matemática são caracterizadas na intenção de amparar e orientar o desenvolvimento de atividades dessa natureza tendo caráter aberto e flexível. Assim, a ordem em que aparecem pode variar, bem como o tempo destinado a cada uma delas, de acordo com a dinâmica que demanda cada situação e com o movimento de “ida e vinda” entre as fases. Almeida, Silva e Vertuan (2013), definem essas fases como: *inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação*.

A fase *inteiração* refere-se ao primeiro contato com a situação problema, definida como o ato de inteirar-se. Significa que nessa fase é momento de informar-se, tornar-se ciente, tomar conhecimento a respeito da situação. Essa fase da atividade de modelagem matemática acontece a partir da escolha do tema e tem como foco a busca por informações, com vistas a conhecer características da situação em estudo. Nesta fase é o momento de tornar alguns aspectos conhecidos e conduzir a formulação ou identificação do problema matemático, ao mesmo tempo em que se definem metas para a sua resolução.

Se o momento é de tornar o tema conhecido, faz-se necessário consultar fontes como livros, *sites*, revistas, entrevistas com pessoas especialistas no assunto e pesquisa de campo, que embasem e auxiliem a compreensão da situação. Conhecer aspectos da situação em foco sugere pesquisar, registrar e discutir informações e coletar dados – qualitativos e/ou quantitativos – sobre o tema, que sirvam de respaldo para desenvolver a atividade de modelagem matemática.

Como ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática pode surgir a necessidade de novas informações relativas ao contexto do tema escolhido, a *inteiração*, embora seja uma fase inicial, pode estender-se durante todo o desenvolvimento da atividade.

A situação problema identificada na fase *inteiração* geralmente se apresenta em linguagem natural, isso evidencia a necessidade da transição da linguagem natural para a linguagem matemática, momento que Almeida, Silva e Vertuan (2013), denominam *matematização* e definem como

a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por “matematização”, considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas (p.16).

Essa fase, *matematização*, prioriza a descrição matemática do problema, requer a seleção de variáveis, o levantamento de hipóteses e o encaminhamento da elaboração do modelo matemático, levando em consideração aspectos da situação inicial, entendidos como relevantes para o problema investigado (VERTUAN, 2013). A descrição matemática da situação, nesse sentido, possibilita atribuir significado matemático à organização da realidade, ou seja, a *matematização* pode ser descrita como uma tradução de linguagens que permite retratar a realidade por meio de regras, métodos e teorias matemáticas. A fase *matematização*, de modo geral, evidencia técnicas e procedimentos matemáticos a serem utilizados na fase de resolução.

A *resolução* é a fase que consiste na elaboração de um modelo matemático com o objetivo de descrever e analisar aspectos relevantes da situação, responder às questões e à problemática admitida na situação inicial, sendo possível, em alguns casos, realizar previsões para o problema em foco.

Nessa fase o sujeito utiliza conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, põe em uso seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos [...] (VERTUAN, 2013, p.35).

Nessa compreensão o modelo matemático, construído nessa fase, é reconhecido como uma estrutura matemática que representa alguma coisa cuja finalidade pode ser “prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de um conceito), ser descritivo de algo, entre outras coisas” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p.13). Ao utilizar-se de um conjunto de símbolos e

relações matemáticas, que retratam de alguma forma a situação em estudo e direcionam para uma solução para o problema advindo dessa situação é que o modelo matemático pode ser evidenciado. Além de expor e explicar características matemáticas da situação, o modelo matemático carrega características dela.

A obtenção do modelo, dessa forma, é sempre uma aproximação conveniente da realidade analisada, mas que, segundo Bassanezi (1999), não garante a resolução do problema, nem conclui uma verdade definitiva. Assim, se um modelo não atinge a determinados objetivos ou é inadequado para representar a situação em estudo, é natural a busca por novos caminhos que permitam construir outro melhor ou analisá-lo admitindo como referência um modelo já conhecido.

Nesse sentido Veronez (2013), descreve

todavia, a elaboração de modelos matemáticos não tem um fim em si mesma; visa incentivar a busca por uma solução para o problema evidenciado na situação inicial, alicerçada por atitudes interpretativas. Essa busca também conduz a uma leitura da situação ou à retomada de alguns aspectos não considerados em momento anterior. Para além disso, no contexto de sala de aula, favorece discussões sobre conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos (p.24).

A autora deixa claro que a elaboração do modelo não garante a solução do problema, mas que dela decorre a necessidade de interpretar as respostas e verificar se esta satisfaz a situação inicial. Caso contrário, é necessário retomar a situação e adotar outros possíveis encaminhamentos para a resolução do mesmo problema.

Analisar a solução para o contexto da situação inicial constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos com a atividade. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), a fase caracterizada como *interpretação de resultados e validação*, leva em consideração os procedimentos matemáticos e a resposta obtida no sentido de analisar se ela é adequada. É também nessa fase que se avalia o processo de construção de modelos e se valida o(s) resultado(s) para o problema, para, posteriormente, avaliar a resposta quanto a sua validade e importância.

Vertuan (2013, p.36), afirma que caso os alunos que lidam com situação, entendam que a resposta é adequada, eles devem comunicar “a resposta do problema para os outros alunos de modo a argumentar e convencer o outro de que a solução apresentada é razoável e consistente, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da situação inicial”.

Ainda segundo o autor, se a resposta obtida não for aceitável é necessário buscar novas informações, reestruturar as hipóteses e reiniciar o processo, sendo necessário, retornar à situação inicial e rever escolhas e procedimentos.

De modo geral, as fases relativas a uma atividade de modelagem matemática, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), evidenciam alguns aspectos relevantes em atividades dessa natureza que podem ser descritos como: a situação problema que dá início a atividade; os procedimentos de resolução e as soluções, ainda alheios ao conhecimento dos envolvidos; o processo de investigação de um problema; os conceitos matemáticos utilizados e; a análise interpretativa da solução.

Isso implica reconhecer que tão importante quanto a solução para o problema são os encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final.

A resposta para o problema depende, de modo geral, dos encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos e de seus conhecimentos e das intervenções realizadas pelo professor. Todavia, é importante que tais intervenções e a independência dos alunos mantenham certo grau de equilíbrio, de forma a garantir autonomia dos alunos frente ao problema em estudo e em relação às estratégias de resolução adotadas (VERONEZ, 2013, p.27).

Na próxima seção direcionamos nosso olhar para o papel do professor e do aluno, no contexto de sala de aula, durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

1.3. Professor e alunos no contexto de atividades de modelagem matemática

Se uma atividade de modelagem matemática consiste em trabalhar com uma situação problema advinda da realidade e/ou do interesse do aluno, a prática do professor não se baseia em cumprir o conteúdo previsto no currículo. Cabe a esse profissional orientar os alunos para que eles mesmos sejam capazes de identificar problemas reais e desenvolver habilidades de reconhecer a matemática como fonte de interpretação de situações e, inclusive, a possibilidade de solucionar problemas. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p.49), “o nosso papel, como professores, não é simplesmente colocar a Matemática neutra do currículo para os alunos, mas fazer com que eles também tragam situações de fora para dentro da escola”.

Conforme Veronez (2013), no trânsito da situação inicial para a situação final ao longo de uma atividade de modelagem matemática, o professor tem oportunidade de ensinar

Matemática à medida que possibilita aos alunos o envolvimento com conceitos matemáticos e com aspectos de uma situação em estudo. Portanto, segundo a autora, o papel do professor em Modelagem Matemática consiste, de maneira geral, em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a busca por argumentos e razões que possibilitem aos alunos confirmar ou não suas proposições e não apenas seguir padrões.

Entendemos, dessa forma, que há uma quebra de paradigma, em que o professor sai da zona de conforto do trabalho com conteúdos preestabelecidos e isolados e passa a ter atitude dinâmica e desafiadora. Para Dias (2005, p. 42), “a efetivação da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica depende do compromisso do professor e exige deste um conhecimento que não se limita a aspectos teóricos”. A autora destaca ainda que, mais que construir conhecimentos matemáticos, as atividades de modelagem matemática devem constituir para os alunos um instrumento de reflexão, decisão e ação sobre a realidade, ou seja, a formação do aluno enquanto ser social.

Em um ambiente de Modelagem Matemática o papel do professor consiste em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não suas conjecturas. Cabe também ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar o momento de discussão das atividades desenvolvidas pelos alunos o professor precisa tomar o cuidado de valorizar igualmente suas opiniões e resultados obtidos. Por vezes, pode ser útil o professor proporcionar um momento de discussão durante a realização da atividade com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do desenvolvimento da atividade, ou mesmo de enriquecer a investigação sobre o problema em estudo. Esse momento é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre a atividade bem como sobre o papel da Matemática na sociedade (DIAS, 2005, p.43).

Assim, o professor é quem, muitas vezes, conduzirá os alunos a ideias, questionamentos e conhecimentos matemáticos. Isso pode acontecer de maneira espontânea, quando se propõem discussões, ajuda-se a superar dificuldades, motiva-se a investigação e ao promover reflexões matemáticas ou extra matemáticas a respeito da situação problema em contexto.

O papel do professor é, portanto, de orientador do processo de ensino e aprendizagem, o que segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), significa que cabe a ele indicar caminhos e fazer perguntas continuamente, porém sem entregar a resposta, estar em constante aprendizagem, ao mesmo tempo em que mantém a autoridade em sala de aula.

Dessa forma, os alunos são os sujeitos principais e o professor, o orientador do processo. A ênfase reside na relação do aluno com o conhecimento, sendo mediada pelo professor, profissional que precisa estar disposto a colaborar no processo de construção desse conhecimento. Por meio da Modelagem Matemática o aluno poderá relacionar resultados matemáticos a uma situação real, o que possibilita a tomada de decisão perante uma questão do seu cotidiano, como também o reconhecimento de “onde, quando e/ou em que” utilizamos a matemática, indagação de muitos alunos em sala de aula.

Ao reconhecer a matemática em diversas situações no mundo que o cerca, o aluno passa de agente passivo para manipulador de objetos matemáticos, ou seja, “o sujeito do processo cognitivo é o aprendiz, é o aluno” (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS 2013, p.25). Espera-se com isso, que o aluno possa estudar, formular, resolver e decidir e, embora não seja possível ao professor ensinar ou mostrar toda a Matemática que os alunos necessitarão, é preciso habilitá-los a ter confiança para resolver questões relacionadas a sua realidade e/ou ao seu cotidiano extraescolar.

As atividades de modelagem matemática devem apresentar-se, para os alunos, como uma forma de compreender situações da sua realidade, da realidade do seu meio e da sua comunidade, utilizando-se de conhecimentos matemáticos. Afinal, a proposta de trabalhar com o que lhes é significativo possibilita considerar que o aluno não chega à escola como um papel em branco, junto a ele está vinculado seu cotidiano, situações reais, é um indivíduo provido de saberes e experiências que podem ser traduzidos para o universo matemático. Dessa maneira, ao desenvolver atividades de modelagem matemática em sala de aula, o aluno precisa ser o sujeito do processo cognitivo e, além de matematizar situações reais, poderá aprender conteúdos matemáticos e perceber sua aplicabilidade e importância na sociedade (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2013).

Outra característica de atividades de modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, é que essas são potencialmente cooperativas, uma vez que são atividades ancoradas em trabalhos em grupos. O trabalho em grupos oferece aos alunos a oportunidade de desenvolver capacidades de aprendizagem tais como: falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar. Daí a indicação de que atividades de modelagem matemática devem ser desenvolvidas, prioritariamente, em grupo. Conforme Almeida e Dias (2004), um ambiente de cooperação e interação entre os alunos e entre professor e aluno, é fundamental

para a construção do conhecimento, além de estimular a relação com a sociedade, visto que é nela que, geralmente, tem origem a situação problema a ser investigada pelo aluno.

Para Silva (2008, p.82), quando os alunos se envolvem com Modelagem Matemática em grupo “têm a possibilidade de discutir as diferentes estratégias para resolver um mesmo problema, e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos”. Ainda, quando os sujeitos interagem e há conflito, há também benefícios mútuos, pois a interação possibilita ao aluno desenvolver capacidades de aprendizagem e dominar novos conhecimentos.

Faz parte das ações dos alunos, em grupo e/ou individualmente, em atividades de modelagem matemática: questionar, problematizar, sugerir, bem como analisar os dados, a situação e todas as suas restrições e, quando julgarem necessário e pertinente levá-las em consideração.

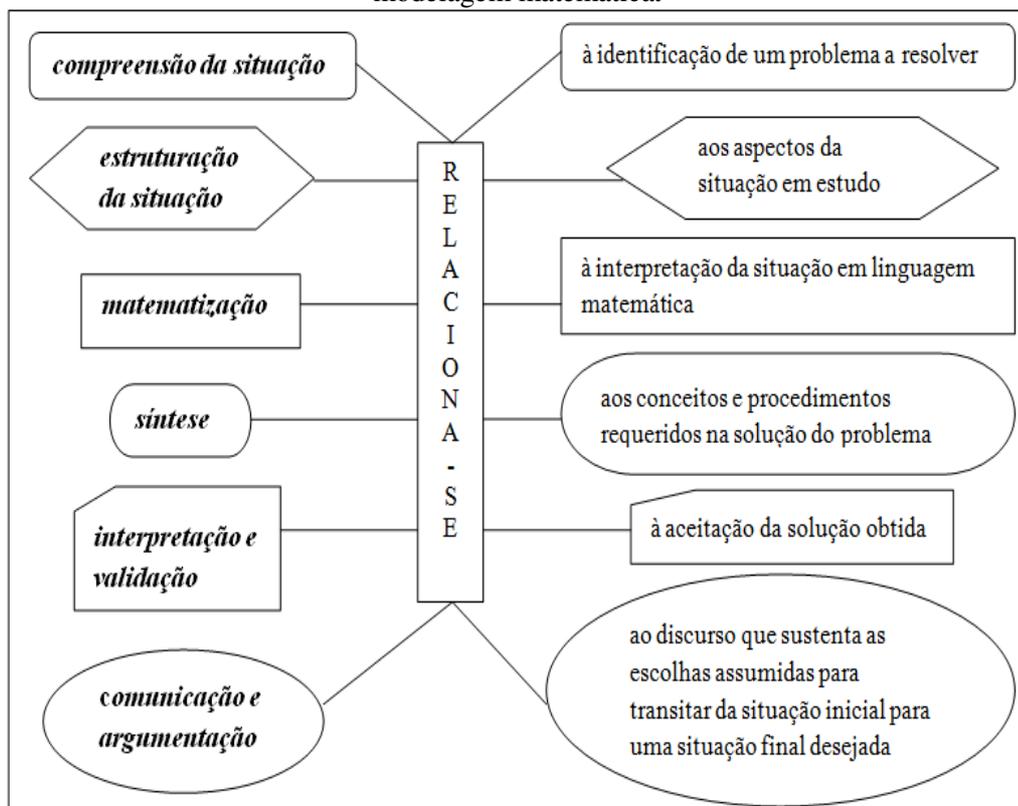
Sendo assim, atividades de modelagem matemática envolvem situações reais e motivam os alunos a identificar a matemática presente nelas, contribuindo na compreensão e construção de um conhecimento matemático mais significativo, crítico e reflexivo. Durante o desenvolvimento desse tipo de atividades os alunos mobilizam uma série de ações cognitivas, descritas na seção a seguir.

1.3.1. Ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática

Na transição de uma situação inicial (problemática) para uma final (solução para a situação inicial) é imprescindível que o aluno assuma alguns procedimentos, que aparecem, de certa forma, associados às suas ações cognitivas, a saber: *compreensão da situação, estruturação da situação, matematização, síntese, interpretação e validação, argumentação e comunicação*. Tais procedimentos estão presentes, de forma implícita nas escolhas que os alunos fazem ou assumem e de forma explícita nas representações utilizadas e na atividade realizada.

Na Figura 1 ilustramos as ações cognitivas dos alunos estabelecendo relações com características fundamentais de uma atividade de modelagem matemática.

Figura 1: As ações cognitivas associadas às características fundamentais de uma atividade de modelagem matemática.



Fonte: Veronez (2017) no prelo.

Considera-se que uma atividade de modelagem matemática inicia-se quando o aluno identifica ou é apresentado a uma situação problema. A partir de então, ele realiza aproximações ou idealizações, busca compreender o problema por meio da interpretação de dados e informações, agrupamento de ideias, apreensão de significados, passa da situação inicial para a representação mental da situação em que o problema é identificado (VERONEZ, 2013). Na transição da situação problema para a representação mental da situação, e na busca por identificar o problema, a ação cognitiva associada é a *compreensão da situação*.

A partir das informações, ideias e significados que o aluno dispõe, deverá fazer a simplificação e estruturação da situação problema em estudo. Assim, logo após a representação mental da situação, segundo Almeida e Silva (2012), os envolvidos com a atividade de modelagem matemática precisam tanto formular o problema quanto definir metas para a sua resolução. A essa ação cognitiva denomina-se *estruturação da situação*.

A evidência de um problema matemático implica na busca por respostas que satisfaçam tal problema. É o momento de transição da linguagem natural para a linguagem

matemática, ou seja, de relacionar características da situação a conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, sendo capaz de representar matematicamente essas características. Na ação cognitiva identificada como *matematização* é o momento de procurar resposta para o problema, fundamentando-se em uma interpretação matemática. Para encontrar a solução para o problema, Veronez (2013, p.34), pontua que “os alunos precisam matematizá-lo, resolvê-lo segundo um conjunto de procedimentos e inferir um resultado”. A ação cognitiva *matematização* direciona o aluno para a construção do modelo matemático, ao passo em que define e avalia hipóteses durante o processo de construção de tal modelo.

Quando o aluno, na sua busca por construir ou utilizar um modelo matemático, utiliza-se também de técnicas, representações, conceitos e métodos matemáticos, encaminha-se à obtenção de resultados para a situação problema, a essa ação cognitiva denomina-se *síntese*. Nessa ação, são ativados os conhecimentos prévios e requerido o uso ou a criação de novas ideias e conceitos matemáticos. Também na ação cognitiva *síntese*, pode haver recorrência a recursos tecnológicos como *softwares*, por exemplo, com o intuito de obter uma representação associada aos objetos matemáticos em estudo.

Após “sintetizar” seus conhecimentos matemáticos para construir e/ou utilizar o modelo, os envolvidos com a atividade passam à análise do resultado obtido como resposta para a problemática levantada na situação inicial, o que constitui um processo avaliativo associado à representação matemática e aos procedimentos matemáticos utilizados. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013, p.18) “o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas.” Essa ação cognitiva é caracterizada como *interpretação e validação*.

O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, a partir de então, leva o aluno à ação cognitiva chamada *comunicação e argumentação*, que segundo Veronez (2013, p.35) “uma vez avaliada a resposta e assumida, por aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem, como sendo razoável ou satisfatória, faz-se importante comunicar tal resposta do problema aos demais alunos da turma.” É um momento de convencimento, de que as estratégias e conceitos matemáticos são consistentes em relação à situação problema inicial.

O envolvimento dos alunos com esse conjunto de ações, conforme enfatizam Almeida, Silva e Vertuan (2013), pode ser mais ou menos intenso, o que depende dos seus conhecimentos e da sua familiaridade com atividades de modelagem matemática. Ainda

decorrentes dessas ações cognitivas, podem ser identificados alguns procedimentos manifestos pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Em contexto da sala de aula os alunos manifestam diversos procedimentos que lhes permitem interagir com os colegas, com o professor, compreender conceitos, refletir sobre sua forma de pensar e encarar as situações que lhes são proposta, entre outros. O que discutimos neste trabalho são, especificamente, os procedimentos manifestos pelos alunos em associação às ações cognitivas em Modelagem Matemática.

2. Aspectos metodológicos do estudo

Neste capítulo apresentamos as opções metodológicas adotadas no desenvolvimento desta pesquisa. Sendo assim, indicamos qual abordagem metodológica sustenta a presente pesquisa, bem como o cenário investigado. Também, descrevemos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas, os instrumentos utilizados na coleta de dados e como se deu tal coleta. Por fim, elucidamos o processo de análise dos dados.

2.1. Caracterização da pesquisa

Nossa opção metodológica para o presente estudo é a abordagem qualitativa por acreditarmos que esta possibilita compreensão de certos fenômenos e do sujeito em suas especificidades.

Segundo Prodanov e Freitas (2013), a pesquisa qualitativa leva em conta a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números, por isso, esse tipo de pesquisa não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. A fonte direta da coleta de dados é o ambiente natural, e o pesquisador, que mantém contato direto com o ambiente e o objeto em estudo, é o principal instrumento de coleta. Ao pesquisador, nesse tipo de pesquisa, cabe analisar os dados indutivamente, tendo como foco de abordagem o processo e seu significado e não apenas o produto final. Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, etc. (GOLDENBERG, 1999, p. 14).

Esse tipo de pesquisa consiste em descrever, detalhadamente, situações com a finalidade de compreender os indivíduos em seus próprios termos, assim, os dados coletados são predominantemente descritivos. Apesar de não admitir regras precisas, a pesquisa qualitativa pode ser aplicada a diversos casos, tendo caráter compreensivo e interpretativo.

Neste estudo, uma vez que o objetivo é investigar os procedimentos manifestos pelos alunos decorrentes de suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática, seguimos orientações da abordagem qualitativa ao buscar compreender em certo grau de

complexidade as entrelinhas dos dados coletados, à luz dos referenciais teóricos adotados no Capítulo 1.

2.2.O cenário de investigação

O presente estudo foi desenvolvido em um colégio estadual do interior do município de Guamiranga - PR, em duas turmas de 8^o ano do turno da manhã, durante um semestre letivo. Essas turmas denominadas 8^o A e 8^o B são compostas por 18 alunos em cada turma. A turma A tem 7 alunos do sexo masculino e 11 do sexo feminino e a turma B, 6 alunos do sexo masculino e 12 do sexo feminino. Todos os alunos residem na comunidade em que a escola está instalada, ou seja, em uma zona rural do município.

Para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, que se iniciou no dia 9 de novembro de 2015 e se estendeu até o dia 17 de dezembro do mesmo ano, os alunos sempre eram agrupados em trios, por considerar importante um número ímpar de participantes na composição do grupo, devido ao fato de que impede que haja empate ou empate na tomada de decisões. Cada uma das turmas tinha 5 aulas semanais da disciplina de Matemática, totalizando 35 aulas, em ambas as turmas, no período indicado. Dessas 35 aulas, 20 foram destinadas ao tema Erva-Mate, sugerido pela professora e no qual todos os alunos foram envolvidos e 15 foram destinadas às atividades de modelagem matemática com temas escolhidos pelos próprios alunos.

A pesquisadora era professora da disciplina de Matemática nas duas turmas e conhecia em parte a realidade dos alunos, da escola e do lugar, o que facilitou a comunicação e o contato com os alunos, bem como a organização do tempo. Tais atividades também estavam previstas no Plano de Trabalho Docente bimestral da disciplina.

2.2.1. As atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Posto que o tema pode ser escolhido pelos alunos, pelo professor ou por um acordo entre ambos (VERONEZ, 2013), a primeira atividade de modelagem matemática descrita, cujo tema foi Erva-Mate, foi proposto pela professora.

A partir da solicitação da professora, os alunos identificaram várias questões relativas a esse tema, dentre eles destacam-se:

Quadro 1. Questões propostas pelos alunos.

- 1) *Qual é a relação que existe entre a área de Erva-Mate cultivada, o tempo para extração e a quantidade de Erva-Mate para chimarrão produzida (em fardos)?*
- 2) *Qual a distância entre um pé de Erva-Mate e outro é a mais apropriada para plantá-la? Qual a diferença (em porcentagem) da quantidade máxima de mudas que se pode plantar em um terreno, se compararmos as medidas de distância de plantio fornecidas pelo produtor e aquelas encontradas na internet?*
- 3) *Qual o melhor intervalo de tempo para realizar a colheita de erva-mate, de modo a obter maior produção?*
- 4) *Existe uma fórmula matemática capaz de descrever a produção de Erva-Mate dependendo da área de cultivo em relação à distância do plantio entre uma muda e outra e o tempo de extração?*

Fonte: Autoras.

Destas 4 perguntas, trazemos para análise a 1 e a 4, por se constituírem nas duas situações que apresentaram mais material para análise, que envolveu mais variáveis matemáticas e que contém mais elementos para discussão.

Finalizada a atividade da Erva-Mate, a professora sugeriu, visando continuar a trabalhar com atividades de modelagem matemática, que o tema fosse escolhido pelos grupos de alunos, temas que fossem de seu interesse, da sua realidade ou que tivessem disposição em estudar sobre determinado assunto.

No início foi perceptível que alguns grupos escolheram seus temas sem conversar, trocar ideias ou debater possíveis problemas e objetivos de estudo. Assim, a presença do professor foi indispensável para orientar na escolha do tema, questionar quais aspectos seriam relevantes no trabalho e qual o foco de estudo, visto que em grande parte dos casos os alunos apresentavam um tema muito amplo e com várias possibilidades de investigação. Os temas e situações problema identificadas são descritos no Quadro 2.

Quadro 2. Temas e questões propostas pelos alunos.

Tema	Questões
1) O estudo de motos	<i>Qual a relação entre o tamanho do aro da roda da motocicleta e distância percorrida quando essa roda completa uma volta? Quanto (em R\$) uma moto gasta para percorrer 1 km?</i>
2) Produção de milho	<i>Dependendo do tamanho dos silos, qual sua capacidade de ‘armazenagem’ de milho? [sic]</i>
3) Produção de feijão	<i>Qual a diferença do preço do kg de feijão vendido em sacos se comparado com o feijão embalado que compramos no mercado?</i>
4) Cultivo de maracujá	<i>Como acontece o ciclo do maracujá? Qual o período de tempo necessário para a produção gerar lucro?</i>
5) Fumicultura	<i>Grupo A - Qual o volume que as bonecas de fumo diminuem ao serem prensadas na enfardadeira? Grupo B - Em uma colheita, qual é a produção estimada de fumo (considerando ele seco sua classe e a produção em kg)? Qual a diferença de produção do baixeiro¹⁴ e da ponteira¹⁵?</i>
6) Planetas do Sistema Solar	<i>Maquete da distância até o Sol, da temperatura e do tamanho do raio de cada planeta do sistema solar.</i>
7) Música	<i>De quantas maneiras podemos escutar algumas Músicas, da dupla Jorge e Mateus, mudando a ordem em que elas tocam?</i>
8) Futebol	<i>Quais as principais diferenças entre o jogo de futebol de campo e futsal?</i>
9) WhatsApp	<i>Como, para que e porque os colegas utilizam o whatsApp?</i>
10) Dinossauros	<i>Em escala, qual a relação entre a altura de um dinossauro e a altura de uma pessoa?</i>
11) A fábrica de Erva-Mate	<i>Como funcionam as principais máquinas de produção de Erva-Mate para chimarrão?</i>

Fonte: Autoras.

Todos os temas e situações problema, citados no quadro acima, foram trabalhados pelos grupos em sala de aula. Nessas atividades a professora instigava a investigação acerca do tema definido, por meio de pesquisa na internet, em revistas e jornais, o que lhe permitia identificar os principais aspectos enfatizados pelos alunos durante tal pesquisa. A partir de

¹⁴ Folhas situadas na parte inferior da planta, conhecidas também como as primeiras folhas da planta de tabaco; são folhas de textura laminar fina, formato mais arredondado e com espessura de talo e nervuras mais finas (Fonte: ABIFUMO. Disponível em: http://www.abifumo.org.br/teste/legbra/pop/01_01.htm. Acesso em 11/16).

¹⁵ Últimas folhas do pé, de textura laminar de média a encorpada ou grossa, formato lanceolado e com espessura do talo e nervuras de média a encorpada ou grossa (Fonte: ABIFUMO).

então, a professora selecionava, e levava para sala de aula, recortes com informações relativas a tais aspectos. Essa atitude facilitava o processo de pesquisa ao mesmo tempo em que permitia que os alunos, de posse dos materiais, optassem por utilizá-los (ou não) para desenvolver ou complementar sua atividade.

Em cada aula a professora realizava um *feedback* rápido sobre o que os alunos já haviam desenvolvido até então, para eles se situarem sobre o que já tinham e quais encaminhamentos tomariam para prosseguir com a atividade; para o aluno entender que havia uma continuidade no estudo.

2.3.As atividades de modelagem matemática detalhadas neste estudo

Dentre os temas e situações problemas propostos e desenvolvidos pelos alunos em sala de aula, selecionamos quatro deles para descrever com detalhes, com vistas a exemplificar as atividades de modelagem matemática originadas desses temas e que contribuíram para o processo de análise dos dados coletados e discussão dos resultados, sendo eles: Erva-Mate (sob o enfoque de dois grupos distintos, aqui denominados grupo A e grupo B), Planetas do Sistema Solar e Milho.

O tema “Erva-Mate” foi proposto pela professora, devido ao fato de ser um tema recorrente no dia a dia da comunidade local. Para o desenvolvimento da atividade, embora toda a turma tenha sido envolvida, analisamos apenas dois grupos de alunos e como eles se envolveram com essa atividade de modelagem matemática.

No primeiro grupo analisado, o qual tratamos por grupo “A”¹⁶ da Erva-Mate, notamos que o encaminhamento dado a essa atividade teve como finalidade investigar a quantidade de Erva-Mate produzida em determinada área, de terreno em forma de quadrado, levando em consideração o intervalo entre as colheitas. Os alunos matematizaram a situação utilizando dados obtidos por meio de uma pesquisa de campo realizada com proprietário e funcionários de uma ervateira da região. O resultado foi expresso por meio da construção de uma tabela e apresentado por meio de exposição de estratégias e métodos matemáticos utilizados para se chegar as respostas.

¹⁶ Composto por três alunas, tratados de **Ma**, **Bi** e **Na** com idades entre 13 e 14 anos. As alunas que integram o grupo eram participativas em todas as aulas e apresentavam um bom desempenho em Matemática. Esse grupo foi o que houve maior interação entre as alunas.

O segundo grupo, que nomeamos de grupo “B”¹⁷ da Erva-Mate, também desenvolveu a mesma situação problema com essa temática, porém buscou construir fórmulas matemáticas capazes de conduzir a resultados de maneira prática e válida para outras medidas de comprimento de qualquer terreno retangular. O desenvolvimento dessa atividade exigiu retomar conhecimentos, ao passo que relembavam conceitos matemáticos (tais como o conteúdo de frações), bem como explorar novas representações e técnicas para chegar a uma representação algébrica dos procedimentos matemáticos utilizados, obtendo-se assim fórmulas que possibilitassem a resolução da situação problema em estudo.

O grupo “A” da Erva-Mate constitui objeto de análise em outro contexto, já que analisamos esse mesmo grupo na atividade de modelagem matemática com a temática “Planetas do Sistema Solar”. Esse tema foi escolhido pelos próprios alunos devido ao seu desejo em construir uma maquete capaz de apresentar as principais características dos planetas do Sistema Solar. Nessa atividade os alunos tiveram grande dificuldade em definir a situação problema a ser estudada. O resultado final se deu por meio da construção de uma maquete ilustrativa com característica como a distância até o Sol, circunferência e raio equatorial e temperatura. Esse grupo figura, portanto, nas nossas análises em dois contextos distintos: na atividade da Erva-Mate, cujo tema foi sugerido pela professora; e na dos Planetas, na qual o tema foi escolhido pelos alunos do grupo.

O quarto grupo¹⁸ analisado, que se dedicou a desenvolver uma atividade de modelagem matemática com a temática “Milho”, afirmou que o tema não tinha relação direta com o cotidiano, porém era um tema que tinham curiosidade em aprender sobre. Nessa atividade os alunos definiram como problema de investigação a seguinte questão: Qual a capacidade de “armazenagem” de milho dos silos cilíndricos? Seus resultados apontam que tanto o raio como a altura do silo cilíndrico influenciam no volume de armazenamento, mas

¹⁷O grupo B da Erva Mate era composto por duas meninas e um menino, denominados como **Ca**, **El** e **Gi**, com a faixa etária entre 13 e 14 anos. **Ca** era a que apresentava maior dificuldade de aprendizagem, mas estava sempre disposta a aprender. **El** tinha facilidade com cálculos, porém se confundia com os métodos e representações algébricas. **Gi** ajudou na atividade, embora fizesse poucas intervenções.

¹⁸O grupo que desenvolveu a atividade com a temática Milho era constituído por três meninas, **Al**, **El** e **Lu**, que também apresentavam idade entre 13 e 14 anos. Nesse grupo é notório a grande influência de **El** sobre as demais, bem como o domínio dos encaminhamentos e estratégias para o desenvolvimento da atividade. Essa aluna apresentava bom domínio sobre conceitos e métodos matemáticos. Enquanto **Al** e **Lu** ajudavam nas discussões e contribuíam com sugestões de procedimentos. Vale ressaltar que o aluno denominado **El** desse grupo do milho não é o mesmo **El** do grupo B da Erva-Mate, inclusive, eles são de turmas distintas.

que se aumentado ambos na mesma proporção o raio possibilita maior capacidade que a altura.

Na seção a seguir apresentamos os instrumentos de coleta de dados utilizados pela pesquisadora enquanto os grupos desenvolviam suas atividades de modelagem matemática.

2.4.A coleta de dados

Para o processo de coleta de dados, além dos registros dos alunos, produzidos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, foram utilizadas gravações em áudio e em vídeo. Os dados coletados forneceram subsídios para identificar, classificar e analisar os procedimentos assumidos pelos alunos, decorrentes das suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática e serviram como base para compreensão de aspectos que permearam o desenvolvimento de tais atividades.

Gravações em áudios foram realizadas ao longo do desenvolvimento desta pesquisa e, esporadicamente, gravações em vídeo também complementavam a coleta de dados. No que diz respeito aos dois gravadores, que estavam ligados o tempo todo, um estava fixo em um determinado grupo e o outro a professora levava com ela ao movimentar-se entre os demais grupos. O grupo cujo gravador ficou ligado em tempo integral foi escolhido pela professora devido ao envolvimento dos alunos desse grupo para com a atividade proposta, isto é, aquele grupo cujos alunos apresentavam maior comprometimento com a atividade. A câmera foi usada em momentos específicos para registrar a organização dos grupos, o material utilizado por eles, suas representações escritas, seus esboços e questionamentos a respeito das anotações matemáticas e dos conteúdos envolvidos. A cautela ao utilizar-se da câmera se deu devido ao fato de que esse material muitas vezes inibia as atitudes dos alunos ao desenvolver suas atividades.

As gravações em áudio realizadas no início da pesquisa deixaram os alunos tímidos e apreensivos, mas com o passar das aulas, eles começaram a agir normalmente e em alguns momentos, esqueciam a presença do material. O diálogo transcrito aluno-aluno, aluno-professor, grupo-professor e grupo-grupo, foi elemento imprescindível para a análise do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, dando ênfase aos procedimentos

manifestos. Para tanto, as aulas gravadas em áudio foram transcritas para a realização da análise.

Além de material gravado (vídeo e áudio), recolhemos para análise alguns registros escritos das atividades dos alunos realizados em folhas de caderno, à parte, e cartazes ilustrativos, os quais os grupos elaboraram na intenção de comunicar os resultados obtidos aos demais grupos da sala.

Vale ressaltar que os registros (gravações de áudio e vídeo e escritos) foram realizados com o conhecimento e autorização dos alunos, cientes ao assinarem o Termo de Assentimento para o Adolescente (Anexo 2), bem como o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos Pais/Responsáveis (Anexo 1), por envolver adolescentes entre 12 a 16 anos, além da Carta de autorização/anuência assinada pela direção da escola (Anexo 4) e pela chefia do Núcleo Regional de Educação (Anexo 3), conforme instrução do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICENTRO.

2.5.O processo de análise dos dados

Para o tratamento dos dados coletados baseamo-nos na análise de conteúdo proposta por Bardin (1979) e que consta de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na pré-análise realizamos a leitura e interpretação das atividades desenvolvidas pelos alunos, transcrevemos seus diálogos, assistimos vídeos e selecionamos o material escrito de forma a organizar os dados coletados para facilitar sua análise. A segunda fase, referente à exploração do material, identificamos os procedimentos decorrentes das ações cognitivas dos alunos, no seu envolvimento com atividades de modelagem matemática. Nesse momento, surgiram evidências das intervenções do professor e, algumas delas, tiveram papel decisivo nos procedimentos dos alunos. Na fase final, de tratamento dos resultados, foram analisados todos os procedimentos manifestos pelos alunos e as intervenções do professor. Em decorrência dessa análise emergiram categorias de procedimentos que aparecem descritas na seção Resultados e Discussão.

Nos diálogos apresentados, visando manter o anonimato dos alunos, os denominamos por suas duas primeiras letras do primeiro nome. A fala da professora pesquisadora é indicada

pela abreviatura *Prof.*. Os diálogos são trazidos em forma de Episódios que representam recortes que retratam as principais discussões dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Como foram desenvolvidas várias atividades de modelagem matemática, optamos por apresentar três delas de forma mais descritiva, e as outras consideradas em âmbito geral. Sendo assim, uma análise cuidadosa se deu sobre a atividade da Erva-Mate devido ao fato de ter sido proposto pela professora às duas turmas, concomitantemente, bem como pelo tempo despendido na realização dessa atividade e sobre as atividades cujos temas são: Milho e Planetas do Sistema Solar, que foram sugeridos pelos alunos.

Para análise da atividade da Erva-Mate selecionamos o material de dois grupos de alunos, sendo um da turma A e outro da turma B. Tais grupos foram escolhidos por apresentarem maior envolvimento com a atividade e também pela interação do grupo. A partir dos diálogos (áudios transcritos), dos vídeos e das anotações e registros dos alunos, buscamos identificar indícios de procedimentos decorrentes das ações cognitivas dos alunos ao longo do desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática.

No trabalho com o tema “Planetas do Sistema Solar”, embora os alunos tenham apresentado grande dificuldade em formular o problema, conseguiram desenvolver a atividade de modo a abarcar uma série de conhecimentos matemáticos e não matemáticos além de que, a atividade proporcionou inúmeras discussões ao longo do trânsito da situação inicial para a situação final. Vale destacar que o grupo que desenvolveu este tema é um dos que analisamos na atividade de modelagem matemática com o tema Erva-Mate. Tal escolha nos possibilita olhar para um mesmo grupo de alunos em dois contextos distintos: um no qual o envolvimento deles se dá a partir de um tema proposto pelo professor, e outro no qual o tema é sugerido pelo próprio grupo.

A escolha pela atividade com o tema “Milho” se justifica pelo fato de que percebemos a diversidade de recursos e procedimentos utilizados pelos alunos para resolver a questão evidenciada. Isso nos leva a considerar que os dados obtidos durante o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática, nesse grupo, podem constituir uma rica fonte de informações e indicações para a realização de futuras atividades dessa natureza.

3. Descrição e análise – um olhar para os procedimentos dos alunos.

Neste capítulo apresentamos o nosso olhar para os dados coletados e que configurou a análise desta pesquisa. Apresentamos, portanto, considerações acerca de quatro atividades de modelagem matemática desenvolvidas com alunos do Ensino Fundamental, com os temas: Erva-Mate, Milho e Planetas do Sistema Solar. No decorrer das análises, discutimos os procedimentos manifestos pelos alunos decorrentes de suas ações cognitivas durante o desenvolvimento dessas atividades de modelagem matemática.

3.1. Atividade Estudo da produção de Erva-Mate: Grupo A

O tema Erva-Mate foi proposto pela professora da turma, que optou por estudá-lo devido ao fato de que na região na qual os alunos residem há inúmeras propriedades que cultivam a planta e três indústrias que beneficiam erva-mate para a comercialização e, portanto, há um considerável número de trabalhadores nessa área, dentre eles, familiares dos alunos.

Após breve familiarização com o tema, os alunos *Ma*, *Bi* e *Na*, que compõem o grupo que desenvolveu essa atividade, se organizaram e como não tinham definido um problema para resolver passaram a discutir sobre possíveis questões para investigação. O Episódio 1 retrata o momento em que esses alunos discutem sobre a seleção de um problema a resolver.

Episódio 1

Ma: Depois de quantos anos a erva pode ser podada? E de quanto em quanto tempo?
[...]

Ma: Se a gente perguntasse sobre o processo dela?

Na: O processo nós sabemos. Só que não me lembro. Se eu interrogasse alguém?

Ma: Teu pai não sabe?

Bi: O pai até sabe, mas... Vamos lá, qual é a pergunta?

Ma: E se perguntasse o tamanho do pé?

Bi: E podar? Podar é o mesmo que colheita né?[sic]

Ma: É.

[...]

Ma: Que quantia aproximadamente de erva cabe em um 'bag'?

Bi: E arroba? Eu sei que tem alguma coisa a ver com erva.

Ma: Será que tem como saber em arroba depois que ela está empacotada?

Bi: Professora... Né que erva é vendida em arroba. [sic]

Prof.: Sim. A erva-mate quando sai do campo ela é vendida em arroba.

Ma: Dá para perguntar quanto que está a arroba.

Bi: Mas daí como que nós falamos? Quanto que está a arroba?

Na: É 20 reais.

Prof.: Qual é o preço pago...

Na: Em uma arroba?

Bi: Professora... Qual é o preço pago por uma arroba?

Prof.: Isso.

Ma: Quanto está sendo cobrado o quilo de erva?

Bi: O quilo ou o quilograma? Eu acho que tem o de 500 gramas. O pacote de 500 g e de 1 kg.

Na: É quilograma?(Pergunta para anotar no caderno)

Ma: É.

[...]

Ma: Quantas arrobas de erva podem ser produzidas em 2km^2 ?

Bi: Mas daí nós vamos sofrer porque não sabemos responder. Pergunte para a professora. Professora venha aqui!

Ma: Professora, nós podemos fazer uma pergunta tipo assim: Quantas arrobas de erva podem ser produzidas em 2 ou 3 km^2 ?

Prof.: Podem!

Notamos no diálogo que os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios acerca do tema para identificar perguntas relevantes a serem pesquisadas. Por exemplo, eles têm o conhecimento de que “a erva é vendida em arroba”, então afirmam que “dá para perguntar quanto que está a arroba”. Ao entrar em contato com informações sobre o tema e identificar problemas a investigar, os alunos chegam à conclusão que o mais indicado a resolver são perguntas pontuais, amparadas na ideia de que lhes daria menos trabalho e despenderiam menos tempo para respondê-las. Quando o aluno sugere investigar “quantas arrobas de erva pode ser produzida em 2km^2 ?”, o colega declara que “daí nós vamos sofrer porque não sabemos responder”, há evidências de que as escolhas dos alunos pautam-se no que eles consideram perguntas fáceis ou difíceis de responder.

Esses procedimentos, de levantar questões a partir de aspectos já conhecidos pelos alunos e de assumir as perguntas que lhes parecem mais fáceis de resolver, sugerem que a ação cognitiva *compreensão da situação* possibilitou que eles olhassem para o tema buscando delimitar problemas para investigação, na intenção de conhecer mais sobre a Erva-Mate.

Ainda decorrente dessa ação, percebemos que o fato dos alunos elencarem algumas questões, permitiu-lhes realizar estudos mais direcionados sobre o tema por meio do procedimento de pesquisas na internet e de campo. A pesquisa de campo constituiu-se de uma

visita orientada a uma indústria ervateira na comunidade, na qual os alunos tiraram dúvidas e coletaram informações com o proprietário e os funcionários do local, além da observação e registro por meio de vídeos e fotos dos equipamentos, máquinas e forma de produção da Erva-Mate para chimarrão.

A partir das informações que os alunos obtiveram, a ação cognitiva *estruturação da situação* favoreceu que eles repensassem as questões escolhidas e direcionassem o encaminhamento que tomariam ao assumir algumas dessas informações como sendo relevantes. Tais informações aparecem descritas no Quadro 3.

Quadro 3. Resumo de informações relevantes sobre Erva-Mate.

<p>Informações obtidas na pesquisa na internet</p> <p>Distância de plantio: 1,5 m x 3 m. Altura da planta: 12 a 15 metros. Tempo de poda: a cada 2 anos. Comercialização: Uma arroba equivale a 15 kg. Preço médio da arroba verde: aproximadamente R\$15,00. Preço do pacote (1 kg) de Erva-Mate para chimarrão: aproximadamente R\$ 9,00.</p> <p>Informações obtidas na pesquisa de campo</p> <p>Sobre o rendimento da colheita (poda) da Erva-Mate de acordo com o tempo: A cada 4 anos, um pé de erva mate rende em média 2 kg. A cada 6 anos, um pé de erva mate rende em média 6 kg. A cada 15 anos, um pé de erva mate pode render, em média, 30 kg. Ervas nativas mais antigas da propriedade podem render em média 150 a 200 kg. Distância de plantio: 1,5 m x 1,5 m. Beneficiamento e industrialização: Uma arroba verde rende aproximadamente 7,5 kg de erva seca. Chega a produzir em média 50 fardos, isso representa 1.500 pacotes por dia, embora tenha capacidade para produzir 400 pacotes por hora, mas devido a outros fatores a produção é reduzida.</p>

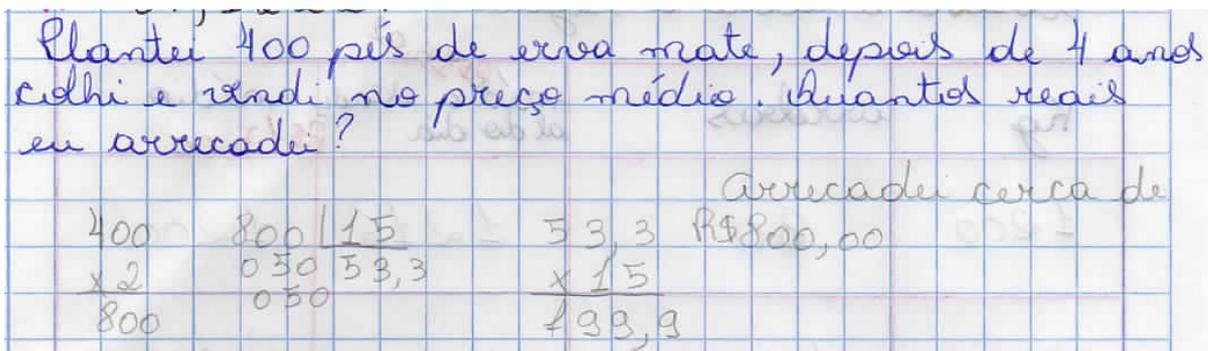
Fonte: Autoras.

O procedimento de resumir as informações indica que os alunos refletiram acerca dos dados obtidos para poder elencar aspectos que consideravam importantes, bem como simplificaram a situação em estudo.

Ao analisar os dados e avaliar o quê de mais significativo a situação apresenta, o procedimento dos alunos foi reescrever as questões em linguagem matemática, ou seja, os alunos buscaram elaborar (novas) perguntas e/ou problemas utilizando as informações que tinham disponíveis, conforme sugerido pela professora. Essa transição de linguagens representa a ação cognitiva *matematização*, que proporciona aos alunos, a partir de

informações consideradas relevantes, reestruturar suas questões em forma de perguntas matemáticas, conforme a Figura 2 a seguir.

Figura 2: Problemas rotineiros elaborados pelos alunos.



Fonte: Registro dos alunos.

Apesar de a professora sugerir a reestruturação de questões ou problemas de modo a deliberar sobre o que investigar acerca do tema, a forma como os alunos escreveram a pergunta parece um problema comumente encontrado em livros didáticos. Tal pergunta (Figura 2), entretanto, embora não favorece uma investigação, serve como uma ideia inicial a ser amadurecida pelos alunos, com a mediação da professora e de forma conjunta entre os colegas. Após levantar questões dessa natureza, acerca da quantidade de Erva-Mate colhida, da análise de custos, quantidade de pacotes de 1 kg de Erva-Mate para chimarrão, entre outras, e respondê-las, os alunos passam a estruturar uma questão a ser investigada. Ampliar o conhecimento acerca do tema, a partir das perguntas elencadas e respondidas, possibilitou aos alunos estruturar tal questão. O procedimento manifesto pelo aluno de identificação de um problema a resolver, partindo de perguntas matemáticas rotineiras, denota que a ação cognitiva *compreensão da situação*, proporcionou aos alunos olhar para a situação e deliberar que a investigação seria sobre: *Qual é a relação que existe entre a área de Erva-Mate cultivada, o tempo para extração e a quantidade de Erva-Mate para chimarrão produzida (em fardos)?*

Definido o problema a investigar, os alunos reconheceram a necessidade de pensar nos próximos encaminhamentos para a atividade de modelagem matemática, tais como: simplificar informações e definir metas e estratégias para avançar na resolução do problema. O procedimento manifesto foi a construção de um quadro que visava organizar as variáveis, o que sinaliza a mobilização da ação cognitiva *estruturação da situação*, pois indica que o

aluno buscou simplificar e padronizar a situação em estudo a fim de facilitar processo de resolução do problema em foco.

O olhar dos alunos para a situação problema aconteceu de forma fracionada para que, posteriormente, fosse possível associar os elementos parciais obtidos e construir a solução final. Essa forma de resolver o problema “por partes” para entender “o todo” é uma forma de simplificar a situação em estudo definindo metas sobre como resolvê-la, ou seja, foi um procedimento adotado pelos alunos. Auxiliados pela professora, simplificaram o problema de modo a obter, primeiramente, os resultados parciais, que colaborariam na resposta final. O procedimento manifesto, que foi a opção pela resolução “por partes”, sinaliza que a ação cognitiva *estruturação da situação* possibilitou aos alunos simplificação das informações e o entendimento da situação.

Tal simplificação foi organizada por meio de um quadro contendo as variáveis: *lado do terreno(m)*; *área do terreno (m²)*; *quantidade máxima de pés de Erva-Mate cultivados na área*; *quantidade de Erva-Mate produzida (pronta) e quantidade de fardos*. Cada uma dessas variáveis constituía colunas do quadro e foi entendida como uma “parte” da resolução do problema.

O Quadro 4 é um exemplo que representa a quantidade de Erva-Mate produzida e o número de fardos obtidos nessa produção, considerando-se o tempo de colheita de 4 anos.

Quadro 4. Quadro elaborado pelos alunos para resolver a situação problema.

Medida do lado do terreno quadrado (m)	Área do terreno (m ²)	Quantidade máxima de pés de Erva-Mate	Quantidade de Erva-Mate (seca) produzida (kg)	Quantidade de fardos produzidos e pacotes de 1 kg restantes
30	900	400	400	13 e 10 kg
40	1600	676	676	22 e 16 kg
50	2500	1089	1089	36 e 9 kg

Fonte: Autoras.

O Episódio 2 retrata o procedimento de interpretação dos dados matemáticos, realizado pelos alunos para resolver o problema, mobilizado na ação cognitiva *matematização*, e que favoreceu ao grupo definir estratégias de resolução a partir desses dados matemáticos.

Episódio 2

Bi: Professora, como tem que fazer?

Prof.: Desenhe um terreno quadrado e considere que seus lados medem 30 metros de comprimento. (Esboçam o desenho no caderno e colocam as medidas do comprimento dos lados) Qual a distância de plantio entre mudas de erva-mate, segundo informações do funcionário da ervateira?

Bi: Um.

Ma: Um e meio.

Prof.: Isso, um e meio. Então quantos pés de erva é possível plantar nesse lado com 30 metros? (aponta para o desenho).

Bi: Tem que fazer 30 dividido por 1,5(usam a calculadora).

Prof.: Isso.

[...]

Bi: Dará 20.

Prof.: Isso, 20. Mas se considerarmos apenas uma leira, uma fila. Quantas filas de 20 cabem nesse terreno?

Ma: Daí faz 20 vezes 20.

Bi: Dará 400.

[...]

Prof.: E a quantidade de erva verde, colhida lá no campo?

Bi: Faz 400 vezes 1.

Prof.: Aqui estamos considerando a cada 4 anos. Quantos kg de erva verde rendem cada pé se a colheita for realizada a cada 4 anos?

Ma: 400 pés vai dar... Tem que fazer...

Bi: 400 vezes 2.

Ma: Vai dar 800.

Bi: Mas a quantidade de erva depois de seca diminui a metade. Então dá 400.

Prof.: E quantos fardos? Um fardo tem quantos pacotes?

Bi: 30 pacotes e cada pacote tem 1 kg. Então um fardo tem 30 kg.

Prof.: Isso. Então esses 400 kg rendem quantos fardos?

Ma: Temos que fazer 400 dividido por 30. (Utiliza calculadora) Resulta em 13,333...

Nesse Episódio aparece o modo como o grupo de alunos fez para iniciar a resolução do problema identificado. O primeiro passo foi definir a medida do lado do terreno, decidindo por meio de um acordo que o formato seria de um quadrado. Depois, calcularam a área de tal terreno e em seguida a quantidade máxima de pés de Erva-Mate que poderia ser cultivada no terreno dado, considerando que a distância de plantio seria de 1,5 m. Definida a quantidade de árvores de Erva-Mate produzida, calcularam a quantidade de erva que poderia ser obtida com a extração, de acordo com o intervalo de colheita e, conseqüentemente, a quantidade de fardos de Erva-Mate pronta para comercialização.

O procedimento de resolver as situações matemáticas, como “faz 20 vezes 20”, “dá 400” e “temos que fazer 400 dividido por 30. Resulta em 13,333...”, mobilizado na ação cognitiva *síntese*, permitiu aos alunos utilizar o recurso da calculadora para inferir alguns resultados.

Depois de desenvolver os cálculos, os alunos realizaram uma discussão com a presença e intervenção da professora, que sugere o entendimento e análise dos resultados obtidos. Esse diálogo está transcrito no Episódio 3.

Episódio 3

Prof.: Qual o resultado?

Ma: 13,3333... A gente precisa colocar todos esses números?

Prof.: Certo. Mas antes vamos pensar. Quantos fardos “inteiros” ou “completos” é possível fazer com essa quantidade de erva?[sic]

Bi: 13 inteiros.

Prof.: Por quê? (silêncio) É possível eu chegar ali na ervateira e pedir “vírgula 33” fardos?

Na: Não. Mas e daí?

Prof.: Esse “vírgula 33” indica que, além dos 13 fardos completos, ainda sobrou alguma coisa.

Ma: Sobrou o que? Não estou entendendo.

Bi: A gente usa “vírgula 33” mesmo?(faz na calculadora) Aparece o zero na frente.

Prof.: Se você tirou os 13 inteiros o que sobrou? Faça a subtração: 13,33 menos 13.

Ma: Sobrou 0,33 o que?

Prof.: Os fardos eram formados de que?

Bi: De pacotes de 1 kg de erva. Então vai sobrar pacotes. Mas como vamos saber?

Prof.: Quais são as duas variáveis que vocês têm?

Ma: Fardos e pacotes.

Prof.: Então escreva isso no caderno [Esboçam no caderno]. Agora vocês sabem que 1 fardo tem quantos pacotes?

Bi: 30 pacotes.

Prof.: Logo, 0,33 do fardo será quantos pacotes?

Ma: Então 1 é igual a 30 e 0,33 é x? Daí faz “esse vezes esse e esse vezes esse”. [sic]

As indagações realizadas pela professora favoreceram aos alunos um repensar acerca dos resultados a fim de certificar-se da sua validade para o contexto em estudo, assim, a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados* viabilizou o procedimento de avaliar se a resposta obtida era válida para aquela situação.

A recorrência à “regra de três” quando o aluno fala “esse vezes esse e esse vezes esse” ou, quando eles se referem: “multiplica em x” obtendo a equação $1 \cdot x = 0,33 \cdot 30$, resolvida na

sequência em que se obtém $x = 9,9$, sinaliza que a ação cognitiva *síntese* foi responsável pelo procedimento de busca pelo resultado matemático para o problema.

Ao obter, para esse caso, $x = 9,9$, os alunos afirmaram “*não existem 9,9 pacotes! É 9 ou é 10!*” [sic]. Aqui notamos que os alunos já passam a analisar a resposta. Eles assumem que a resposta obtida não é apenas um número, mas uma quantidade que representa algo, nesse caso, número de pacotes de Erva-Mate. Nessa circunstância, o procedimento do aluno de analisar o novo resultado obtido, mostra indícios de que mobilizou a ação cognitiva *interpretação e validação de resultado*. Tal ação possibilitou ao aluno elucidar que 9,9 ainda não era uma resposta satisfatória para o problema.

As discussões dos alunos, acerca do cálculo da quantidade de pacotes de 1 kg restantes, continuam e constituem o próximo Episódio.

Episódio 4

Prof.: *Essa diferença pode ter acontecido porque só levamos em conta duas casas decimais e existem vários “três” depois da vírgula e isso faz muita diferença no resultado final, concordam? Mas vamos lá. Quantos fardos inteiros deu?*

Na: 13.

Prof.: *Cada fardo tem quantos pacotes de 1 kg?*

Bi: 30 pacotes.

Prof.: *Então quantos kg de erva vocês vão utilizar para formar esses 13 fardos?*

[...]

Bi: *Faz 13 vezes 30. Dá 390! 390 kg que a gente usou pra formar os fardos.*

Prof.: *Ok. Qual era o total de Erva-Mate produzida?*

Ma: 400 kg.

Prof.: *E desse total, quantos kg vocês utilizaram para formar os fardos? Aí vocês pensem quantos kg sobra. Se cada pacote contém 1 kg de erva, então a quantidade de erva que sobra é o número de pacotes que sobrar também.*

O procedimento dos alunos, a partir de sugestões da professora e resposta avaliada como insatisfatória, foi encontrar uma nova forma de calcular a quantidade de pacotes de Erva-Mate restantes. Há indícios de que tal procedimento tenha sido decorrente da ação cognitiva *matematização*, que levou os alunos a reconsiderar os dados e informações matemáticas que eles tinham e assumir outro encaminhamento na tentativa de resolver a situação. Assim, os alunos reconsideraram a situação efetuando os cálculos da seguinte maneira:

Quadro 5. Quantidade de pacotes de 1 kg de Erva-Mate restantes.

$13 \cdot 30 = 390$ (quantidade de fardos multiplicada pela quantidade de kg por fardo igual a quantidade de kg de erva utilizada para formar os 13 fardos)
 $400 - 390 = 10$ (quantidade total de erva produzida (kg) “menos” a quantidade de kg de erva utilizada para formar os 13 fardos, igual a quantidade de kg (ou pacotes) restantes)

Fonte: Autoras.

O resultado de 10 pacotes ficou muito próximo do valor 9,9 obtido pelo aluno anteriormente. Ao assumir que “*Faz 13 vezes 30. Dá 390!*” e “*400 menos 390 dá 10*”, os alunos deixam transparecer que, da ação cognitiva *síntese*, o procedimento manifesto foi resolver as operações matemáticas exigidas para aquele contexto.

A partir da resolução da primeira situação (um terreno quadrado de 30 m x 30 m) os alunos passaram a organizar e/ou elaborar seu pensamento matemático, tomando como exemplo os cálculos realizados para a primeira medida. Dessa forma, o procedimento dos alunos foi resolver os outros itens do problema com base no item anterior, sem a necessidade de grandes intervenções do professor, demonstrando ter autonomia na tomada de decisões e avaliação dos encaminhamentos matemáticos adotados. O Episódio 5 retrata esse fato.

Episódio 5

Ma: 50 vezes 50

Bi: 2.500! 2.500 mais 2.500.. Não! É vezes 2.500.

Ma: Não! Calma! Agora é da quantidade de pés. Vou desenhar aqui. É 50 dividido por 1,5 metros. (Faz na calculadora)

Bi: É 75.

Ma: Agora é 75 vezes 75, eu acho.

Na: 5625.

Ma: Será que deu isso? Eu acho que eu errei.

Bi: É “deu muito”.

Ma: Eu acho que está certo porque aqui a gente fez 40 dividido por 1,5 metros deu 26. Então 26 vezes 26.

Bi: Agora faz dividido por 30. Dá 187,5.

Ma: Quanto?

Bi: Vamos fazer de novo essa conta, eu acho que está errada.

Ma: Eu acho que está errada essa conta.

Bi: Vamos fazer pro 60.

Ma: Faz lá: 60 dividido por 1,5. (Faz na calculadora)

Bi: Dá 40. Então a “de cima” está errada.

[...]

Ma: 50 vezes 50 vai dá 2.500. Faz (50) dividido por 1,5. (Faz na calculadora)

Bi: *Dá 33, 33.*

Ma: *Agora faz 33 vezes 33. Dá 1089.*

Os alunos, no Episódio 5, estão em processo de cálculo da produção de Erva-Mate em uma área quadrada de 50 metros de lado, cuja colheita é feita a cada 4 anos. Percebemos que há uma grande cooperação entre os integrantes do grupo e suas discussões giram em torno de quais estratégias usariam para resolver a situação. Além disso, ao exclamar “*vamos fazer de novo essa conta, eu acho que está errada*” o aluno reconhece que o valor encontrado pode não ser satisfatório e há a necessidade de “refazer as contas”. Tal necessidade é confirmada no momento que eles comparam os resultados. Esse procedimento de olhar para a situação, realizar comparações, afirmações e questionamentos, sinaliza que a ação cognitiva *interpretação e validação de resultado* contribuiu para o aluno considerar o resultado daquela parcela do problema como não correto e refazer o processo de cálculo.

Nesse caso, os alunos perceberam que pode ter ocorrido erro ao resolver a operação 50 dividido por 1,5 na qual obtiveram 75, quando na verdade o quociente seria 33,33... Mesmo a operação tendo sido feita com o uso da calculadora aconteceu esse erro. Foge do escopo do trabalho analisar a natureza desse erro, porém, é a partir dele que os alunos passam a reaver a situação, reveem as características matemáticas dispostas e retomam seus procedimentos até chegar ao novo resultado obtido.

Nessa retomada, os alunos também percebem que para o intervalo de 4 anos entre as colheitas, o resultado da quantidade de Erva-Mate produzida (pronta e em kg) é igual ao resultado da quantidade máxima de pés de Erva-Mate cultivada na área determinada. Embora não tenham feito uma relação à propriedade associativa da multiplicação, os alunos conseguem perceber que “*o resultado aqui repete, está vendo?*” e isso pode ser indicação de que a resolução direta emergiu da ação cognitiva *síntese*, quando os alunos multiplicam e em seguida dividem por 2 e percebem que o resultado “repete”.

Depois de obter os primeiros resultados, os alunos haviam aprendido como deveriam resolver os demais, ou seja, foi só seguir os mesmos encaminhamentos para resolver as outras medidas do terreno e para outros intervalos entre as colheitas.

Os quadros elaborados, segundo sugestão da professora, indicam que os alunos buscaram descrever os resultados encontrados e apontam indícios de que os alunos mobilizaram a ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados*, a qual os auxiliou

assumir que os encaminhamentos tomados, no decorrer da atividade, foram válidos e garantiram resultados satisfatórios.

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos pelos alunos como resposta final e válida para a situação problema estruturada no início da atividade.

Figura 3: Produção de Erva-Mate de acordo com a área de cultivo e o intervalo entre as colheitas.

a cada 4 anos

Sado de terreno (m)	área de terreno (m ²)	Quantidade máx. pés de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (preta)	Quantidade de fardos
30	900	400	400 kg	13 e 10 kg
40	1600	676	676 kg	22 e 16 kg
50	2500	1.089	1.089 kg	36 e 9 kg
60	3600	1.600	1.600 kg	53 e 10 kg
100	10000	4.356	4.356 kg	145 e 6 kg

a cada 15 anos

Sado de terreno (m)	área de terreno (m ²)	Quantidade máx. pés de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (preta)	Quantidade de fardos
30	900	400	6.000	200
40	1600	676	10.140	338
50	2.500	1.089	16.335	54 e 15 kg
60	3.600	1.600	24.000	800
100	10000	4.356	65.340	2.178

a cada 6 anos

Sado de terreno (m)	área de terreno (m ²)	Quantidade máx. pés de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (preta)	Quantidade de fardos
30	900	400	1.200	40
40	1600	676	2.028	67 e 18 kg
50	2.500	1.089	3.264	108 e 24 kg
60	3.600	1.600	4.800	160
100	10000	4.356	13.068	435 e 18 kg

Fonte: Registros dos alunos.

Para finalizar o estudo dessa situação problema, os alunos elaboraram cartazes com a situação final de modo a facilitar a socialização dos resultados e considerações acerca do tema à professora, aos colegas e a outras turmas.

No Episódio 6, o diálogo apresentado mostra como os alunos elucidam os encaminhamentos utilizados no desenvolvimento da atividade.

Episódio 6

Prof.: *Como vocês vão explicar esse resultado?*

[...]

Ma: *A cada 4 anos, num terreno de 30 por 30, o total de fardos vai ser 13 fardos fechados. Num terreno quadrado de 40 metros de lado vai ser 22 fardos fechados, cada fardo contendo 30 pacotes de 1 kg ainda sobram 16 pacotes e assim por diante... (referindo-se a resultados para outras medidas)*

Prof.: *Como e porque sobra 16?*

Ma: *Porque aqui deu 676 kg de erva seca. Cada 1 kg dá um pacote, cada fardo tem 30 pacotes. Então pega o 676 e divide por 30 que dá 22 “vírgula alguma coisa”.*

Prof.: *E por que sobra 16?*

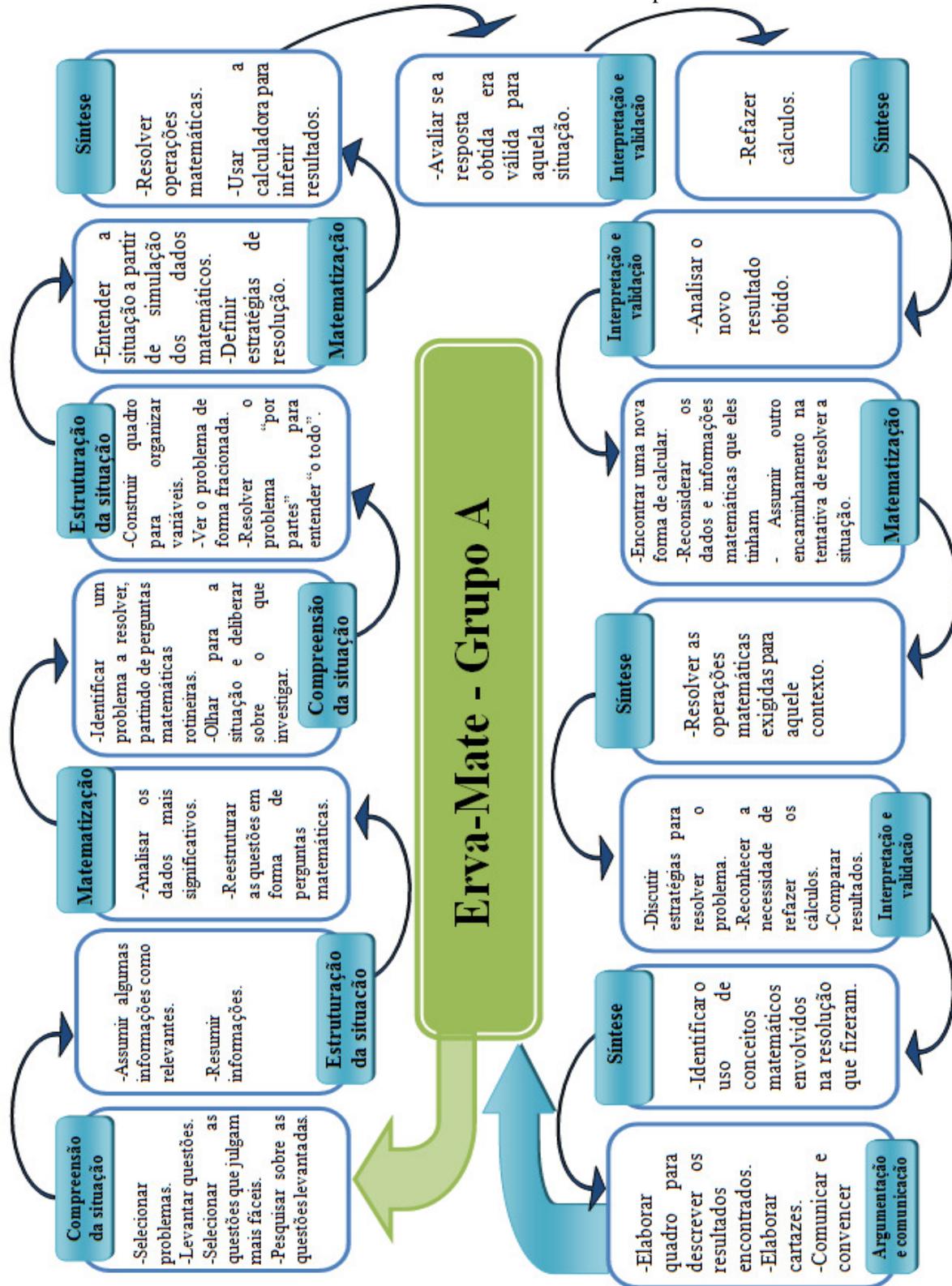
Bi: *Eu não lembro.*

Ma: *Aí você pega o 22 e faz vezes 30, o resultado, que é 660, faz menos 676 e por isso sobram 16 pacotes.*

As declarações dos alunos, ao relatar a forma como chegaram ao resultado, apresentando argumentos à professora e, posteriormente, aos colegas, indicam que a ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados* possibilitou manifestar o procedimento de comunicar e convencer sobre a resposta final obtida.

A Figura 4 ilustra os procedimentos dos alunos, do grupo A, associados às suas ações cognitivas, ao longo da atividade de modelagem matemática Erva-Mate.

Figura 4: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Erva-Mate – Grupo A.



Fonte: Autoras.

3.2. Atividade Estudo da produção de Erva-Mate: Grupo B

Em um dos grupos da turma B, no decorrer das conversas com a professora e com os demais colegas, os alunos *El*, *Gi* e *Ca* manifestaram interesse em investigar outros aspectos do mesmo assunto, ou seja, o tema Erva-Mate foi proposto pela professora, porém o encaminhamento dado à atividade foi outro, diferente do primeiro grupo descrito.

A partir do tema, conforme orientação da professora, os alunos elencaram algumas perguntas a serem pesquisadas sobre a Erva-Mate. Tais perguntas, apresentadas no Quadro 6, foram entregues à professora em forma de registro escrito.

Quadro 6. Perguntas elaboradas pelos alunos sobre Erva-Mate.

- 1) Quanto tempo demora a realizar a colheita da Erva-Mate?
- 2) Quanto tempo a Erva fica no secador?
- 3) Qual a distância entre um pé de erva e outro?
- 4) Qual a diferença entre Erva-Mate para chimarrão fina e grossa?
- 5) Quais os tamanhos dos pacotes de Erva-Mate vendidos no mercado?
- 6) Quais estados mais consomem Erva-Mate no Brasil?
- 7) Como é o processo de fabricação de Erva-Mate para chimarrão?
- 8) Além do chimarrão, no que mais a Erva-Mate é utilizada?
- 9) Uma arroba de Erva-Mate, depois de processada, renderá quantos quilos de Erva-Mate pronta para chimarrão?
- 10) Até quantos metros uma árvore de Erva-Mate pode atingir de altura?

Fonte: Registro dos alunos.

Podemos notar que as perguntas elencadas pelos alunos, em sua maioria, são perguntas pontuais, sendo que algumas delas a resposta já eram conhecidas, enquanto outras foram listadas por considerarem que seriam fáceis de responder. O procedimento dos alunos de realizar perguntas objetivas de diversas naturezas sobre a Erva-Mate, indica que a ação cognitiva *compreensão da situação* possibilitou que eles mobilizassem conhecimentos prévios e buscassem informações sobre características básicas acerca do tema, levantando questões.

As questões elencadas direcionaram o estudo dos alunos no momento de realizar a busca por respostas por meio de pesquisa na internet e de campo (visita à ervateira), conforme descrito na atividade anterior.

As informações obtidas pelos alunos e a orientação da professora, pode ter contribuído para que, juntamente com os demais alunos da turma, o procedimento agora fosse o de assumir algumas informações como sendo relevantes. As informações assumidas aparecem descritas no Quadro 3 também da atividade anterior.

A análise dos dados enfatizados como mais expressivos encaminhou os alunos ao procedimento de escrever novas questões direcionadas, indício de que a mobilização da ação cognitiva *estruturação da situação*, favoreceu que, ao olhar para informações que possuíam e assumir aquelas que lhes pareciam significativas, os alunos viessem a formular problemas e direcionar seus estudos. O problema formulado pelos alunos, num primeiro momento foi: *Qual a quantidade de Erva-Mate cultivada e de fardos produzidos em determinada área plantada?*

Ficou evidenciado, no desenvolvimento da atividade, que enquanto os alunos do primeiro grupo descrito buscavam solucionar a situação problema sobre a produção de Erva-Mate, em determinada área de cultivo e em função do tempo de intervalo entre as colheitas, traçando a estratégia de resolver o problema “por partes”, os alunos deste outro grupo faziam perguntas recorrentes na intenção de resolver o problema. Esse fato foi identificado nos diálogos desses alunos. No Episódio 1 podemos observar os questionamentos levantados pelos alunos acerca de como resolver o problema que haviam formulado.

Episódio 1

El: Qual fórmula eu devo usar?

Prof.: Para que?

El: Para calcular a quantidade de fardos de Erva.

[...]

Ca: É professora, onde tem exemplo disso?

Prof.: Exemplo do que?

Ca: De como calcular a quantidade de Erva-Mate cultivada e de fardos produzidos.

Prof.: Vocês vão considerar o intervalo de tempo entre as colheitas?

El: Acho que sim.

Gi: Sim. Porque a gente precisa saber quantos quilos produz. E isso depende do tempo entre as colheitas.

[...]

El: Não tem nada igual no caderno? E no livro?

Prof.: Talvez até tenha. Mas vocês devem saber o que estão procurando.

Gi: Mas não têm nada pronto já? Que dê a resposta pronta? Uma fórmula matemática?

Atenta aos diálogos dos alunos, a professora identificou uma necessidade que os alunos tinham de dispor de uma “fórmula” para resolver, traços da forma como aprenderam matemática até o momento. Como em atividades de modelagem matemática, na maioria das vezes, não existe uma fórmula pronta, ao contrário, busca-se encontrar um meio de resolver o problema a partir de um processo de matematização da situação, os alunos acabaram identificando uma nova situação que poderiam estudar, dada as intervenções da professora.

No diálogo apresentado no Episódio 1o procedimento de olhar novamente para o tema e a preocupação de encontrar uma fórmula matemática que descrevesse o problema reconhecido pode ser emergente da ação cognitiva *matematização*, que proporcionou certa inquietação na busca por uma informação, um método ou uma fórmula matemática capaz de responder prontamente à situação problema evidenciada.

Com a orientação da professora e com o olhar voltado para as informações que possuíam, os alunos passaram a organizar melhor a ideia e pensar sobre a forma como a situação problema poderia ser estruturada, chegando ao seguinte problema: *Existe uma fórmula matemática capaz de descrever a produção de Erva-Mate dependendo da área de cultivo em relação à distância do plantio entre uma muda e outra e o tempo de extração?*

Estruturar o problema de modo a atender as inquietações e interesse dos alunos é um procedimento manifesto que pode ser decorrente da mobilização da ação cognitiva *estruturação da situação*. Deduzimos que essa ação possibilitou a formulação da situação problema em forma de pergunta que contemplasse a curiosidade de busca demonstrada pelos alunos.

A orientação da professora nesse caso foi que primeiramente eles retomassem suas informações em mãos e pensassem juntos nos elementos e dados que precisariam dispor para responder ao problema estruturado. O Quadro 7 apresenta os dados que os alunos evidenciaram como mais relevantes para ajudar a responder o problema.

Quadro 7. Síntese das informações mais relevantes sobre a Erva-Mate.

A cada 4 anos, um pé de erva mate rende em média 2 kg. A cada 6 anos, um pé de erva mate rende em média 6 kg. A cada 15 anos, um pé de erva mate pode render, em média, 30 kg. A distância de plantio é a cada 1,5 m. Terreno retangular. Erva-Mate verde rende a metade depois de seca. Um fardo possui 30 pacotes de 1 kg.

Fonte: Diálogo dos alunos.

O problema expresso em forma pergunta, para ser resolvido, precisa de alguns dados, isso sinaliza que o procedimento de sintetizar as informações que usariam na resolução do problema proposto decorre da ação cognitiva *estruturação da situação*, a qual possibilitou que os alunos viessem a retomar seus conhecimentos e simplificar as informações acerca do tema e da situação em estudo.

Foi preciso então, a partir das informações, identificar conceitos e métodos para buscar um resultado apropriado. O Episódio 2 retrata como tal busca foi iniciada.

Episódio 2

Prof.: *Pensando que esse terreno é um quadrado de medida 30 por 30 m. Como calculamos a área de um quadrado?*

El: *É a base vezes a altura.*

Prof.: *Isso! Base vezes altura, porque ele também é um retângulo, ou lado vezes lado. E se ele for um terreno retangular que eu não conheço a medida dos lados, como eu posso representar?*

Al¹⁹: *Usando “x”.*

Prof.: *Muito bem. Um dos lados pode ser “x”. E o outro?*

Gi: *O outro pode ser “y”.*

Prof.: *Ok, x e y. Como nós fazemos para calcular a área do terreno?*

Al: *Base vezes altura.*

Prof.: *Se aqui a base mede x e a altura mede y, como ficará?*

Ca: *Mas vai ficar x vezes y?*

Prof.: *Sim. Essa é a representação algébrica.*

Al: *E quanto vale o x e o y?*

Prof.: *O x e o y quer dizer que essa forma vai valer para qualquer medida de um terreno retangular. Esses valores podem variar.*

[...]

Prof.: *E para calcular a quantidade de Erva-Mate produzida como nós faremos? Qual era a distância de plantio entre um pé de erva e outro?*

El: *Dividir por 1,5 m.*

No Episódio 2 os alunos discutem sobre os conceitos e estratégias matemáticas que usariam para construir a fórmula capaz de descrever uma solução para sua situação problema. Para tanto, durante o diálogo mediado pela professora, buscam compreender os cálculos realizados, bem como o processo de resolução do problema passo a passo. Assim, o procedimento dos alunos foi interpretar a resolução matemática realizada “por partes” e, juntamente com a professora, construir uma representação algébrica dos algoritmos utilizados

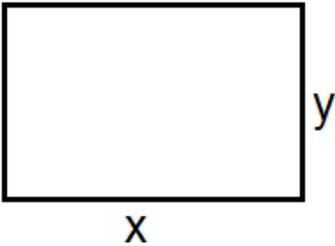
¹⁹**Al:** representa um aluno que não pertence ao grupo descrito, mas que estava interagindo com os alunos **Gi**, **El** e **Ca** enquanto eles buscavam compreender a resolução do problema.

durante o desenvolvimento da atividade. Tal procedimento indica que, em decorrência da ação cognitiva *matematização*, os alunos puderam interpretar e/ou compreender os processos matemáticos envolvidos na busca pela solução da situação problema e reutilizá-los para traçar novas estratégias de resolução.

Usaram, de maneira geral, todos os dados simultaneamente, pois eles estavam todos relacionados e dependiam uns dos outros. Assim, consideraram hipoteticamente um terreno retangular com medidas x e y (incógnitas que eles mais recorriam) e fizeram, separadamente, para intervalos de 4, 6 e 15 anos entre as colheitas.

No Quadro 8 podemos notar que os alunos trabalharam na situação utilizando vários elementos ao mesmo tempo: um lado do terreno dividido por 1,5 (distância de plantio) multiplicado pelo outro lado do terreno também dividido por 1,5, isso tudo multiplicado pela quantidade de erva verde extraída (de acordo com o intervalo de tempo) e dividido por 2 (pois diminui a massa pela metade quando seca). Assim, chegaram às fórmulas explícitas também no Quadro 8.

Quadro 8. Fórmulas para calcular a quantidade de Erva-Mate produzida de acordo com a medida dos lados de um terreno retangular em determinado intervalo de tempo.

	<p>Usamos Q (quantidade de Erva-Mate produzida pronta); x e y (medidas dos lados do terreno)</p> <ul style="list-style-type: none"> Para 4 anos: $Q = \frac{x}{1,5} \cdot \frac{y}{1,5} \cdot \frac{2}{2}$, multiplicando temos $Q = \frac{X.Y}{2,25}$, simplificando obtemos: $Q = \frac{4.x.y}{9}$ Para 6 anos: $Q = \frac{x}{1,5} \cdot \frac{y}{1,5} \cdot \frac{6}{2}$ tem-se: $Q = \frac{3.X.Y}{2,25}$ $Q = \frac{12.x.y}{9}$ ou ainda $Q = \frac{4.x.y}{3}$ Para 15 anos: $Q = \frac{x}{1,5} \cdot \frac{y}{1,5} \cdot \frac{30}{2}$, tem-se: $Q = \frac{30.X.Y}{2,25}$ $Q = \frac{60.x.y}{9}$ ou ainda $Q = \frac{20.x.y}{3}$
-------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Registro dos alunos.

Para chegar a uma fórmula final para cada intervalo de tempo entre as colheitas, os alunos precisaram relembrar conceitos matemáticos tais como: multiplicação e divisão de frações, transformação de números decimais e frações equivalentes. Nesse momento, foram determinantes as contribuições da professora, que sempre dava orientações e explicações ao grupo. A compreensão ou reforço desses conceitos colaborou na construção das fórmulas matemáticas que foram consideradas como modelo matemático para a situação em estudo, ou seja, os procedimentos de mobilizar conhecimentos matemáticos prévios ou aprender novos e construir um modelo matemático, sinalizam que a ação cognitiva *síntese* possibilitou a manipulação de algoritmos matemáticos, à medida que os alunos recorriam constantemente às informações e técnicas matemáticas que dispunham e/ou aprendiam e resolviam o problema evidenciado.

Para verificar a validade das fórmulas deduzidas, os alunos calcularam para mesmos valores que eles haviam utilizado antes e calculado “por extenso” ou “por partes” como o grupo anterior. Porém, ao calcular o primeiro valor, cuja medida dos lados do terreno quadrado era 40m, os alunos obtiveram uma resposta não aceita por eles (Quadro 9).

Quadro 9. Teste de fórmula.

<p>Terreno de 40m x 40m</p> $Q = \frac{4 \cdot x \cdot y}{9}$ $Q = \frac{4 \cdot 40 \cdot 40}{9}$ $Q = \frac{6400}{9}$ $Q = 711,1111....$

Fonte: Registro dos alunos.

O resultado obtido na fórmula não condiz com o resultado inferido quando realizaram seus cálculos passo a passo, cujo valor encontrado foi de 676 kg. Ao retornar à situação com os alunos, a professora refez com eles da forma “por extenso” como haviam feito anteriormente, o que possibilitou reforçar a resposta de 676 kg como correta.

O procedimento de olhar para a resposta obtida a partir do emprego da fórmula e compará-la ao resultado anteriormente aceito e confirmado logo após, denota características da ação cognitiva *interpretação e validação de resultado*, a qual justifica a verificação da resposta como não válida para aquela circunstância e sinaliza a necessidade de rever a fórmula e os conceitos utilizados até o momento.

Como as únicas variáveis utilizadas na fórmula diziam respeito apenas às medidas dos lados do terreno, concordaram que ali tinha um erro. Alguns alunos chegaram até a sugerir que o x e y fossem a quantidade de pés de Erva-Mate que caberiam no terreno. Porém, o resultado também não descrevia a situação.

No Episódio 6 notamos que, o grupo de alunos, a partir de questionamentos da professora, passam a repensar seus cálculos e as variáveis envolvidas.

Episódio 6

El: São 26 pés inteiros.

Prof.: Para plantar esses 26 pés, são utilizados quantos metros do terreno?

Gi: Para plantar esses 26 pés, usaremos espera...

[...]

El: Usaremos a operação 26 vezes 1,5.

Ca: Como é? 26?

El: 26 vezes 1,5 igual a 39 m. Assim podemos usar as fórmulas para calcular. [sic]

Nesse recorte do diálogo dos alunos, o procedimento deles foi retomar valores e operações e obter novos resultados parciais ao problema, procedimento esse que pode ter sido decorrente da ação cognitiva *síntese*, que favoreceu a resolução matemática a partir da definição de outros valores a serem aplicados nas fórmulas. Ainda acerca desses valores, a discussão no grupo continua (Episódio 7).

Episódio 7

El: Calma. Aqui nós temos um terreno de 40 metros e pra nós saber a quantidade de pés de erva que cabem nesse terreno eu tenho que fazer a conta de 40 dividido por 1,5. O 1,5 é... é...

Gi: A distância entre um pé de erva e outro.

El: Isso. Daí, para saber quantos pés “inteiros” fazemos 40 dividido por 1,5 que dá 26 pés inteiros. Agora usaremos a operação 26 vezes 1,5.

[...]

Gi: As fórmulas estão aqui.

El: De 4, de 6 e de 15.

[...]

El: Professora não entendi. Vou usar essas fórmulas. Mas o x e o y valem 40?

Prof.: O x e o y é a medida do lado que você vai usar. Você usa 40?

El: Não. Eu uso 39.

Prof.: Isso. Porque “vai sobrar um pedaço” do terreno que você não vai usar. [sic]

O procedimento dos alunos, ao passo que compreendem a situação gradualmente, é reconhecer as características matemáticas presentes, associadas a estratégias matemáticas envolvidas. Esse procedimento sinaliza ter sido decorrente da ação cognitiva *matematização* que possibilita entender, em linguagem matemática, o significado e conceito de valores envolvidos e utilizados na situação em estudo.

O Episódio 8 retrata o diálogo dos alunos no momento em que realizam operações matemática para resolver uma equação.

Episódio 8

Prof.: *4 vezes 39 vezes 39 dividido por 9. Isso é uma fração. Quanto que dá 4 vezes 39 vezes 39?*

El: *Dividido por 9?*

Prof.: *Calma. Primeiro multiplica.*

El: *Dá 6084. Dividido por 9.[sic]*

Prof.: *6084 dividido por 9.*

Gi: *Dá 676. [sic]*

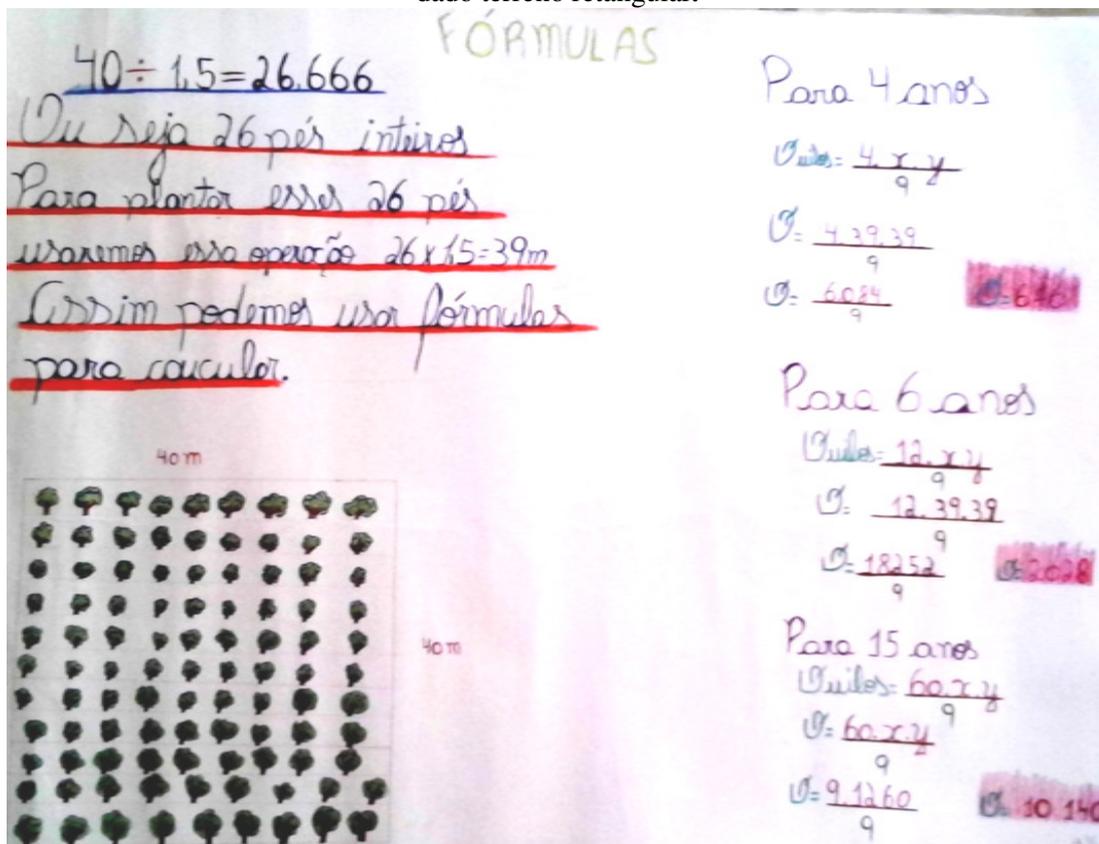
Prof.: *Então $Q = 676$. Olhe no resultado anterior para verificar. [...] Depois faz para a fórmula de 6 anos.*

O procedimento de resolver os cálculos matemáticos, elencados no diálogo, sinaliza que os alunos mobilizam a ação cognitiva *síntese*, pois utilizaram métodos e puseram em uso seus conhecimentos matemáticos para representar e resolver o problema evocado.

Ao realizar nova comparação com os cálculos previamente elaborados, perceberam que os resultados eram iguais. Como o valor expresso antes já havia sido verificado e aceito como válido, logo, se o valor obtido por meio do uso da fórmula era o mesmo, então a resposta foi assumida como correta. O procedimento dos alunos, de admitir o resultado como correto a partir de uma comparação indica que os alunos mobilizaram a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados*, que os auxiliou na análise da resposta obtida como válida para a situação problema identificada.

Para certificar-se da validade das outras fórmulas, utilizando a mesma ideia compreendida até então, os alunos realizaram cálculos para as demais fórmulas e utilizando-se de outros valores, conforme Figura 5. Isso permitiu argumentar que elas garantiam resultados satisfatórios para qualquer medida, nas restrições trabalhadas.

Figura 5: Verificação de fórmulas para calcular a quantidade de Erva-Mate seca, produzida em um dado terreno retangular.

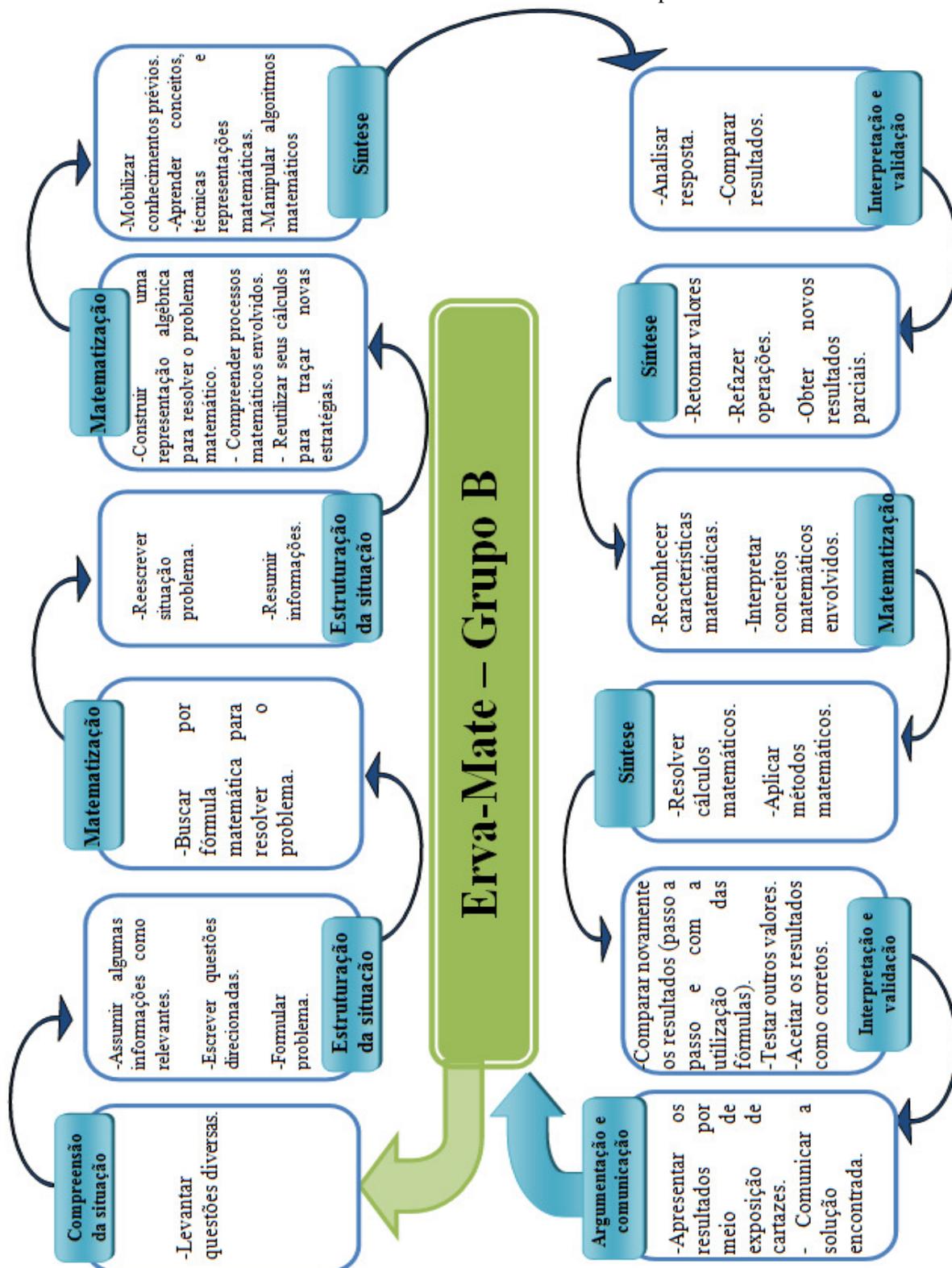


Fonte: Registros dos alunos.

Ao testar esses valores, de certa forma, reforçou a certeza dos alunos quanto a validade das fórmulas, deixando-os confiantes para o procedimento de apresentar os resultados aos colegas da turma e à professora, por meio da exposição dos resultados e explicação oral. Tal procedimento aparenta ser decorrente da ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados* que possibilitou, embasado no processo de construção da resposta e verificação dos encaminhamentos assumidos, comunicar a solução encontrada por eles capaz de, naquele momento, responder satisfatoriamente a problemática inicial.

A Figura 6 retrata os procedimentos manifestos, pelos alunos do grupo B da Erva-Mate, associados as suas ações cognitivas.

Figura 6: Procedimentos dos alunos associados as suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Erva-Mate – Grupo B.



Fonte: Autoras.

Diante da descrição do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com o tema Erva-Mate por dois grupos distintos, alguns aspectos merecem destaque. Os procedimentos iniciais são muito semelhantes nos dois grupos, como o de levantar questões, o de resumir informações e o de assumir informações mais relevantes. Isso pode ser consequência das primeiras intervenções realizadas pela professora. Notamos que as atividades começam a se diferenciar quando os alunos passam a pensar sobre o problema. Enquanto o grupo A estava preocupado em resolver o problema identificado utilizando noções e conceitos já conhecidos por meio da estratégia de resolução “por partes”, o grupo B buscava uma alternativa que lhes rendesse uma fórmula capaz de fornecer uma resposta de maneira prática e rápida. Os procedimentos voltam a se assemelhar no final da atividade, quando os alunos de ambos os grupos utilizam a estratégia de elaborar cartazes para apresentar os resultados e passam a comunicar a solução encontrada.

Embora a temática seja a mesma, e no desenvolvimento das atividades apareçam procedimentos similares, a forma como os grupos conduzem o problema e sua resolução é distinta. Tal distinção influencia para que os procedimentos não sejam os mesmos, uma vez que o olhar dos alunos de cada grupo é singular em cada atividade.

3.3. Atividade Planetas do Sistema Solar

O grupo que desenvolveu a atividade com o tema “Planetas do Sistema Solar” é o mesmo que descrevemos na atividade da “Erva-Mate”, constituído pelos alunos *Ma*, *Bi* e *Na*. Ao escolher descrever outra atividade desenvolvida pelo mesmo grupo de alunos temos como intenção analisar o desempenho deles em dois contextos distintos: um cujo tema foi sugerido pelo professor e outro em que eles escolheram o tema trabalhado.

Após a escolha do tema, num primeiro momento, os alunos passam a pesquisar em livros de Ciências e na internet, em sites de busca, informações diversas sobre a temática definida. A partir dessa pesquisa, os alunos reunidos em grupo buscam definir uma “pergunta” para investigação, conforme ilustra o Episódio 1.

Episódio 1

Prof.: Vocês encontraram informações sobre o tema?

Ma: Sim, bastante. Muita informação.

Prof.: Vocês escolheram estudar sobre?

Bi: Os planetas do sistema solar.

Prof.: Muito bem. E agora? Escolheram uma situação problema?

Ma: Eu 'tô' pensando na pergunta. Não tem o que fazer. Nós tentamos fazer da distância, mas não deu. Nem da temperatura. [sic]

Prof.: Mas vocês conseguiram informações sobre a distância e sobre a temperatura?

Bi: Sim. Mas agora temos que fazer a pergunta. [sic]

Ma: E que pergunta nós vamos fazer sobre isso?

[...]

Bi: Nós procuramos a distância. Mas são informações diferentes. Uma hora é mais perto outra hora é mais longe.

Ma: Nós colocamos sobre a distância, mas como dava esse erro nós resolvemos pesquisar sobre a temperatura.

Prof.: A distância pode não ser a mesma porque a órbita dos planetas em torno do sol não é uma circunferência, notem no desenho. Aí, ao pesquisar sobre a distância, talvez vocês possam pesquisar sobre o inverno e verão.

No Episódio 1 observamos a preocupação dos alunos em identificar e/ou elaborar um problema que eles se referem como “pergunta”. Diante de tal inquietação eles tentam elaborar a pergunta já olhando para algumas informações sobre o tema, no entanto, comentam que haviam divergências entre elas, em certos aspectos, quando comparavam diferentes fontes de pesquisa. A pesquisa sobre a temática e a busca por definir o problema, entendido pelos alunos como uma pergunta, a partir de informações sobre o tema, denota que esse procedimento foi decorrente da ação cognitiva *compreensão da situação*, que provocou a pensar sobre o tema escolhido enquanto discutem uma possível questão para investigação.

Ainda sem ter identificado uma “pergunta”, o diálogo entre os alunos segue em torno de aspectos da situação e, ao encontrar informações divergentes sobre o tema, a dificuldade em identificar um problema persiste. Tal impasse pode ser percebido no Episódio 2, a seguir.

Episódio 2

Prof.: Qual será o foco do trabalho de vocês? Vocês ainda não definiram o que vocês querem estudar. Informações vocês tem bastante e todas são interessantes, mas em qual delas vocês vão centrar as atenções?

Bi: Acho que na distância.

Ma: Mas a temperatura é mais fácil.

Na: É verdade.

[...]

Ma: Aqui tem a temperatura dos planetas e do Sol.

Prof.: E o que vocês vão investigar sobre a temperatura.

Ma: A diferença da temperatura?

Bi: *Mas nós queremos trabalhar com uma maquete.*

Ma: *Isso, mas a gente queria trabalhar com distância.*

Bi: *Mas a gente pega os dois para colocar na maquete.*

Prof.: *Então vocês podem trabalhar com a razão entre a distância do planeta até o sol e a temperatura. Por exemplo, quanto mais distante do Sol, o que acontece com a temperatura?*

Ma: *Mais fria.*

Prof.: *Ela é menor. Uma possibilidade é relacionar essas duas variáveis: distância e temperatura.*

A partir dessa fala é possível perceber que o grupo ainda não tem definido qual será seu problema de investigação, entretanto, já delimitaram sua escolha, reduzindo suas opções à distância e à temperatura. Diante dessas duas opções, o aluno **Ma**, novamente como aconteceu na atividade com a Erva-Mate, indica trabalhar com a temperatura alegando que seria mais “fácil”. Sem chegar a um acordo, o aluno **Bi** sugere “*pegar os dois [distância e temperatura] para colocar na maquete*”. O procedimento de restringir sua atividade de investigação e assumir temperatura e distância dos planetas como foco do estudo, sinaliza que a ação cognitiva *estruturação da situação* possibilitou a utilização das informações para simplificar seu processo de busca ao passo que começam a encaminhar seus estudos e formular o problema a partir do direcionamento assumido.

No Episódio 3 é possível notar que os alunos formalizam sua “pergunta” já pensando em possibilidades e caminhos para respondê-la.

Episódio 3

Ma: *Daí a gente vai ter que saber sobre a temperatura e a distância. [sic]*

Bi: *Vamos emprestar o livro de Ciências do 6º ano?*

Ma: *Professora, nós achamos a distância dos Planetas até o Sol, mas como nós podia escrever a pergunta? A cada Km ele aumenta ou diminui... A pergunta que a gente poderia fazer é “Quantos graus, a temperatura diminui a cada Km de distância do Sol?”. [sic]*

Na: *Mas aqui dá um Km entre um planeta e outro?*

Ma: *Dá sim. Parece pertinho, mas dá olha, 778.500.000 Km, tudo isso aqui. Imagina o mais longe!*

Neste episódio percebemos que os alunos assumiram, de fato, sua opção pelo estudo sobre a distância e sobre a temperatura dos planetas em relação ao Sol e passam a olhar para a situação com enfoque para suas características matemáticas. Quando o aluno questiona “*dá um km?*” e o outro afirma “*parece pertinho, mas dá olha, 778.500.000 Km*”, nos remete a

considerar que o procedimento de deliberar sobre o problema em seus aspectos matemáticos é emergente da ação cognitiva *matematização*, a qual possibilitou essa transição da linguagem natural para a linguagem matemática.

A partir da interpretação matemática da situação, os alunos passam para um momento de busca por resolver matematicamente o problema, conforme retratado no Episódio 4.

Episódio 4

Ma: *Mas como nós vamos calcular? É muito zero!*

Prof.: *778.500.000 Km e qual é a temperatura?*

Bi: *É negativa. E como a gente faz? Soma? Diminui?*

Ma: *Divide!*

Prof.: *O que você quer dividir?*

Ma: *A temperatura pela distância.*

Prof.: *Então é assim que vocês podem fazer para obter a razão entre a temperatura e distância.*

Na: *Acabou “os zeros” na calculadora (risos).*

Prof.: *Precisaria de uma calculadora “maior”.*

[...]

Ma: *Aqui a distância vai ser essa (mostra no caderno).*

Na: *E a temperatura é 97 graus.*

Bi: *Variou 97. Menos 97. E agora? Não tem como dividir 97 por esse número grande.*

[...]

Ma: *Professora, mas o resultado é um número muito pequeno. É zero vírgula zero, zero, zero...*

Os termos utilizados pelos alunos, do tipo: “*como nós vamos calcular?*”, “*divide a temperatura pela distância*” e “*é um número muito pequeno. É zero vírgula zero, zero...*” possibilita-nos entender que o procedimento do aluno foi de utilizar estratégias matemáticas. Esse procedimento pode ter sido desencadeado pela ação cognitiva *síntese*, a qual levou-os, a partir de métodos matemáticos e com o auxílio da calculadora, a inferir um resultado para o problema.

Entretanto, no Episódio 5, notamos que houve um bloqueio dos alunos durante seu envolvimento com a resolução do problema identificado. Tal bloqueio levou-os a repensar sobre o encaminhamento assumido e a intenção para com o tema.

Episódio 5

Bi: *Não sei mais se eu quero fazer sobre isso.*

Na: *É a gente só queria ver os “planetinhas” (risos).*

Prof.: *O que vocês pensaram quando vocês escolheram esse tema?*

Bi: Na maquete. Mas nós não sabíamos que teria tanta informação assim!

Ma: A gente queria trabalhar com a distância e a temperatura.

Prof.: Mas o que vocês estão fazendo?!

Bi: É, mas está bem difícil.

Prof.: E agora, como vocês pensam em fazer? Vocês não precisam continuar com esse problema. Podem elaborar outro.

Bi: Mas qual?

Na: Nós queria falar de tudo ao mesmo tempo. [sic]

Ma: E a gente não pensou que teria tanta coisa para estudar!

Prof.: Se vocês pensaram na maquete, o que vocês poderiam colocar na maquete?

Bi: A gente vai ter que trabalhar a distância.

Apesar de ter iniciado a resolução do problema, os alunos ainda não se sentiam estimulados a seguir os encaminhamentos assumidos em momento anterior, nem os sugeridos pela professora. Quando a professora questiona “O que vocês pensaram quando vocês escolheram esse tema?” tem como intuito fazer os alunos se expressarem para que, junto com eles, pudessem pensar em outras possibilidades de resolução do problema ou mesmo um novo direcionamento para a atividade. Isso nos leva a considerar que atividades de modelagem matemática têm a característica de serem flexíveis e, caso o aluno não se sinta motivado a estudar sobre o problema proposto, ele pode recomeçar. Desde que isso não se repita continuamente ou que nenhuma atividade seja concluída.

Para aquele momento os alunos não se sentiam motivados a prosseguir o estudo sobre um assunto que por hora não lhes era cativante ou lhes parecia muito trabalhoso, embora eles mesmos tenham escolhido o tema. Segundo eles, estavam interessados em estudar sobre características de cada planeta, individualmente, e construir uma maquete capaz de representar o Sistema Solar como um todo. Logo, o procedimento dos alunos, nesta ocasião, foi repensar, reconsiderar as informações e definir novos encaminhamentos para o problema, indícios de que a ação cognitiva *compreensão da situação* foi mobilizada e possibilitou aos alunos, olhando para o material que tinham disponível, propor uma outra situação problema a ser estudada a partir de seu objetivo que era construir uma maquete.

Com o novo foco definido, os alunos passam à busca por uma solução para a situação, conforme retratado no Episódio 6.

Episódio 6

Bi: Dá para fazer a maquete na diagonal do retângulo.

Prof.: Isso. E não se esqueçam de representar a distância.

Ma: Se nós fôssemos representar em escala, nós precisaríamos de 8 metros para fazer a distância do planeta mais longe do Sol. Olha, para fazer de 1 cm representando 5 milhões de Km, 4497 divide por 5 dá 899,4 cm.

Prof.: Mais de 8 m, na verdade quase 9. Tudo isso? Então vamos reduzir a escala.

Bi: Não dá para fazer “na louca”? [sic]

Ma: Vamos fazer os que estão mais perto representar com uma distância menor e os que estão mais afastados um do outro com uma distância maior.

Prof.: E se dividisse por 50? Aí a cada 1 cm da maquete equivale a 50 milhões de Km do tamanho real.

Na: Pode ser eu acho.

Prof.: Vocês vão colocar a temperatura, a distância até o Sol e o raio de cada planeta?

Ma: Isso. Vamos por em uma plaquinha.

No diálogo dos alunos percebemos que eles, com a orientação da professora, passam a discutir o método de construção da maquete e, como eles próprios enfatizaram durante suas discussões acerca do tema, a utilização das informações relativas à distância de cada planeta até o Sol. Nas afirmações “4497 divide por 5 dá 899,4 cm”, “na diagonal do retângulo” ou “mais perto com uma distância menor” percebemos indícios de que os alunos manipulam dados matemáticos úteis na elaboração do material da maquete. Esse procedimento de utilizar informações matemáticas pode ter sido decorrente da ação cognitiva *matematização* que os levou a mobilizar conhecimentos sobre conceitos matemáticos.

Com os resultados em mãos os alunos organizaram os dados, conforme ilustra a Tabela 1, apresentando a distância real de cada planeta até o Sol e essa distância em escala de 1cm/50mi.Km.

Tabela 1: Escala da distância entre os Planetas do Sistema Solarem relação ao Sol.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Netuno	Urano
Tamanho real (mi/km)	57,9	108	149	228	778	1427	2870	4497
Escala (1cm/50mi.Km)	1,158	2,16	2,98	4,56	15,56	28,54	57,4	89,94

Fonte: Registros dos alunos.

O procedimento de construir essa tabela sinaliza que a ação cognitiva *estruturação da situação* possibilitou aos alunos simplificar seu estudo, organizando ideias em forma de tabela. Tal tabela, também indica que os alunos assimilaram o processo de representação em escala e seus respectivos cálculos, isso porque a ação cognitiva *síntese* foi responsável pela aplicação de técnicas matemáticas que levou a encontrar os resultados.

A tabela construída pelos alunos continha os resultados das escalas, os quais foram interpretados a fim de marcar a posição de cada planeta em relação ao Sol, e facilitou na hora de construir a maquete. O Episódio 7 ilustra como os alunos interpretam os dados da tabela e como tratam as informações que dispunham.

Episódio 7

Ma: *Aqui nós vamos ter que medir do Sol, 1,15 cm e colocar o planeta Mercúrio. Aí nós colamos as informações sobre ele perto do palito.*

Bi: *Vamos fazer assim na diagonal?*

Na: *Podemos desenhar com tinta e colar com fita larga.*

Ma: *Vamos marcar a distância deles primeiro, depois nós desenhamos e colamos. E a Terra, quantos cm do Sol?*

Bi: *Mas o Sol vai ficar bem nesse cantinho?*

Ma: *Sim. Daí nós medimos do Sol até o planeta usando a tabela com a escala.*

[...]

Na: *1,15 cm? Mas vai ficar muito perto.*

Prof.: *De fato, vai ficar perto mesmo. Mas se aumentar a escala o Netuno vai ficar muito longe.*

Bi: *É professora! O que é perto é muito perto e o que é longe é longe demais!*

Prof.: *Mas é importante vocês terem percebido isso. Porque é isso que acontece no real.*

A forma de analisar e discutir sobre a tabela viabiliza a interpretação do significado dos valores em escala obtidos em seus cálculos, passando a empregá-los ao manusear os materiais que constituiriam a maquete do Sistema Solar. A percepção do aluno que “*o que é perto é muito perto e o que é longe é longe demais!*”, procedeu do fato de que os alunos, ao buscar representar a distância de Mercúrio até o Sol, notaram ser pequeno o valor de 1,15 cm para representar na maquete. Esse procedimento de analisar as soluções e interpretar seu significado indica que o aluno mobilizou a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados* que provocou a verificação e aplicação das respostas matemáticas obtidas durante sua investigação.

Para representar os planetas os alunos trouxeram esferas de isopor de diferentes tamanhos. Com isso, precisaram conhecer o tamanho do diâmetro da circunferência de cada planeta para organizar a ordem das esferas na disposição no Sistema Solar. O procedimento de efetuar cálculos como a medida do raio, do diâmetro e comprimento da circunferência dos planetas foi decorrente da mobilização da ação cognitiva *síntese*, a qual possibilitou

reconhecer conceitos matemáticos envolvidos na situação em estudo e realizar considerações acerca dos métodos empregados para a resolução dos cálculos.

Tabela 2: Diâmetro, Raio e Circunferência Equatorial dos Planetas do Sistema Solar.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Diâmetro (km)	4878	12000	12756	6787	142800	120600	518000	49100
Raio (km)	2439	6000	6378	3398,5	71400	60300	259000	24550
Circunferência equatorial (km)	15316,92	37680	40053,84	21311,18	448392	37684	1626520	154174

Fonte: Registros dos alunos.

Ainda, ao calcular a circunferência equatorial de cada planeta, usando a fórmula do comprimento de circunferência, os alunos chegaram a duas conclusões importantes: quanto maior o raio, maior será o comprimento da circunferência, portanto, os planetas poderiam ser organizados conhecendo-se o raio, o mesmo vale para o diâmetro e; $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ é o mesmo que $C = \pi \cdot d$, conhecendo o diâmetro não precisariam obter o tamanho do raio para calcular o comprimento da circunferência. O procedimento do aluno de reconhecer tais características matemáticas a partir do cálculo do comprimento da circunferência, interpretando o significado dos seus cálculos e percebendo novas possibilidades denota que a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados* possibilitou realizar tais conclusões.

Para finalizar o trabalho os alunos confeccionaram etiquetas para fixar junto aos planetas na maquete. Essas etiquetas eram constituídas com as seguintes informações: Nome do planeta. Distância até o Sol. Temperatura média. Diâmetro equatorial. Período de translação. Período de rotação.

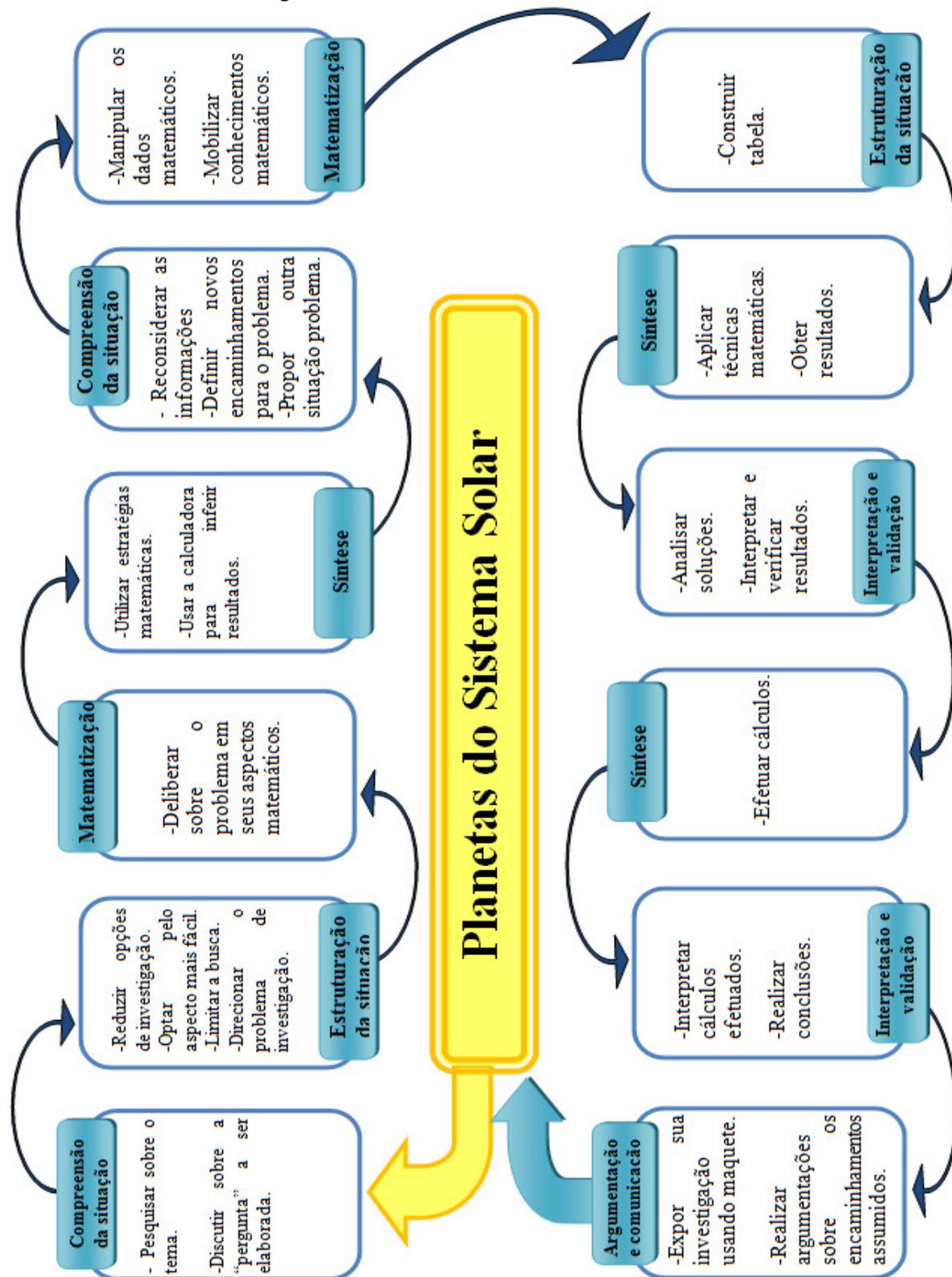
Associada ao processo de interpretação da resolução da situação problema, houve a aceitação dos resultados obtidos e a comunicação aos demais alunos da sala e para a professora e, a partir da maquete, os alunos conseguiram ilustrar suas explicações sobre a investigação realizada. O procedimento de o aluno expor sua investigação, realizar argumentações sobre os encaminhamentos assumidos para se chegar aos resultados explanados, mostra que a ação cognitiva *comunicação e argumentação* possibilitou, além da apresentação do trabalho desenvolvido, o convencimento de que os resultados eram consistentes e os conceitos matemáticos eram adequados para aquele estudo.

Nessa atividade, notamos que houve, a princípio, uma preocupação com a “pergunta” orientadora da atividade. Talvez isso tenha se dado em virtude de ser mais comum a situação

problema vir em forma de pergunta. Contudo, isso não foi o que aconteceu nessa atividade que tinha como tema os Planetas do Sistema Solar. Nessa atividade o que sustentou o seu desenvolvimento foi o desejo dos alunos em construir um material²⁰ capaz de representar as características matemáticas mais notáveis, do ponto de vista deles, envolvendo os planetas do Sistema Solar. A Figura 7 ilustra os procedimentos dos alunos, associados as suas ações cognitivas ao se envolverem com a atividade de modelagem matemática com o tema Planetas do Sistema Solar.

²⁰ O material produzido foi uma maquete do Sistema Solar, a qual foi doada ao laboratório de ciências da escola.

Figura 7: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema “Planetas do Sistema Solar”.



Fonte: Autoras.

Como relatamos anteriormente, o grupo constituído pelos alunos *Ma*, *Bi* e *Na*, figura dois momentos distintos das nossas análises, um cujo tema foi sugestão do professor (Erva-Mate A) e outro o tema foi escolhido por eles próprios (Planetas). Nesse contexto, percebemos que os alguns procedimentos têm características semelhantes em ambas as atividades, como por exemplo, o de selecionar questões que pareciam mais fáceis e o de optar por estudar os aspectos mais fáceis da situação, o que sugere que esse grupo de alunos fazia suas opções baseando-se no que lhes parecia menos trabalhoso. Além disso, apesar de ter curiosidade e interesse pelo tema Planetas, os alunos tiveram maior dificuldade em deliberar sobre o que investigar acerca dessa temática, sendo necessário, inclusive, repensar a sua investigação e propor uma outra situação problema, enquanto que na atividade da Erva-Mate, por ser um tema que eles apresentavam conhecimento a respeito, o problema identificado inicialmente foi o que orientou o desenvolvimento de toda a atividade.

Ainda sobre esse aspecto, inferimos que tanto na atividade da Erva-Mate quanto na atividade dos Planetas, desenvolvida por esse grupo, a intensidade com que os alunos se envolveram foi igual, ou seja, a atenção e comprometimento despendido pelos alunos ocorreram de forma análoga em ambas as atividades de forma. Ou seja, o fato da temática Erva-Mate ter sido sugerida pela professora não limitou o envolvimento dos alunos com a atividade.

3.4. Atividade Milho

O grupo formado por 3 alunos, aqui denominados *El*, *Al* e *Lu*, optaram pela escolha do tema Milho porque, segundo os alunos, eles não tinham um conhecimento tão amplo sobre o tema, porém tinham curiosidade em estudá-lo e encontraram na Modelagem Matemática uma oportunidade de desenvolver tal estudo.

Essa escolha levou-os a buscar informações acerca do referido tema, conforme descrito no Episódio 1.

Episódio 1

Prof.: Deu certo?

El: Estou procurando uma tabela.

Prof.: Mas tabela do que você está procurando? O que você quer saber sobre o milho? Tabela de plantação, de produção, tabela de venda, de preço? Especifique sua busca que fica mais fácil.

El: Tem tanta tabela que eu nem sei o que faço.

Prof.: No mundo, nos EUA, na China, no Brasil, na Rússia e na Argentina. E o que você vai fazer com isso?

El: Não sei. Aqui tem, mas fala de anéis de silos...

(Discutem informações de sites da internet)

Prof.: Por que você não procura sobre isso primeiramente: o que quer dizer anéis de silos? Vai ajudar na compreensão de vocês sobre o assunto.

Ainda sem ter definido o problema, os alunos estavam preocupados em encontrar uma “tabela” e buscaram informações gerais sobre Milho, ou seja, uma busca por conhecer sobre o tema sem uma delimitação pré estabelecida.

Ao dispor de materiais com as informações sobre milho, sendo estes: anotações no caderno, realizadas a partir da pesquisa na internet, panfletos, *folders*, revistas e embalagens de produtos a base de milho, os alunos realizaram uma leitura mais seletiva dos dados obtidos. Para que de fato pudessem compreender sobre o tema escolhido, os alunos perceberam a necessidade de conhecer o significado de termos e características referentes à produção, armazenamento e comércio do milho, como o termo anéis de silos.

O procedimento de busca por informações e de conhecer sobre o tema por meio de pesquisa, denota características da ação cognitiva *compreensão da situação*, que contribuiu para que os alunos realizassem sua busca e, com orientação da professora, selecionassem as informações que lhes eram significativas neste momento.

Decorrente do processo de compreensão, ainda ao se inteirar do assunto, surgiram dúvidas “complementares” e os alunos começaram a elencar outras perguntas (matemáticas ou não) sobre o Milho e respondê-las. O Episódio 2 retrata o momento em que os alunos buscam responder uma questão sobre o volume ocupado por certa quantidade de milho (em kg).

Episódio 2

Prof.: O que mais vocês encontraram?

El: Nós achamos onde ele é armazenado. Aqui óh. [sic]

Prof.: Aham, nos silos... [sic]

El: E daí nós respondemos as perguntas. Falta só essa daqui.

Prof.: Ah... Para responder essa, vocês precisam de uma balança, não é?

El: Sim.

[...]

Lu: Professora, nós pesamos com o pacote?

Prof.: Pode ser, depois dá para tirar a diferença. Já regularam a balança?

Lu: Me alcance o pacote de sal.[sic]

Prof.: Deu um quilo agora?

El: Vamos colocar o milho na balança?[...] Não aconteceu nada, a balança nem se mexeu! (risos)

Prof.: É porque são poucos. Deveria colocar maior quantidade de sementes.

El: A não ser que a gente coloque mais sementes. Tem sementes aqui dentro (ainda na espiga).

[...]

Ao passo que buscavam responder as questões levantadas, os alunos foram elaborando novos questionamentos e estruturando suas ideias de investigação. O procedimento de organizar e amadurecer sua ideias em relação aos problemas a serem estudados sobre a temática Milho, selecionando os dados mais relevantes, podem ser decorrentes da ação cognitiva *estruturação da situação*, que possibilitou aos alunos formular uma situação problema sobre a qual desenvolveriam a atividade.

A partir do diálogo entre o grupo e a professora (Episódio 3), com destaque para a forte influência e persuasão de um dos membros mais ativos (como é possível notar nos diálogos (**El**)), o problema foi formulado: *Dependendo do tamanho dos silos, qual sua capacidade de 'armazenagem' de milho?*

Episódio 3

El: E ainda temos essas informações (mostra). Como que nós poderíamos elaborar uma pergunta?

Prof.: Primeiramente vamos observar quais são as informações presentes nessas tabelas que vocês já têm.

El: Traz alguma coisa sobre a capacidade aqui olha... aqui é 28, aqui é 13 toneladas...

Prof.: Mas fala que é entre 28.000 e 13.392,51 toneladas. Isso quer dizer que depende do tamanho. Essas informações vocês podem usar.

El: E o que quer dizer essas informações aqui?

Prof.: Toneladas por m^3 ? Um metro cúbico refere-se a volume. Um bom exemplo é medir lenha cubada. Vocês já viram? Como se fosse uma caixa, de um metro de comprimento, por um de altura e um metro de largura "1 por 1 por 1". Quer dizer que em um metro cúbico caberá isso aqui de tonelada, 0,75 toneladas por m^3 . Vocês podem descobrir quantos quilos isso representa.

El: Aí o volume em metros cúbicos dá pra gente saber quantas toneladas vai?

Prof.: Se sabemos quantas toneladas cabem em $1 m^3$, conseguimos calcular quando soubermos o volume do silo.

[...]

Lu: Eu preciso anotar as respostas das perguntas.

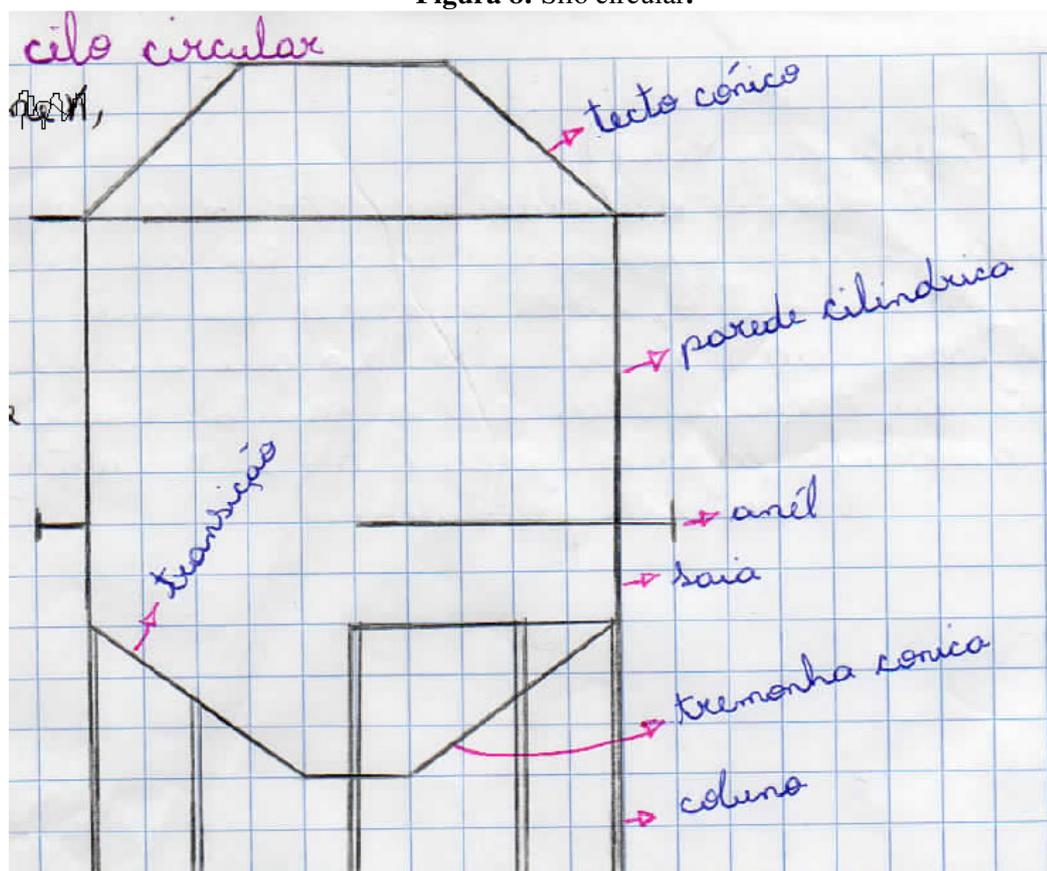
El: Qual o tamanho dos silos e qual a capacidade de armazenagem? Tem de vários tamanhos, gente! E vários tipos de silos. Vamos ter que definir alguns. [sic]

O problema matemático a ser investigado, neste caso, foi definido a partir do conhecimento a respeito de alguns aspectos matemáticos envolvidos. Nesse diálogo, os alunos estudaram informações relativas ao tema, elencando algumas possibilidades e realçando características matemáticas que lhes chamava a atenção, isto é, a partir de informações matemáticas, questionamentos e um breve esclarecimento feito pela professora, eles tiveram um *insight* ao afirmar que “*aí o volume em metros cúbicos dá pra gente saber quantas toneladas vai?*” que os levou a estruturar o problema a ser investigado. O procedimento do aluno, atendo-se aos dados matemáticos, de estruturar e formular a situação problema indica que a ação cognitiva *estruturação da situação* foi mobilizada e possibilitou aos alunos simplificar sua busca.

No momento em que o aluno expõe o problema formulado como sendo “*Qual o tamanho dos silos e qual a capacidade de armazenagem?*”, e logo em seguida exclama “*Tem de vários tamanhos, gente! E vários tipos de silos*” leva-o a preocupar-se em delimitar seus estudos. É a afirmação por ele proferida “*Vamos ter que definir alguns*”, referindo-se ao tamanho dos silos, que delimita o estudo das condições matemáticas que constituem o formato de um silo.

O estudo de uma imagem de um silo circular (Figura 8) e o reconhecimento de alguns de seus elementos (teto, coluna, anéis, saia, parede cilíndrica, altura e raio), impõe a necessidade dos alunos buscarem, em um livro didático de matemática do 2º ano do Ensino Médio, sobre o formato, nome e elementos do sólido que melhor representa o silo em questão e como seria possível calcular o volume desse objeto. Foi a ação cognitiva *matematização* que possibilitou aos alunos o procedimento de pesquisa e reconhecimento de informações matemáticas bem como o de transição de linguagens, isto é, a interpretação do problema em linguagem matemática que lhes serviria de subsídio para resolver a situação problema.

Figura 8: Silo circular.



Fonte: Registro dos alunos.

O Episódio 4 apresenta a conversa dos alunos em torno do formato do silo e da seleção de variáveis que eles usariam, bem como da justificativa dada pela escolha realizada para resolver a situação problema.

Episódio 4

El: Vamos fazer uma tabela.

Lu: Mas como?

El: Qual que nós vamos fazer? Vamos fazer o primeiro que é mais fácil! O número de anéis a gente tira. A de 60 graus é mais fácil! Daí aqui põe toneladas, 60 toneladas...

Lu: Por que tanto número junto?

El: E a altura do corpo?

[...]

Prof.: Conseguiram alguma coisa?

El: Nós estamos tentando retirar informações dessa tabela.

Prof.: Hum. E o que vocês conseguiram?

El: Modelo. Daí aqui o número de anéis é 2, a altura está aqui.

Prof.: Considerando o ângulo de revolução de 27 graus?

El: Nós fizemos de 60 graus.

Prof.: *Os silos que vocês conhecem são nesse formato?*

Al: *Não. Eles não têm esse “negócio” aqui embaixo.*

El: *Ele é mais parecido com isso (mostra o cilindro no livro). Esse que nós desenhamos teria que juntar essa figura (cilindro) e essa outra (tronco de cone).*

Prof.: *Como vocês farão?*

El: *Podemos fazer desse, que é cilindro? Porque vai ser mais fácil e é como os silos que nós conhecemos. Desse outro tipo eu nunca vi.*

A partir da pesquisa nos livros didáticos, o procedimento dos alunos, com a orientação da professora, foi definir o estudo sobre o cilindro, por ser o sólido geométrico que, para eles, era a melhor representação de um silo de armazenamento e também porque julgavam ser “mais fácil” porque não precisariam dispor de muitos algoritmos. Esse procedimento de olhar e buscar entender as informações disponíveis, bem como selecionar aquelas que estavam mais próximas da sua realidade e pareciam mais simples de resolver, retrata que os alunos mobilizaram a ação cognitiva *compreensão da situação*, pois indica que eles relacionaram ideias e atribuíram significado para a situação problema.

Após essa compreensão que incidiu na escolha do silo cilíndrico para estudo, os alunos passam a aprofundar seu diálogo sobre como resolver o problema que consistia em calcular o volume do sólido em questão, conforme mostra o Episódio5, a seguir:

Episódio 5

Prof.: *Se nós analisarmos a base de um silo cilíndrico, que figura é?*

Al: *Uma “bola”.*

El: *Um círculo.*

Al: *É um círculo.*

Prof.: *Vocês lembram que nós já estudamos sobre o círculo?*

Lu: *Tem no caderno, né?[sic]*

Prof.: *Sim. Tem os elementos e também como calcular a área, certo?*

Lu: *Deixa eu ver aqui... Sim.*

Prof.: *Então... Imaginemos que essa área da base será ocupada por milho até o topo, ou seja, toda a altura do cilindro. Assim, se vocês pretendem calcular o volume de um cilindro, poderão fazer multiplicando a área da base, que é um círculo, pela altura. Que é a fórmula que está no livro, como vocês encontraram?*

El: *O r é o raio e h é a altura?*

Prof.: *Sim.*

El: *E esse símbolo é o ‘pi’? Não lembro quanto que ele vale.*

Prof.: *Podemos considerar seu valor aproximado de 3,14.*

El: *E o raio, quanto mede? Ele pode variar, não é?*

Os alunos reconhecem o raio e a altura como principais elementos do cilindro e identificam a sua base é um círculo, figura sobre a qual eles apresentavam conhecimento prévio, ou seja, conheciam seus elementos e sabiam calcular a área da base. Bastaram algumas explicações complementares da professora para eles entenderem que a altura também deveria ser considerada para obter o volume do silo. Com tais conhecimentos adquiridos, para calcular o volume do silo em formato cilíndrico, os alunos optaram por variar o tamanho do raio. Entender técnicas e conceitos matemáticos necessários para resolver um problema e definir a grandeza matemática que sofreria variação, se configuram como procedimentos emergentes da ação cognitiva *matematização* que possibilitou o entendimento, em linguagem matemática, dos dados envolvidos no problema.

A partir da interpretação dos conceitos matemáticos envolvidos, utilizaram a fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, em que $\pi \cdot r^2$ é a área da base e h é a altura do cilindro, para calcular o volume total do silo. No entanto, consideraram o raio variável e fixaram a altura em 10 m. Tal encaminhamento aponta que a ação cognitiva *síntese* possibilitou o procedimento dos alunos de resolver matematicamente a situação e encontrar resultados matemáticos para o problema, conforme Figura 9.

Figura 9: Volume de um silo de armazenamento.

Raio	altura	volume total
2	10	125,6 m ³
3	10	282,6 m ³
4	10	502,4 m ³
5	10	785 m ³

Qual a capacidade de armazenamento dos silos de acordo com o tamanho do raio.

Fonte: Registro dos alunos.

A partir do quadro apresentado na Figura 9, passam à análise dos resultados obtidos para o volume total do silo de altura fixa (10 m) e raio variável (2, 3, 4 e 5 m), com orientação da professora, conforme ilustra o Episódio 6.

Episódio 6

Prof.: *Qual era a capacidade de armazenamento de milho nos silos cilíndricos de acordo com o tamanho do raio, esse era o trabalho de vocês, certo?*

Lu: *Sim.*

Prof.: *E vocês conseguiram?*

Lu: *Deu isso daqui, os resultados são esses da tabela.*

El: *Um silo com raio 2 m e altura 10 m tem volume 125,6 m³. O de raio 3 deu 282,6 m³.*

[...]

Prof.: *Sim, mas isso é só o volume do silo, correto?*

El: *É verdade. Mas e a capacidade não é a mesma coisa?*

Prof.: *Será? O volume do silo é medido em que?*

El: *Metros cúbicos.*

Prof.: *Cada metro cúbico armazena quanto de milho? Vocês lembram?*

El: *Deixa eu ver aqui, está anotado... 0,75 ton/m³. Ah... entendi.*

Al: *Eu não entendi!(sozinha)*

El: *Mas daí 1 metro cúbico cabe isso?*

Prof.: *Sim. Conseguiu entender agora a diferença entre o volume e a capacidade de armazenamento?*

El: *Sim. O volume é do silo seco e a “armazenagem” é a quantidade de milho que cabe nele. Só multiplicar o volume por 0,75.*

Nesse diálogo fica evidente que dois dos alunos sabiam explicar o que os resultados descrevem (volume do silo), porém quando a professora intervém, chama-os a analisar sua pergunta e depois as respostas, buscando favorecer a sua percepção de que o volume do silo não satisfaz por completo a situação problema por eles estruturada, porque buscavam a capacidade de armazenamento de milho. Esse procedimento de olhar para o resultado obtido, interpretar seu significado e associá-lo à situação problema inicial julgando-o satisfatório ou não para o contexto em estudo, denota que a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados* viabilizou a síntese de resultados, comparação e articulação de respostas com a situação inicial.

Ainda no Episódio 6 notamos que, ao reconhecer que os resultados obtidos constituíam uma resposta incompleta para a situação problema que estavam investigando, o aluno **El** retoma suas informações a respeito do tema e afirma ser necessário multiplicar os volumes dos silos (os quais eles já haviam calculado) por 0,75 ton/m³. Isso nos mostra que a ação cognitiva *síntese* leva o aluno ao procedimento de complementar a solução por meio da realização de um novo cálculo.

Para apresentar os resultados a professora sugere aos alunos representar os silos em tamanho reduzido, ou seja, sugerem que utilizem uma escala para reproduzir um silo cilíndrico nos tamanhos definidos pelos alunos (Episódio 7).

Episódio 7

Prof.: Por que vocês não reproduzem isso num tamanho menor?

El: Mas daí nós vamos fazer a metade?

Lu: Vai ficar muito grande (risos).

Prof.: Vocês podem fazer em centímetros.

El: Dá para nós fazer 2 cm para 10?[sic]

Prof.: Ou 2 cm para 1 m. Você poderá trabalhar com escala nesse caso.

O aluno *El* ao falar “Dá para nós fazer 2 cm para 10” deixa claro que existe uma noção de reduzir o tamanho real para um tamanho menor, embora a ideia ainda não esteja bem formada (se é 2 cm para 10 cm ou para 10 m). A orientação da professora possibilita aos alunos, ao construir uma representação do objeto real em um tamanho reduzido, definir variáveis matemáticas e trabalhar com escala e proporcionalidade. O procedimento de calcular medidas proporcionais, de 2 cm para representar 1 m, indica que os alunos mobilizaram a ação cognitiva *síntese* que possibilitou-os utilizar operações e conhecimentos matemáticos e inferir resultados.

Mesmo com a escala sendo definida, é a representação dos silos que leva os alunos a interpretar o material construído em linguagem matemática. Esse fato aparece no Episódio 8.

Episódio 8

El: Esses dois pequenos têm 20 cm de altura e esse grande tem 25.

Prof.: Se esse 20 está representando 10 m, que foi para os quais vocês já calcularam no caderno, o de 25 está representando quanto?

Lu: 25.

Prof.: Sim, a medida dele é 25 cm. Mas esse de 20 cm está numa escala para 10 metros. E esse que mede 25 cm, estará representando quanto?

El: Será 12 e meio?

Prof.: Isso! 12 e meio. Como vocês pretendem seguir com a atividade?

Identificamos nesse episódio que o procedimento dos alunos foi realizar uma leitura da atividade desenvolvida, quando interpretam que se 20 cm representa 10 m, logo 25 cm representaria 12,5 m, emergiu da *interpretação e validação de resultados* que oportunizou,

num processo avaliativo, examinar e explicar as características matemáticas do material construído.

Ao considerar a medida de 12,5 m de altura para o silo, identificamos que os alunos demonstraram curiosidade e autonomia para assumir novas possibilidades de investigação. O procedimento de perceber que a altura também poderia variar pode ter emergido da ação cognitiva *matematização*, decorrência do olhar do aluno para a situação buscando novas perspectivas matemáticas para resolver o problema.

A partir da percepção de que o volume dependia tanto do tamanho do raio quanto da medida da altura, os alunos passam a tecer novos pensamentos e evidenciam a necessidade de comparar o volume de armazenamento em duas situações distintas: aumento da altura do silo com raio fixo e aumento do raio do silo com altura fixa. Para isso, a professora sugeriu que eles construíssem “tabelas”, como era seu propósito no início da atividade, uma que apresentasse o tamanho do raio variável e a altura fixa e vice versa.

Assim, os procedimentos de atribuir valores para variáveis e realizar as operações matemáticas ao resolver o cálculo de volume do cilindro e de capacidade do silo, sugerem que a ação cognitiva *síntese* foi mobilizada pelos alunos. Os resultados foram organizados conforme tabela 3 e 4 a seguir.

Tabela 3: Variação do volume de silo cilíndrico de altura 10 m e raio r.

Silo	Raio (m)	Pi	Altura (m)	Volume (m ³)	Volume (toneladas)
1	2	3,14	10	125,6	94,2
2	3	3,14	10	282,6	211,95
3	4	3,14	10	502,4	376,8
4	5	3,14	10	785	588,75

Fonte: Produção dos alunos.

Tabela 4: Variação do volume de silo cilíndrico de raio 4 m e altura h.

Silo	Raio (m)	Pi	Altura (m)	Volume (m ³)	Volume (toneladas)
1	4	3,14	7	351,68	263,76
2	4	3,14	8	401,92	301,44
3	4	3,14	9	452,16	339,12
4	4	3,14	10	502,4	376,8

Fonte: Produção dos alunos.

O procedimento de organizar os dados em tabelas de forma a apresentar os resultados foi decorrente da ação cognitiva *estruturação da situação*, que viabilizou aos alunos

visualizar resultados e realizar comparações plausíveis tanto do volume do silo em função do tamanho do raio e/ou da altura, quanto a variação da capacidade de armazenamento de milho, que era de $0,75 \text{ ton/m}^3$, para os silos estudados. As conclusões dos alunos acerca dos resultados obtidos são discutidas no Episódio 9, que retrata o modo como os alunos compreenderam e resolveram a situação problema inicial.

Episódio 9

Prof.: *Muito bem. Agora, vocês saberiam explicar como fizeram para calcular o volume de armazenamento?*

El: *Sim. A gente multiplicou o volume do silo por $0,75 \text{ ton/m}^3$.*

Prof.: *E como vocês calcularam o volume do silo?*

El: *Usando a fórmula $v = \pi \cdot r^2 \cdot h$ e agora “vezes” $0,75$.*

Prof.: *Ok. E o que é r , o que é o h e o que é e quanto vale o π ?*

Lu: *O r é o raio né? E h é altura.*

El: *O “pi” a gente usou $3,14$.*

Prof.: *Isso aí. Quando vocês aumentaram 1 m de raio do silo, quanto que aumentou o armazenamento de milho?*

Al: *Deixa eu pegar a calculadora.*

El: *Faca lá: $211,95$ menos $94,2$ dá igual a... $117,75$.*

Prof.: *E quando aumenta 1 m de altura?*

Lu: *Tem que fazer de menos de novo?*

El: *Sim. Dá $37,68$.*

Prof.: *Quando que o aumento no armazenamento é maior: quando aumenta 1 m de raio ou 1 m de altura?*

El: *Quando aumentou 1 m de raio, aumentou bem mais o volume nessa primeira “conta” que a gente fez.*

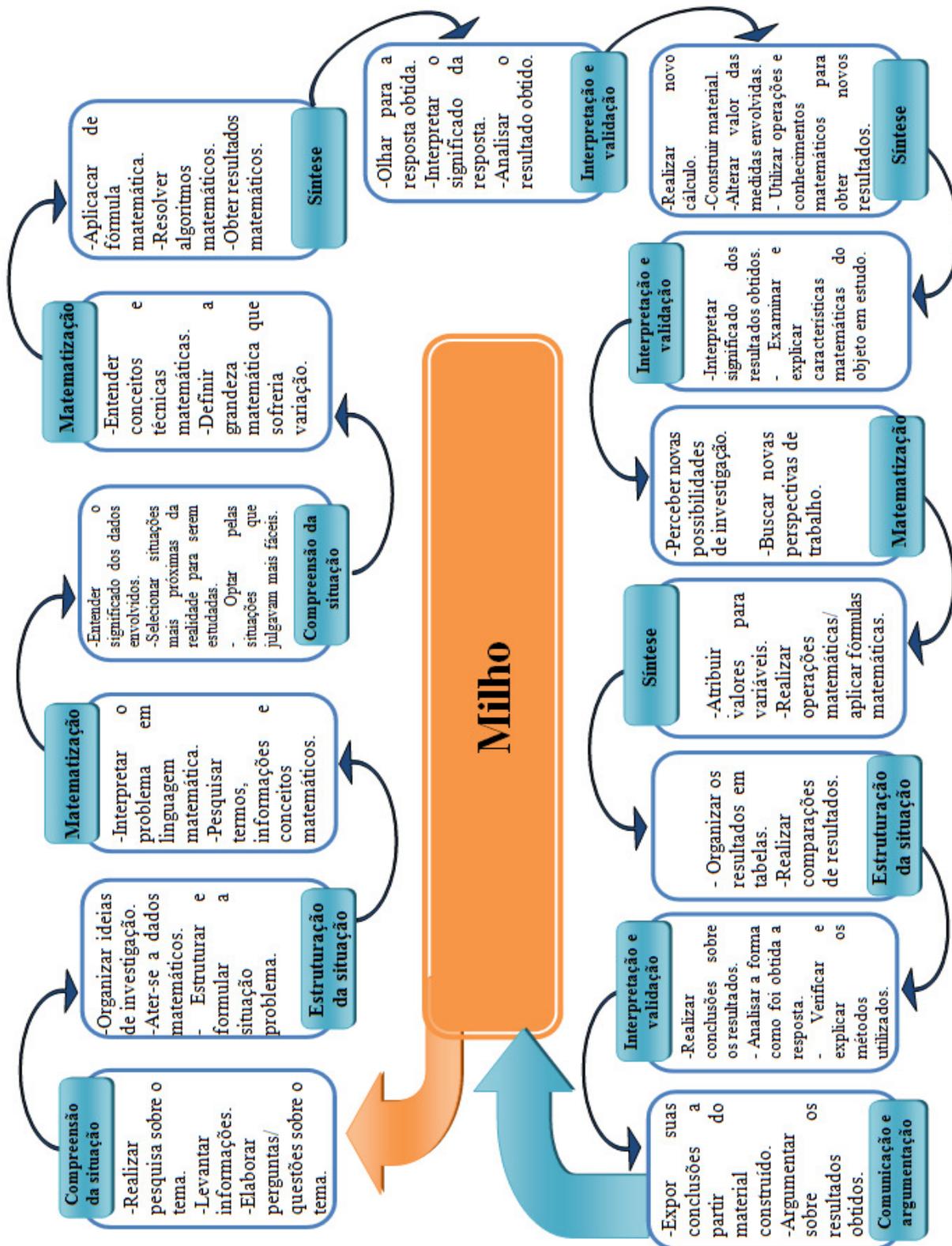
No diálogo acima, a professora interroga a maneira como os alunos descrevem a solução encontrada e representada na tabela, sendo possível perceber que a capacidade de armazenamento de milho de um silo cilíndrico foi calculada por meio da utilização da fórmula $v = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 0,75$, em que os alunos obtêm a quantidade em toneladas. A partir da análise das respostas e de intervenção da professora, os alunos verificam que ao aumentar em 1 m o tamanho do raio o volume aumenta em uma proporção maior se comparado ao volume obtido quando a altura aumenta 1 m , ao mesmo tempo em que ressalta que a afirmação realizada é sobre a “primeira ‘conta’ que a gente fez”. Assim, nesse episódio, a mobilização da ação cognitiva *interpretação e validação de resultados*, pode ter levado o aluno a manifestar o procedimento de analisar a forma como a resposta foi construída, explicar e verificar os

métodos que eles utilizaram para chegar aos resultados expressos na tabela, bem como realizar comparações e conclusões acerca do contexto estudado.

Para finalizar, os alunos realizaram uma breve apresentação do trabalho para a professora e para os demais colegas da turma, expondo a construção dos silos em tamanho menor, o cálculo do volume do silo e a capacidade de armazenamento de milho, juntamente com as demais informações extra matemáticas encontradas sobre o tema escolhido em cartazes elaborados para essa finalidade. Dessa forma, expor o material construído, realizar a apresentação oral e em forma de cartazes das informações encontradas e apresentar os resultados matemáticos inferidos se constituem procedimentos dos alunos nesse momento da atividade. Tais procedimentos podem ter emergido da ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados*, a qual favoreceu a aceitação da resposta obtida e posterior comunicação de informações e explanação de resultados.

Os procedimentos manifestos pelos alunos, na atividade com o tema Milho, e que aparecem associados as suas ações cognitivas são apresentados na Figura 10 a seguir.

Figura 10: Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas na atividade de modelagem matemática com o tema Milho.



Fonte: Autoras.

4. Resultados e discussão

Em busca de realizar um olhar global sobre as atividades de modelagem matemática desenvolvidas nesse estudo, recordamos nosso objetivo, que consiste em investigar acerca dos procedimentos manifestos pelos alunos do 8º ano durante suas ações cognitivas, bem como as duas questões que orientaram nossas análises: Quais procedimentos são manifestos pelos alunos ao longo da atividade de modelagem matemática, desde a situação inicial (problemática) até a situação final (solução possível para a problemática) e como eles se relacionam? Os discursos e as intervenções do professor favorecem ou limitam a manifestação dos procedimentos dos alunos decorrentes de suas ações cognitivas?

Em cada atividade, buscamos a partir dos dados coletados, em especial, dos registros dos alunos, evidenciar os aspectos condizentes com essas questões, cuja reflexão é oportuna nesse momento. Assim, apresentamos para cada questão algumas reflexões que sinalizam respostas para a problemática enunciada.

No que concerne à primeira questão “Quais procedimentos são manifestos pelos alunos ao longo da atividade de modelagem matemática, desde a situação inicial (problemática) até a situação final (solução possível para a problemática) e como eles se relacionam?”, observamos nos registros dos alunos a manifestação de diversos procedimentos, como selecionar problemas, interpretar dados matemáticos referentes à situação em estudo, discutir estratégias para resolver a situação problema identificada, apresentar resultados por meio de cartazes, nas atividades com o tema Erva-Mate; pesquisar sobre o tema, efetuar cálculos com uso da calculadora, analisar os resultados obtidos, na atividade com a temática Planetas do Sistema Solar e; optar por ater-se a dados matemáticos, resolver algoritmos matemáticos, perceber novas possibilidades de investigação e obter resultados matemáticos, na atividade que teve o Milho como tema.

Evidenciamos que, embora as atividades desenvolvidas sejam distintas e tenham características particulares, os procedimentos manifestos pelos alunos se repetem em algumas delas, como elaborar perguntas diversas sobre os temas de investigação, estruturar/formular uma situação problema, elaborar tabelas para organizar os resultados, utilizar operações matemáticas para obter resultados, analisar e comparar respostas e argumentar sobre as soluções encontradas.

Ao olhar para tais procedimentos evidenciamos cinco categorias, a saber: procedimentos que focalizam a temática em estudo, procedimentos que indicam organização do trabalho a ser realizado, procedimentos que depõem a escolha de estratégias, procedimentos que revelam o uso ou compreensão de conceitos matemáticos e procedimentos que denotam processos avaliativos. No Quadro 10 apresentamos essas categorias associadas aos procedimentos manifestos pelos alunos.

Quadro 10. Categorias associadas aos procedimentos dos alunos.

CATEGORIAS	PROCEDIMENTOS MANIFESTOS PELOS ALUNOS
Procedimentos que focalizam a temática em estudo	<ul style="list-style-type: none"> - Selecionar problemas. - Levantar questões. - Elaborar perguntas sobre o tema. - Discutir sobre a pergunta a ser elaborada. - Pesquisar sobre as questões levantadas. - Realizar pesquisa sobre o tema. - Levantar informações. - Interpretar problema em linguagem matemática. - Examinar e explicar características matemáticas do objeto em estudo. - Olhar para a resposta obtida. - Comunicar e convencer. - Aceitar os resultados como corretos. - Comunicar a solução encontrada. - Realizar conclusões sobre os resultados. - Verificar e explicar os métodos utilizados. - Argumentar sobre os resultados obtidos. - Realizar argumentações sobre os encaminhamentos assumidos.
Procedimentos que indicam organização do trabalho a ser realizado	<ul style="list-style-type: none"> - Selecionar questões que julgam mais fáceis. - Assumir algumas informações como relevantes. - Analisar os dados mais significativos. - Resumir informações. - Organizar ideias de investigação. - Reestruturar as questões em forma de perguntas matemáticas. - Escrever questões direcionadas. - Identificar um problema a resolver partindo de perguntas matemáticas rotineiras. - Olhar para a situação e deliberar sobre o que investigar. - Formular problemas. - Estruturar situação problema. - Reescrever situação problema.

	<ul style="list-style-type: none"> - Ver o problema de forma fracionada. - Entender a situação a partir de simulação dos dados matemáticos. - Pesquisar termos, informações e conceitos matemáticos. - Reduzir opções de investigação. - Limitar a busca. - Direcionar o problema de investigação.
<p>Procedimentos que depõem a escolha de estratégias</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Buscar por fórmula matemática para resolver o problema. - Reutilizar seus cálculos para traçar novas estratégias. - Retomar valores. - Testar outros valores. - Apresentar os resultados por meio de cartazes. - Construir quadro para organizar variáveis. - Resolver o problema por partes para entender o todo. - Definir estratégias de resolução. - Usar calculadora para inferir resultados. - Encontrar nova forma de calcular. - Elaborar quadro para descrever os resultados encontrados. - Ater-se a dados matemáticos. - Selecionar situações mais próximas da realidade para serem estudadas. - Optar pelas situações que julgam mais fáceis. - Definir a grandeza matemática que sofreria alteração. - Realizar novo cálculo. - Construir material. - Buscar novas perspectivas de trabalho. - Atribuir valores para variáveis. - Organizar os resultados em tabelas. - Expor suas conclusões a partir do material construído. - Deliberar sobre o problema em seus aspectos matemáticos. - Optar pelo aspecto mais fácil. - Definir novos encaminhamentos para o problema. - Expor sua investigação usando maquete.
<p>Procedimentos que revelam o uso ou compreensão de conceitos matemáticos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Resolver operações matemáticas. - Refazer cálculos. - Resolver operações matemáticas exigidas para aquele contexto. - Comparar resultados. - Identificar o uso de conceitos matemáticos envolvidos na resolução que fizeram. - Construir uma representação algébrica para resolver o problema matemático. - Compreender processos matemáticos envolvidos. - Mobilizar conhecimentos prévios. - Aprender conceitos, técnicas e representações matemáticas. - Manipular algoritmos matemáticos.

	<ul style="list-style-type: none"> - Comparar resultados. - Refazer operações. - Obter novos resultados parciais. - Interpretar conceitos matemáticos envolvidos. - Resolver cálculos matemáticos. - Aplicar métodos/técnicas matemáticos. - Utilizar estratégias matemáticas. - Manipular dados matemáticos. - Mobilizar conhecimentos matemáticos. - Obter resultados. - Realizar conclusões. - Entender o significado dos dados envolvidos. - Aplicar fórmula matemática. - Resolver algoritmos matemáticos. - Utilizar operações e conhecimentos matemáticos para obter novos resultados.
<p>Procedimentos que denotam processos avaliativos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Avaliar se a resposta obtida era válida para aquela situação. - Analisar o (novo) resultado obtido. - Reconsiderar os dados e informações matemáticas que eles tinham. - Assumir outro encaminhamento na tentativa de resolver a situação. - Rediscutir estratégias para resolver o problema. - Reconhecer a necessidade de refazer os cálculos. - Analisar a resposta. - Reconhecer características matemáticas. - Comparar novamente os resultados. - Reconsiderar as informações. - Analisar soluções. - Interpretar e verificar resultados. - Interpretar cálculos efetuados. - Interpretar o significado da resposta. - Alterar valor das medidas envolvidas. - Perceber novas possibilidades de investigação. - Realizar comparações entre resultados. - Analisar a forma como foi obtida a resposta.

Fonte: Autoras.

Como observamos nessa categorização, embora alguns procedimentos manifestos pelos alunos pareçam ser o mesmo, eles retratam coisas distintas, ou seja, um mesmo procedimento pode ter diferentes significados se considerado o contexto no qual ele foi identificado. Como o procedimento de comparar resultados, que aparece tanto como processo avaliativo, na atividade do Milho quando os alunos comparam os resultados expressos nas

Tabelas 3 e 4 com a intenção de avaliar os resultados obtidos, quanto como procedimento que revelam o uso ou compreensão de conceitos matemáticos, no contexto da atividade do grupo B da Erva-Mate quando os alunos estão em processo de compreensão de estratégias matemáticas utilizadas. Também, na atividade da Erva-Mate (grupo A), o procedimento dos alunos de selecionar questões que julgam mais fáceis parece indicar a organização do trabalho a ser realizado, enquanto que na atividade com o tema Planetas do Sistema Solar, ao optar pelas situações que julgam mais fáceis na busca por formular uma situação problema, sugere um procedimento que depõem a escolha de estratégias.

Além disso, evidenciamos que em uma mesma categoria os procedimentos são ora matemáticos, ora não matemáticos, o que nos leva a inferir que no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática emerge, a todo o momento, tanto conhecimentos matemáticos como não matemáticos. Como exemplo, na categoria que trata dos procedimentos que depõem escolha de estratégias aparecem procedimentos matemáticos (reutilizar seus cálculos para traçar novas estratégias, atribuir valores para variáveis e testar outros valores são procedimentos matemáticos) e procedimentos não matemáticos (apresentar os resultados por meio de cartazes e selecionar situações mais próximas da realidade para serem estudadas. Inferimos ainda que os procedimentos matemáticos não necessariamente aparecem associados à categoria dos procedimentos que revelam o uso ou compreensão de conceitos matemáticos.

A análise realizada também nos leva a comunicar que os procedimentos que depõem escolhas de estratégias, de modo geral, são os que mais influenciam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, ou seja, é nessa categoria que se mostram os procedimentos mais decisivos nas atividades analisadas. Na atividade desenvolvida pelo grupo A da Erva-Mate, um procedimento com essa característica foi o de construir um quadro para organizar variáveis na resolução do problema e o procedimento de resolver o problema “por partes” para entender o todo. Outros exemplos de procedimentos decisivos, evidenciados nessa categoria, aconteceram na atividade com o tema Milho, na opção dos alunos pelo silo cilíndrico, por ser mais próximo da sua realidade, e ao definirem um valor fixo para a altura do silo, optando por variar o tamanho do raio, isto é, a variável a ser alterada.

Por fim, identificamos que os procedimentos manifestos pelos alunos, em cada uma das atividades de modelagem matemática analisadas, reflexos de suas ações cognitivas, ora

levam os alunos a explicitar, alterar e/ou modificar seus modos de pensar, ao passo que exige deles a mobilização e/ou construção de conhecimentos matemáticos ou não, ora os provocam a rever seus pensamentos e suas decisões. Ainda, na transição da situação inicial para a situação final em uma atividade de modelagem matemática, observamos que não é apenas um procedimento isolado, mas o conjunto de procedimentos manifestos pelos alunos que contribui para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam mobilizados e/ou construídos e integrados. Desse fato, inferimos que os procedimentos aparecem interligados, dependentes um do outro e se completam ao longo da atividade, ou seja, os procedimentos se complementam à medida que os alunos buscam responder ao problema que originou a atividade de modelagem matemática. Ao considerar que os procedimentos em sua totalidade é que possibilitam o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, reconhecemos que o que é tratado por *unicidade* (VERTUAN, 2013), é uma característica específica desse tipo de atividade. Os diálogos entre os alunos do grupo, apesar de serem os responsáveis por grande parte dos procedimentos manifestos por eles, não podem ser analisados separadamente, ou seja, precisam ser compreendidos em um contexto que considera as intervenções do professor. Isso nos remete a refletir a segunda questão “O discurso e as intervenções do professor favorecem ou limitam a manifestação dos procedimentos dos alunos?”.

Ao longo das atividades de modelagem matemática desenvolvidas observamos diversas intervenções da professora que influenciaram a manifestação dos procedimentos dos alunos enquanto estes buscavam responder o problema em foco. Ou seja, alguns dos procedimentos dos alunos foram frutos de atitudes da professora.

Essas atitudes da professora se aproximam da assertiva de Dias (2004), quando expõe que o papel do professor, em um ambiente de Modelagem Matemática, consiste em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a busca por argumentos e justificativas que possibilitem aos alunos confirmar ou não suas hipóteses. Além disso, “cabe também ao professor estimular a comunicação entre os alunos” (p.43) e ao organizar momentos de discussão das atividades desenvolvidas pelos alunos, o professor pode ajudá-los a superar certas dificuldades, motivando-os a refletir, a partir de tal atividade, sobre papel da Matemática na sociedade, sempre com cuidado para valorizar igualmente suas opiniões e resultados obtidos.

Por exemplo, na atividade da Erva-Mate (grupo B) quando os alunos buscam uma fórmula que possam utilizar para obter a quantidade de Erva-Mate pronta, sabendo-se apenas as medidas dos lados de um terreno retangular qualquer, o procedimento de retomar uma primeira solução encontrada, na intenção de identificar porque a fórmula não fornecia um resultado adequado, só aconteceu mediante intervenções constantes da professora. Já na atividade com a temática Milho, a professora ao sugerir: “*Por que vocês não reproduzem isso (o silo) num tamanho menor?*”, favorece o procedimento de compreender aspectos matemáticos referente à escala, bem como o procedimento de compreender que além da medida do raio, poderiam variar também a altura do silo.

Tais atitudes possibilitaram a identificação das seguintes categorias: questionar, sugerir e esclarecer. A primeira categoria diz respeito à intervenção da professora em forma de questionamentos, ou seja, a professora faz perguntas na intenção de que os alunos reflitam sobre o que estavam pensando ou que pensem sobre algo que não haviam considerado. A segunda categoria, sugerir, agrupa intervenções do professor que tem como propósito orientar e direcionar o trabalho dos alunos. Sendo assim essas intervenções têm característica sugestiva. Já a terceira categoria, esclarecer, considera as intervenções com caráter explicativo.

As intervenções em forma de questionamentos realizados pela professora foram acerca de encaminhamentos (*Escolheram uma situação problema?*), conhecimentos prévios (*Pensando que o terreno é um quadrado de medida 30 m por 30 m. Como calculamos a área de um quadrado?*), intenções dos alunos com seus procedimentos (*Qual será o foco do trabalho de vocês? Vocês ainda não definiram o que vocês querem estudar. Informações vocês tem bastante e todas são interessantes, mas em qual delas vocês vão centrar as atenções?*) e sua compreensão acerca da matemática e da situação em estudo (*Como e por que sobram 16? ou E quando aumenta 1 m de altura, o que acontece?*).

Os questionamentos se tornam mais intensos no momento da interpretação e análise dos resultados, pois há uma preocupação por parte da professora se de fato os alunos aprenderam e conseguem expor seus encaminhamentos, estratégias e argumentos que convençam que a resposta encontrada é consistente e satisfatória. Para isso, a professora retoma a forma como eles resolveram o problema, lançando perguntas do tipo “*Muito bem. Agora vocês saberiam explicar como fizeram para calcular o volume de armazenamento?*”

(atividade do Milho) ou “*como vocês vão explicar esse resultado?*” (atividade grupo A Erva-Mate). Tais perguntas favorecem o procedimento de comunicar e convencer sobre a solução encontrada.

Contudo, alguns dos questionamentos, direcionados aos aspectos matemáticos e de resolução matemática, foram tão pontuais que bloquearam a autonomia do aluno no procedimento de buscar, por si próprio, o “por que” de muitas coisas, tais como “por que” 0,333333... significa 10 pacotes de Erva-Mate, na atividade do grupo A. A intervenção da professora nesse caso, restringiu a ação do aluno ao procedimento de refazer seus cálculos. Isso acontece também na atividade com o tema Milho ao perguntar “*Cada metro cúbico armazena quantos de milho? Vocês lembram?*” restringe um possível procedimento do aluno de perceber que o resultado que eles tinham encontrado até então era referente ao volume do cilindro e não à quantidade de milho que poderia ser armazenada no silo cilíndrico estudado, portanto não era suficiente para responder ao problema, ou seja, limita ao procedimento de realizar novo cálculo.

Ao perguntar “*Escolheram uma situação problema?*”, a fala da professora remete os alunos a associar a situação problema a uma “pergunta”, o que pode ter sido uma limitação imposta inconscientemente nas falas da professora, que corrige essa percepção de situação problema, possibilitando aos alunos pensá-la como algo que gostariam de investigar. A partir do momento que a professora questiona “*O que vocês pensaram quando vocês escolheram esse tema?*”, conduz que os alunos repensem e discutam sobre a pergunta que seria seu problema.

Os questionamentos acerca de aspectos matemáticos levaram os alunos a resolver o problema evidenciado ao mesmo tempo em que mobilizavam ou construía conhecimentos matemáticos envolvidos na situação. As perguntas “*Se nós analisarmos a base de um silo, que figura que é?*” e “*esse de 20 cm está representando 10 m, o de 25 cm estará representando quantos m?*” feitas pela professora no contexto da atividade Milho, a pergunta “*se você tirou 13 fardos inteiros, quantos sobraram?*” na atividade do grupo A da Erva-Mate e a indagação sobre “*quanto mais distante do Sol, o que acontece com a temperatura?*” feita em relação ao problema sobre os Planetas do Sistema Solar, são exemplos de questões matemáticas direcionadas que podem ter colaborado para a aprendizagem matemática dos alunos e dessa forma manifestar o procedimento de resolver cálculos matemáticos.

Quando o aluno demonstrou suas intenções e objetivos com a atividade, porém sem saber qual rumo tomar, o papel do professor foi no sentido de orientar, sugerir possibilidades, sem a intenção de impor a sua verdade. Em todos os grupos, percebemos que foi também a partir da sugestão da professora que os alunos passam ao procedimento de elencar perguntas matemáticas sobre o tema, embora nem todos os grupos consideram tal sugestão. Os procedimentos de olhar para os dados e de resumir informações a respeito do tema também pode ter sido decorrentes de indicações feitas pela professora.

No exemplo da atividade dos Planetas do Sistema Solar, logo que os alunos definem o tema, a intervenção da professora tem o sentido de sugerir possibilidades de investigação posto que eles dispunham de várias informações, mas não sabiam como utilizá-las. Ao realizar apontamentos sobre possíveis rumos da atividade nas falas “*talvez vocês possam pesquisar sobre inverno e verão*” e “*uma possibilidade é relacionar essas duas variáveis: distância e temperatura*”, a professora expõem possibilidades para que o aluno consolide seu pensamento ou amplie sua visão sobre a situação em estudo. Como se tratam de sugestões, os alunos descartaram a primeira e utilizaram parcialmente a segunda sugestão nessa atividade.

Na atividade da Erva-Mate (grupo B) o procedimento de levantar questões diversas sobre o tema, nos parece ser um procedimento que reprimiu o aparecimento de outros procedimentos dos alunos, por exemplo, definir de imediato uma situação problema, pesquisar ou realizar discussões sobre o tema. Tal constatação se deve ao fato de que os alunos levantaram questões diversas por ser uma sugestão da professora.

As intervenções na categoria esclarecer direcionaram os procedimentos que revelam o uso ou compreensão de conceitos matemáticos, isto é, podemos notar que os esclarecimentos da professora são realizados nos momentos da atividade de modelagem matemática que requerem mobilização ou construção de conhecimentos matemáticos.

Desse modo, no que diz respeito à aprendizagem, em especial de matemática, a professora foi mediadora de conhecimentos, ao “explicar”, justificar e esclarecer aspectos matemáticos associados a cada atividade desenvolvida. Na atividade com a temática Milho, o procedimento de definir a situação problema a ser investigada foi manifesto pelos alunos tão logo a professora conversou com eles sobre as informações que haviam encontrado e esclareceu alguns termos, características e conceitos fundamentais sobre o armazenamento de

milho em silos. No diálogo abaixo, retirado do Episódio 3 dessa atividade, observamos como isso aconteceu.

El: E o que quer dizer essas informações aqui?

Prof.: Toneladas por m^3 ? Um metro cúbico refere-se a volume. Um bom exemplo é medir lenha cubada. Vocês já viram? Como se fosse uma caixa, de um metro de comprimento, por um de altura e um metro de largura “1 por 1 por 1”. Quer dizer que em um metro cúbico caberá isso aqui de tonelada, 0,75 toneladas por m^3 . Vocês podem descobrir quantos quilos isso representa.

El: Aí o volume em metros cúbicos dá pra gente saber quantas toneladas vai?

Também são as intervenções da professora, ao prestar esclarecimentos, que amparam os procedimentos dos alunos do grupo B da Erva-Mate, quando buscam compreender processos matemáticos envolvidos na construção e representação algébrica de algoritmos utilizados para responder ao problema. Nessa atividade, a professora acompanha a resolução matemática do problema e analisa com os alunos a melhor forma de construir tal solução, sugere possibilidades ao passo que constroem a aprendizagem de conceitos, técnicas e métodos matemáticos por meio de suas explicações. O recorte do Episódio 7 dessa atividade, retrata esse fato.

El: Professora não entendi. Vou usar essas fórmulas. Mas o x e o y valem 40?

Prof.: O x e o y é a medida do lado que você vai usar. Você usa 40?

El: Não. Eu uso 39.

Prof.: Isso. Porque “vai sobrar um pedaço” do terreno que você não vai usar. [sic]

Ainda nessa atividade, foram as intervenções da professora, quando busca esclarecer conceitos e métodos matemáticos, que levaram os alunos a pensar sobre os cálculos e as variáveis envolvidas no problema e decidir assim concretizar as operações necessárias para chegar a um resultado satisfatório, chegando a 676 kg como resposta válida para o problema.

Em alguns casos, no momento de esclarecer dúvidas, a professora acabava privando os alunos do procedimento de busca ao “entregar” algumas respostas, como no caso da atividade do Milho, quando o aluno afirma “E esse símbolo é o ‘pi’? Não lembro quanto que ele vale.” a professora fala, de forma precisa que “Podemos considerar seu valor aproximado de 3,14”, enquanto poderia ter sugerido uma busca sobre seu valor e mesmo construído seu

significado. Isso, de certo modo, limitou os alunos ao procedimento de aplicar a fórmula matemática para obter resultados.

No Quadro 11 apresentamos essas categorias associadas aos procedimentos manifestos pelos alunos.

Quadro 11. Síntese das potencialidades das intervenções.

CATEGORIAS	PROCEDIMENTOS MANIFESTOS PELOS ALUNOS	
	Favorecido pela intervenção da professora	Limitado pela intervenção da professora
Questionar	<ul style="list-style-type: none"> - Resolver questões matemáticas. - Comunicar e convencer. - Construir uma representação algébrica para resolver o problema matemático. - Refazer operações. - Definir novos encaminhamentos para o problema. - Selecionar situações problemas mais próximas da realidade. - Interpretar o significado da resposta. - Analisar o resultado obtido. - Examinar e explicar significado dos resultados obtidos. - Explicar e verificar os métodos utilizados. 	<ul style="list-style-type: none"> - Elaborar cartazes. - Discutir sobre a pergunta a ser elaborada. - Optar pelas situações que julgavam mais fáceis. - Realizar novo cálculo. - Refazer cálculos.
Sugerir	<ul style="list-style-type: none"> - Reestruturar as questões em forma de perguntas matemáticas. - Avaliar se a resposta obtida é válida para aquela situação. - Refazer os cálculos. - Elaborar quadro para descrever os resultados encontrados. - Reescrever situação problema. - Resumir informações. - Testar outros valores. - Propor outra situação problema. - Manipular dados matemáticos. - Levantar informações. - Comparar resultados. - Aceitar resultados como corretos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Levantar questões diversas. - Mobilizar conhecimentos prévios. - Retomar valores. - Direcionar o problema de investigação. - Construir material. - Organizar os dados em tabelas.
Esclarecer	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretar os dados matemáticos. - Analisar soluções. - Interpretar e verificar resultados. - Estruturar e formular a situação problema. - Entender conceitos e técnicas matemáticas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Manipular algoritmos matemáticos. - Aplicar fórmula.

Fonte: Autoras.

Nesse quadro percebemos que os procedimentos manifestos pelos alunos também são resultantes de intervenções da professora, que ora favorece a sua manifestação, ora limita algum procedimento. Porém, percebemos que, na maioria das vezes, o discurso do professor contribui para que os alunos mobilizem conhecimentos que os levem a manifestar procedimentos, tendo caráter favorável nas decisões dos alunos. Ainda que algumas vezes ele pareça limitar possíveis procedimentos dos alunos, as intervenções do professor tanto podem significar uma interferência na forma como os alunos conduziram a atividade, como pode ser uma forma de evitar que eles assumam algum procedimento que não contribua para o bom desenvolvimento da atividade, dessa forma, o “limitar” não é exatamente algo negativo.

Em todas as atividades a professora precisou realizar uma pesquisa mais detalhada sobre aspectos diversos de cada tema, selecionar materiais que julgava ser mais interessantes para os alunos e informar-se sobre possíveis situações matemáticas que poderiam ser tratadas em sala de aula. Ou seja, as mediações realizadas pela professora durante a atividade de modelagem matemática foram baseadas em um estudo (básico) prévio realizado acerca do tema e da situação.

As intervenções realizadas pela professora acontecem, muitas vezes, a partir de indicações em conversas com alunos, como da necessidade, expressa na forma de pergunta, demonstrada por eles de que a professora “autorize” algum procedimento: “*Professora, nós podemos fazer uma pergunta tipo assim: Quantas arrobas de erva podem ser produzidas em 2 ou 3 km²?*”. Assim como o professor facilita ou limita procedimentos dos alunos em atividades de modelagem matemática, os alunos também influenciam a ocorrência dessas intervenções. Portanto, em atividades de modelagem matemática, notamos que mais que adaptar-se e se acostumar a essa alternativa pedagógica de ensino, enquanto repensa sua prática, o professor é convidado a pensar e aprender junto com o aluno sobre cada tema, cada problema e cada solução. Isso nos leva a considerar que os procedimentos manifestos pelos alunos são também uma construção do professor, pois conforme Veronez (2013).

a resposta para o problema depende, de modo geral, dos encaminhamentos e **procedimentos adotados pelos alunos** e de seus conhecimentos **e das intervenções realizadas pelo professor**. Todavia, é importante que tais intervenções e a independência dos alunos mantenham certo grau de equilíbrio, de forma a garantir autonomia dos alunos frente ao problema em estudo e em relação às estratégias de resolução adotadas (p. 27, grifos das autoras).

Nossas reflexões nos levam a conjecturar que, embora as intervenções do professor ora favoreçam, ora limitam a manifestação de procedimentos dos alunos, elas não determinam por si só desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Os alunos são responsáveis por esse desenvolvimento, ou seja, seus conhecimentos acerca da situação em estudo e da matemática e sua vontade de aprender, associada às intervenções do professor, permite que eles assumam encaminhamentos para a atividade de modelagem matemática apoiados nos procedimentos manifestos em decorrência de suas ações cognitivas.

Considerações Finais

Ao utilizar atividades de modelagem matemática, como alternativa pedagógica, no contexto das aulas de matemática, vislumbramos possibilitar aos alunos um ambiente de aprendizagem regido por discussões de situações problema advindas do cotidiano, da realidade, que faça sentido e/ou seja do interesse do aluno.

No estudo descrito nesse relatório de pesquisa, que tinha por objetivo investigar o que se revela das ações cognitivas dos alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, identificamos que eles manifestam diversos procedimentos, enquanto se envolvem com atividades de modelagem matemática²¹, que estão associados as suas ações cognitivas.

Essa identificação se deu a partir da coleta de dados que aconteceu durante o quarto bimestre do ano letivo de 2015 em duas turmas 8º ano de Ensino Fundamental em uma escola do campo, durante as aulas da disciplina de Matemática, na qual a pesquisadora era também professora da turma. O material coletado (registros dos alunos realizados durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática) serviu de fonte de reflexão e análise, assim como as gravações de áudio e vídeo, após serem transcritas.

De modo geral, evidenciamos que mais do que aprender matemática, atividades de modelagem matemática possibilitam conhecimentos diversos. Também, sugerem um olhar para a matemática de forma ampla, uma vez que os conceitos trabalhados, utilizados e discutidos no âmbito de uma atividade de modelagem matemática vêm aliados ao olhar que se tenta ou se pretende dar ao problema em estudo. O olhar sobre a situação e o encaminhamento dado à atividade completa-se na interação e cooperação possibilitada pelo trabalho em grupo, bem como pela mediação do professor.

Ao olharmos para os procedimentos manifestos pelos alunos, associados às suas ações cognitivas, e para as características fundamentais de uma atividade de modelagem matemática, que apontamos na seção 1.3.1 do Capítulo 1, constatamos que eles são o que determinam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Logo, todos os

²¹ Como resultado deste trabalho de dissertação elaboramos um Material de Apoio Pedagógico (Produto Educacional) intitulado “ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS POR ALUNOS DE 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA DO CAMPO”, contendo, além de atividades de modelagem matemática desenvolvidas, sugestões aos professores e indicações que podem orientar o trabalho daqueles que intencionam implementar atividades de modelagem matemática nas suas salas de aula.

procedimentos são determinantes para a elaboração de uma resposta para o problema que originou a atividade de modelagem matemática, sejam eles matemáticos ou não matemáticos.

No trânsito da situação inicial para a final, os procedimentos manifestos pelos alunos revelam que não há linearidade nas ações cognitivas, isso porque houve um movimento de idas e vindas nas atividades que provocou que os alunos retomassem ou repensassem sobre aspectos já considerados e os reavaliassem quando necessário. Tais atitudes, além de provocar que os alunos mobilizassem conhecimentos, ativaram, mais de uma vez e de forma não linear, suas ações cognitivas.

Em praticamente todas as atividades, os alunos apresentaram procedimentos que precisaram, em momento posterior, serem revistos. Isso denota, que mesmo os procedimentos sendo decorrentes de suas ações cognitivas, eles não os avaliam imediatamente à sua manifestação. Além disso, os alunos nem sempre percebem a necessidade de rever informações ou soluções não válidas, resultando que alguns procedimentos se repitam ao longo da atividade de modelagem matemática. Porém, mesmos os procedimentos sendo iguais ou pareçam semelhantes, identificamos que eles, em alguns momentos, são decorrentes de ações cognitivas distintas.

Outra constatação é que procedimentos matemáticos e não matemáticos são manifestos independentemente da ação cognitiva que o origina, ou seja, ações cognitivas que aparentemente parecem requerer procedimentos matemáticos têm também atrelados a elas procedimentos não matemáticos. Por exemplo, na atividade da Erva-Mate do grupo A, a ação cognitiva *matematização*, que parece estar associada apenas a procedimentos matemáticos, tem como procedimentos entender a situação a partir da simulação dos dados matemáticos e definir estratégias de resolução e analisar os dados mais significativos, respectivamente procedimento matemático e procedimento não matemático. Isso sugere que a mobilização de conhecimentos diversos, acerca da situação em estudo e da matemática, acontece a todo o momento.

Sobre os temas das atividades desenvolvidas, notamos que a escolha da maioria dos grupos está ligada a temáticas relacionadas ao campo, dentre elas: Fumicultura, Produção de Maracujá, Milho, Feijão e Erva-Mate. Essa observação nos leva a inferir que as escolhas dos alunos sofrem forte influência do cotidiano deles, já que eles residem em áreas que esses temas são bastantes presentes. Tais escolhas também refletem o interesse deles por

desenvolver sua investigação acerca de situações reais, aspecto discutido no âmbito da Modelagem Matemática.

Desenvolver atividades de modelagem matemática nessa escola do campo nos possibilitou evidenciar características peculiares da Modelagem Matemática e trouxe à tona a questão de os alunos terem oportunidade de aprender matemática tendo aspectos da realidade como ponto de partida ou, de aprimorar seus conhecimentos sobre algo, seja da matemática e sua utilidade imediata ou da situação em foco.

Como sugerem as Diretrizes Curriculares da Educação do Campo é preciso tornar o ensino e a aprendizagem do aluno “cada vez mais próxima da realidade dos sujeitos do campo, criando assim um sentimento de pertencimento das crianças e adolescentes, que vão ter na escola um trabalho educativo com sentido em suas vidas” (PARANÁ, 2002, p.9). Isso implica em reconhecer que os alunos inseridos nesse espaço têm sua cultura e sua identidade vinculada ao campo, por isso a importância de desenvolver atividades peculiares “à realidade do campo, sem perder de vista a dimensão universal do conhecimento e da educação” (PARANÁ, 2002, p.18).

Diferente do que muitas vezes acontece quando o professor trabalha com o método tradicional de ensino, por meio de atividades de modelagem matemática, o aluno pode aprender conceitos, técnicas e métodos matemáticos em decorrência de ter que resolver um problema que, às vezes, pode ter sido por ele formulado. Consideramos aqui, escola tradicional, método ou ensino tradicional como sendo expressões que normalmente

remetem para escolas propensas ao uso de métodos pedagógicos inaceitáveis e retrógrados em que apenas se ensinava e aprendia por meio da memorização e da rotina, sem materiais de ensino para além do quadro e do giz ou em que a disciplina era imposta por punições severas (MATOS, 2006, p.12).

Talvez porque esse método ainda se faz muito presente na vida de professores e alunos, é que o grupo B da Erva-Mate requeria que a professora fornecesse uma fórmula matemática para que eles pudessem aplicar valores e obter a resposta pronta. Outro resquício do ensino tradicional pode ser notado no procedimento, do grupo A da Erva-Mate, de elaborar perguntas rotineiras comumente presentes em livros textos. A aproximação das perguntas elaboradas pelos alunos com as que frequentemente vemos nos livros didáticos reflete quão marcante o ensino tradicional é para a aprendizagem dos alunos. Segundo Stahl *et al* (2011), o

uso constante do livro didático é uma tendência do ensino tradicional, implicando que ele muitas vezes seja o único material didático utilizado pelo professor em suas aulas. Daí o fato de os alunos quererem elaborar uma pergunta com as mesmas características daquelas que normalmente precisam responder nas aulas de matemática.

Trabalhar com Modelagem Matemática, contudo, é desconsiderar que a atitude do aluno seja passiva, que consista em memorização de regras, fórmulas, procedimentos e operações matemáticas de maneira lógica e sequencial, pronta e acabada. As aulas de Matemática que concentram atividades de modelagem matemática exigem que o aluno pense, busque alternativas, construa métodos e respostas de acordo com a sua necessidade em responder um problema que emergiu da sua realidade, do seu interesse em investigar.

Sendo assim, é importante considerar que a prática do professor influencia na forma como o aluno percebe, vivencia e desenvolve uma atividade de modelagem matemática. Nesse contexto é exigido do professor uma atitude mediadora, orientadora do processo. A mediação do professor é essencial no momento de orientar caminhos e possibilidades de abordar os temas, na hora de mediar conhecimentos matemáticos úteis na resolução dos problemas e também no momento de refletir, avaliar e interpretar as respostas obtidas.

Diante disso, consideramos que alguns dos procedimentos manifestos pelos alunos e explicitados nesse estudo são fruto de intervenções realizadas pela professora. Isso porque, muitas atitudes dos alunos durante o seu envolvimento com as atividades de modelagem matemática, partiram de sugestões, questionamentos ou explicações da professora. Assim, as intervenções realizadas pela professora ao questionar, sugerir e esclarecer encaminhamentos e conceitos aos alunos faz com que muitos procedimentos sejam reflexos dessas intervenções e que outros sejam limitados por elas.

De qualquer modo, o professor continua sendo indispensável no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. A intervenção do professor, seja questionando, sugerindo ou esclarecendo, deve possibilitar ao aluno o “pensar”, fazer com que ele, de forma autônoma, busque construir ideias e estratégias, elaborar métodos, defender argumentos, tomar decisões e, de modo geral, ser o responsável pela própria aprendizagem.

A atitude do professor na condução de atividades de modelagem matemática convida os alunos a assumir, repensar e mesmo modificar/alterar os procedimentos manifestos por

eles, assim como a avaliar suas próprias conclusões acerca da resposta obtida para o problema em estudo, conforme é notório nas atividades apresentadas.

Convém destacar que as atividades de modelagem matemática descritas nesse estudo representam apenas uma das possibilidades de se abordar o tema Erva-Mate, Milho e Planetas do Sistema Solar. Foi o olhar peculiar dos alunos, reunidos em grupos, e as intervenções do professor, que os levou a manifestar procedimentos que se mostraram relacionados ao seu modo de pensar, entender e administrar as informações sobre o tema e sobre matemática, e que se permitiram o desenvolvimento ora relatado e discutido.

Referências

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. 1ª reimpressão. SP: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: algumas relações. **Ciência & Educação**. V.18, n.3, pp. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, ano 17, n. 22, p. 19– 35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W; PALHARINI, B. N. Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 43, p. 907-934, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BASSANEZI, R.C. **Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. 1999.

BORROMEO FERRI, R. Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines et al. (Eds), **Mathematical Modelling**. Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, P. 260-270, 2007.

_____. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. **Revista Educação e Matemática**. Lisboa, nº110, p.19-25, nov/dez de 2010a.

_____. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. **ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 31, pp. 99-118, 2010b.

_____. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

DIAS, Michele Regiane. **Uma Experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**- Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 38, n. 3, pp. 302- 310, 2006.

MATOS, J. M. História do ensino da matemática em Portugal: constituição de um campo de investigação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.11-18, maio./ago. 2006.

MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA; Ademir Donizeti e MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

OLIVEIRA, **Andréia Maria Pereira de**. **Modelagem matemática e as tensões nos discursos dos professores**. Tese (doutorado) Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2010.

PARANÁ, Governo do Estado do. **Diretrizes Curriculares da Educação do Campo**. 2002.

PRODANOV, Cleber Cristiano. FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico** [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico – 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Modelagem Matemática e Semiótica:algumas relações**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

STAHL, N.S.P.; SANTOS, P.M.; GREGÓRIO, V.L.S.S. e SILVA, E.A.O tradicional e as metodologias alternativas no ensino da matemática. **I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste**. Uberlândia, MG, 2011.

VERONEZ, Michele Regiane Dias. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. 2013. 247p. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

ANEXO 1: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE – UNICENTRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPESP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – COMEP
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) –
PAIS/RESPONSÁVEIS

Prezado(a) Colaborador(a),

Seu(a) filho(a) está sendo convidado(a) a participar da pesquisa **UM OLHAR PARA OS ERROS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**²², sob a responsabilidade de ELIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO, o qual pretende avaliar as atividades de modelagem matemática realizados pelos seu(a) filho(a), acompanhando o desenvolvimento dessa atividade reconhecemos que erros podem surgir. Se seu(a) filho(a) e os colegas cometem erros, pretendemos entender quais as relações entre os erros, com o pensamento, o raciocínio e a obtenção do conhecimento, ou seja, como os erros auxiliam ou impedem a aprendizagem, durante atividades de modelagem matemática. Ainda, se os erros acontecem, queremos identificar como e porque eles surgem enquanto seu(a) filho(a) participa de atividades de modelagem matemática. Para além, queremos analisar como o discurso do professor pode ajudar os alunos da turma do 8º ano a superar suas dificuldades com a modelagem matemática ou com conteúdos matemáticos e usar o erro como fonte de aprendizado e de conhecimento.

1. PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA: A Modelagem Matemática é uma forma de trabalharmos conteúdos matemáticos, partindo de uma situação do nosso dia a dia. Assim, vamos reconhecer, na nossa realidade, quando nós utilizamos a matemática. Partiremos de um tema de nosso interesse, do nosso lugar, do nosso cotidiano, e, a partir desse tema vamos construindo nosso conhecimento. Para isso, utilizamos a ideia dos autores que já desenvolveram atividades de modelagem matemática antes, como Almeida, Silva e Vertuan (2013), que afirmam que a modelagem parte de uma situação inicial (problemática) para uma situação final (resposta para a problemática), e para que haja essa transição, envolvem-se alguns procedimentos sendo eles: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. O professor pesquisador orientará e explicará todos esses procedimentos no decorrer da atividade.

Ao participar desta pesquisa seu(a) filho(a) participará das atividades de modelagem matemática propostas durante as aulas de matemática. Disponibilizando os registros realizados durante as aulas, participando das gravações de áudio e vídeo quando envolvidos com Modelagem Matemática.

Lembramos que a participação na pesquisa é voluntária, você tem a liberdade de não querer que seu(a) filho(a) participe, e pode desistir, em qualquer momento, mesmo após ter iniciado as atividades de modelagem matemática sem nenhum prejuízo para ele.

2. RISCOS E DESCONFORTOS: Os procedimentos utilizados na coleta de registros, nas gravações de áudio e vídeo, poderão trazer algum desconforto como vergonha, timidez, desconforto ao ser filmado. O tipo de procedimento que apresenta um risco mínimo de desconforto que será reduzido pela orientação do professor pesquisador e por meio do esclarecimento sobre as atividades realizadas, antes, durante e depois da realização da

²²O título utilizado nos documentos submetidos ao COMEP- Unicentro, indicam a nossa primeira intencionalidade com o projeto de pesquisa. Embora tal título tenha sofrido alteração, o trabalho desenvolvido conserva as mesmas características de coleta de dados.

pesquisa. Se seu(a) filho(a) precisar de algum acompanhamento ou orientação, por se sentir prejudicado por causa da pesquisa, ou sofrer algum dano decorrente da pesquisa, o pesquisador se responsabiliza pela assistência integral, imediata e gratuita de ser desligado o material de gravação de áudio e/ou vídeo, e atendimento para orientação individual. Além disso, o pesquisador compromete-se a fazer o acompanhamento durante o desenvolvimento da pesquisa, em particular, com aqueles que sentirem-se desconfortáveis e mesmo entrar em contato com os senhores, os responsáveis, informando a situação, caso seja necessário.

3. BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados com o estudo são no sentido de melhorar o ensino e aprendizagem de matemática por meio do estudo de situações a partir da realidade e do interesse dos alunos da turma. Acreditamos que desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, pode acontecer erros, e que esses erros retratam atitudes, do seu(a) filho(a) e dos colegas, na busca por uma solução para o problema e seus conhecimentos acerca da matemática e da situação em foco e, compreender os erros, auxilia nas possíveis intervenções que o professor precisa fazer para facilitar a aprendizagem do seu filho em matemática.

4. CONFIDENCIALIDADE: Todas as informações que seu(a) filho(a), nos fornecer ou que sejam conseguidas por registros escritos, áudio e vídeo, serão utilizadas somente para esta pesquisa. Seus registros escritos, imagens e gravações de voz ficarão em segredo e o nome do seu(a) filho(a) não aparecerá em lugar nenhum dos relatórios, vídeos e transcrição de áudios nem quando os resultados forem apresentados.

5. ESCLARECIMENTOS: Se tiver alguma dúvida a respeito da pesquisa e/ou dos métodos utilizados na mesma, pode procurar a qualquer momento o pesquisador responsável.

Nome do pesquisador responsável: ELIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

Endereço: PERDIDOS – GUAMIRANGA

Telefone para contato: (42) 9108-1615

Horário de atendimento: das 8:00 as 17:00 horas

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso você aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira. Caso eventuais danos aconteçam, resultantes dos riscos previstos ou imprevisíveis, não haverá nenhuma reparação financeira.

7. CONCORDÂNCIA NA PARTICIPAÇÃO: Se você estiver de acordo em participar deverá preencher e assinar o Termo de Consentimento Pós-esclarecido que se segue, em duas vias, sendo que uma via ficará com você.

=====

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a) _____, portador(a) da cédula de identidade _____, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelos pesquisadores, ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito do lido e explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO em permitir que seu(a) filho(a) _____, participe voluntariamente desta pesquisa. E, por estar de acordo, assina o presente termo.

Guamiranga, _____ de _____ de _____.

Assinatura Representante legal

Assinatura do Pesquisador

**ANEXO 2: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE – UNICENTRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPESP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – COMEP**

Termo de assentimento para o adolescente

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **UM OLHAR PARA OS ERROS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**. Seus pais permitiram que você participe.

Avaliar as atividades de modelagem matemática realizadas por você e seus colegas do 8º ano, acompanhando o desenvolvimento dessa atividade e possíveis erros que podem surgir. Se você e seus colegas cometem erros, pretendemos entender quais as relações entre os erros, com o pensamento, o raciocínio e a obtenção do conhecimento, ou seja, como os erros auxiliam ou impedem a sua aprendizagem, durante atividades de modelagem matemática. Ainda, se os erros acontecem, queremos identificar como e porque eles surgem enquanto vocês participam de atividades de modelagem matemática. E analisar como o discurso do professor pode ajudar você e seus demais colegas a superar suas dificuldades e usar o erro como fonte de aprendizado e de conhecimento.

Os adolescentes que irão participar, junto com você, desta pesquisa têm de 12 a 16 anos de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita na sala de aula, onde vocês participarão de atividades de Modelagem Matemática. Para isso, será usado/a câmera filmadora, gravador de áudio e as atividades escritas. O uso da câmera filmadora, do gravador de áudio e as atividades escritas, é considerado seguro, mas é possível ocorrer desconforto, timidez e vergonha por estar sendo filmado/gravado. Caso aconteça algo errado, você pode procurar pelo telefone (42) 91081615 da pesquisadora Elida Maiara Velozo de Castro. O pesquisador compromete-se a desligar o material de gravação e prestar orientação individual e particular caso você se sinta desconfortável ou fique envergonhado e tímido diante da situação citada. O pesquisador acompanhará todo o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, prestando esclarecimentos sempre que você precisar. Também, se você achar necessário, entraremos em contato com seus responsáveis.

Mas há coisas boas que podem acontecer como os benefícios esperados com o estudo são no sentido de melhorar o ensino e aprendizagem de matemática por meio do estudo de situações a partir da realidade que você vive, e você poderá reconhecer a matemática no seu dia a dia. Acreditamos que os erros, que acontecem no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, retratam as suas atitudes na busca por uma solução para o problema e seus conhecimentos acerca da matemática e da situação em estudo e, compreendê-los, auxilia nas possíveis intervenções que o professor precisa fazer para facilitar sua aprendizagem em matemática.

Se você morar longe do Colégio Estadual Professor Antonio Emilio Antonelli, nós daremos a seus pais dinheiro suficiente para transporte, para também acompanhar a pesquisa. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar os alunos que participaram.

Quando terminarmos a pesquisa, discutiremos sobre os benefícios dos erros cometidos por você e demais colegas, associados ao seu pensamento matemático, ao seu raciocínio como você obtém o conhecimento, durante as atividades de modelagem matemática. Esperamos contribuir com o ensino e a aprendizagem de matemática de maneira que saibam utilizar conhecimentos matemáticos no cotidiano.

Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. Eu escrevi o telefone na parte de cima deste texto.

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Eu _____ aceito participar da pesquisa **UM OLHAR PARA OS ERROS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e que ninguém vai julgar.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Guamiranga, ____ de _____ de _____.

Assinatura do adolescente

Assinatura do(a) pesquisador(a)

ANEXO 3

Secretaria de Estado da Educação do Paraná
Núcleo Regional de Educação – NRE, Irati
Chefia

CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Marisa Massa Lucas Chefe do Núcleo Regional de Educação de Irati, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada **UM OLHAR PARA OS ERROS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA** sob responsabilidade da pesquisadora Elida Maiara Velozo de Castro no Colégio Estadual Professor Antonio Emilio Antonelli. Para isto, será disponibilizado ao pesquisador todo o espaço físico da escola.

Irati, 07 de julho de 2015



Marisa Massa Lucas

Marisa Massa Lucas
Chefe - NRE de Irati
Decreto nº 836
NRE 9417 de 24/03/2015

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR ANTONIO EMÍLIO
ANTONELLI – GUAMIRANGA, PR.

CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Eu, JAQUELINE ROSA PONTAROLO, DIRETORA DO COL. EST. PROF. ANTONIO EMÍLIO ANTONELLI, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada UM OLHAR PARA OS ERROS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA sob responsabilidade da pesquisadora ELIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO no 8º ANO A e 8º ANO B DO COL. EST. PROF. ANTONIO EMÍLIO ANTONELLI. Para isto, será disponibilizado à pesquisadora todo o espaço físico da escola.

Guamiranga, 08 de julho de 2015.

JAQUELINE ROSA PONTAROLO
RES. 0185/2015 DIOE: 9411 - 16/03/2015
DIRETORA RG: 3.684.878-2



Jaqueline Rosa Pontarolo
Diretora do Col. Estadual Prof. Antonio Emilio Antonelli

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR
ANTONIO EMÍLIO ANTONELLI
BOA VISTA - GUAMIRANGA - PR
FONE: (42) 3438-1090