MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM

GUARAPUAVA, PR

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE,
UNICENTRO-PR

MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SAMUEL FRANCISCO HUF

GUARAPUAVA, PR
2016

SAMUEL FRANCISCO HUF

MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Dionísio Burak

Orientador

GUARAPUAVA, PR

2016

Catalogação na Publicação
Biblioteca Central da Unicentro, Campus Cedeteg

H889m

Huf, Samuel Francisco
Modelagem na Educação Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental: uma perspectiva para o ensino e a aprendizagem / Samuel Francisco Huf. – – Guarapuava, 2016
xiii, 134 f. : il. ; 28 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, 2016

Orientador: Dionísio Burak
Banca examinadora: Dionísio Burak, Celia Finck Brandt, Márcio André Martins
Inclui Produto intitulado: "Fundamentos e práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental". de autoria de Samuel Francisco Huf e Dionísio Burak. 30 p.

Bibliografia

1. Ciências Naturais. 2. Matemática. 3. Modelagem matemática. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino e aprendizagem. I. Título. II. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

CDD 500.7

SAMUEL FRANCISCO HUF

MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 12 de dezembro de 2016.

Prof. Dr. Dionísio Burak
Universidade Estadual do Centro-Oeste -UNICENTRO
Orientador

Profa. Dra. Célia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Prof. Dr. Márcio André Martins
Universidade Estadual do Centro-Oeste -UNICENTRO

Guarapuava, PR
2016

“*O SENHOR é o meu pastor: nada me faltará.*

Deitar-me faz em verdes pastos,

guia-me mansamente à águas tranquilas” Salmos 23: 1, 2.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ser a luz que guia meus caminhos.

À minha amada esposa, VIVIANE, pelo apoio, incentivo, compreensão, pelo ombro amigo, por ser parte da minha vida.

Ao meu querido filho VINÍCIOS, por ser a alegria de nossa casa.

Aos meus pais ADÃO e ORLANDA, pela dedicação com que me fizeram crescer e acreditar em meus objetivos.

Aos meus irmãos ELCIO, DENISE e MARIZE, por nossas cumplicidades.

A todos os familiares pela compreensão de minhas ausências.

Ao meu mestre Prof. Dr. DIONÍSIO BURAK por acreditar em mim, pela paciência, por me guiar e orientar nas dificuldades. Sem suas orientações seria impossível esta dissertação. Obrigado, caro Professor Dionísio por me dar a oportunidade de ser seu orientando. Levarei seus ensinamentos por toda minha vida.

À MARIZA, esposa do Prof. Dionísio, por me acolher em sua casa, nas horas de orientações, sempre com alegria e otimismo.

Aos professores da banca examinadora, professora Dra.Celia Finck Brandt e professor Dr. Márcio André Martins, pelo apoio e por contribuírem com sugestões para esta dissertação.

A minhas amigas, ELIDA e CIBELLI, pelas trocas de conhecimentos durante todo o mestrado.

A todos os PROFESSORES que ministraram ensinamentos e fizeram parte de minha vida escolar, desde a pré-escola até o presente momento de defesa do mestrado.

A todos os amigos que fizeram parte de minha trajetória.

A todos os meus alunos que participaram e auxiliaram para que a pesquisa pudesse ser realizada.

À toda equipe do Colégio Estadual do Campo de Cavaco por oportunizar que meus trabalhos fossem desenvolvidos, por colaborarem com o objetivo dos estudantes na arrecadação de fundos para o plantio do pomar, um tema desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS E IMAGENS

LISTA DE QUADROS E TABELAS

RESUMO

Samuel Francisco Huf.

Modelagem na Educação Matemática no 9º ano do ensino fundamental: uma perspectiva para o ensino e a aprendizagem

Este trabalho apresenta aspectos relacionados ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na Educação Matemática, no âmbito do Ensino Fundamental, mais precisamente em uma turma do 9º ano. A questão norteadora da investigação é: o que se mostra em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, a partir das atividades realizadas com Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica? O objetivo geral consiste em apontar as implicações pedagógicas e científicas que decorrem da adoção da Modelagem Matemática na Educação Matemática, em relação ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental da Educação Básica. A partir desse objetivo geral, delimitam-se os específicos: examinar e interpretar os dados coletados das produções e entrevistas com os estudantes, sobre aspectos pedagógicos decorrentes da utilização da Modelagem Matemática; desenvolver um Produto Educacional para os professores da Educação Básica, e a elaboração de um vídeo, a partir das atividades desenvolvidas. Em vista da questão e dos objetivos pretendidos optou-se por uma investigação qualitativa com um posicionamento metodológico interpretativo, quanto à natureza e, quanto ao delineamento da investigação, elegeu-se o estudo etnográfico em educação. A concepção de Modelagem Matemática adotada, para o desenvolvimento das atividades, tem seus pressupostos em Burak (1998, 2004). O tratamento dos dados, em relação à análise do conteúdo, foi realizado na perspectiva Bogdan e Biklen (1994). Os resultados, com base nas manifestações, entrevistas e produção dos materiais resultantes das atividades desenvolvidas pelos estudantes participantes, apontam diferença considerável entre a prática educativa utilizando a Modelagem e a prática usual de um ensino centrado em memorização, problemas de livro texto e situações fictícias. Pelos resultados alcançados considera-se que a melhoria da qualidade do ensino, por parte do professor, é possível quando sai da zona de conforto e tem consequências diretas na aprendizagem de matemática e na formação de um estudante mais crítico e mais preparado para os desafios do presente século.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática. Ensino Fundamental. Ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

Samuel Francisco Huf.

Modelling in Mathematics Education in the 9th grade from elementary school: An outlook for teaching and learning

This paper shows the aspects relate to the activities of mathematical modelling in mathematics education, in the sphere of elementary school, more precisely in the 9thgrade from elementary school. The leading questions of the search is: What is shown in relation to teaching and learning mathematics, from the activities done in the primal teaching of elementary school? The general aim is: pointing the pedagogical and scientific implications resulting of the application of the mathematical modelling in mathematics education. From this main objective, we define the specific ones, to analyze and interpret data collected from productions and interview with the students, on pedagogical aspects of the use of Mathematical Modeling; developing an Educational Product for Basic Education teachers, and a recording video, from the activities done. In view of the question and the intended goals, we opted for a qualitative research following a methodology and interpretative approach, regarding to the nature and research delineation, we appoint ethnographical study in education. The conception of Mathematical Modelling adopted, for the development activities, based on Burak (1998, 2004). The data processing, relate to the analyses of content, it was performed from the perspective of Bogdan e Biklen (1994). Based on the expressions, interview and production of materials resulting from the activities done by students, point to a considerable difference between training practice using Modelling and a usual practice of a study focusing on memorization, textbook problem, and fictional situations. By means of the results achieved is possible to cogitate the improvement of teaching quality, on the part of the teacher, it becomes possible when leaving the comfort zone and has direct consequences on learning math and an education back grounded of a student more critical and better prepared to the challenges of this century.

Keywords: Mathematical Modeling; Elementary School; Teaching and learning.

INTRODUÇÃO

Esta dissertação resulta das atividades realizadas com Modelagem Matemática[1] na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica.

Conforme Burak e Martins (2015), a Modelagem Matemática, na Educação Matemática, consolida-se na educação, prioritariamente na Educação Básica, como uma prática educativa, com foco no processo de ensino e aprendizagem. Por meio da Modelagem Matemática, os estudantes observam sentido e significado no que estudam, com interesse pessoal em preencher necessidades e interesses que dão início à formação de atitudes positivas em relação à matemática (BURAK e MARTINS, 2015). Essa forma proposta pela Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, contrapõe-se ao ensino de Matemática abordado de forma tradicional, quando "[...] tem sido apontada como a disciplina que mais suscita dúvidas e questionamentos dentro do contexto escolar, provocando desde a indiferença por parte dos alunos até traumas pessoais." (RODRIGUES, 2001, p.10).

Diante do que afirma Rodrigues (2001) e dos resultados apontados por avaliações nacionais como SAEB[2], Prova Brasil[3] e ENEM[4] e internacionais, principalmente o Programa de Avaliação Internacional de Estudantes (PISA), o Brasil, em 2012, dos sessenta e cinco países participantes, ficou na quinquagésima oitava posição nos conhecimentos matemáticos avaliados. Portanto, entendemos que a forma usual de se ensinar nas escolas do país não está alcançando os objetivos almejados. Superar essas barreiras cabe a todos, na qualidade de educadores, além de políticas públicas consistentes. Para isso, amparamo-nos na Modelagem Matemática que, no contexto das novas tendências metodológicas da Educação Matemática, apresenta-se como uma alternativa de mudança no processo de ensino e com vistas à aprendizagem. A Modelagem Matemática na Educação Matemática, ao longo dos últimos anos, segundo Burak e Aragão (2010), constituiu-se potencial e pedagogicamente significativa se comparada com o ensino de Matemática da forma tradicional. Apresenta uma dinâmica diferente das vividas nas aulas mais tradicionais quando institui o estudante como sujeito da sua aprendizagem, desenvolve o espírito crítico, a capacidade de diálogo, discussão

---

[1] No texto quando se trata de uma atividade de modelagem matemática utiliza-se minúscula e quando Modelagem Matemática está relacionada a uma concepção utiliza-se maiúscula.
[2] Sistema de Avaliação da Educação Básica.
[3] Avaliação Nacional do Rendimento Escolar.
[4] Exame Nacional do Ensino Médio.

e desenvolve a autonomia, entre outras capacidades, o que possibilita um desenvolvimento significativo dos estudantes envolvidos.

A Modelagem Matemática é uma das tendências defendidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN's, 1998) e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCEs, 2008) da Secretária de Estado da Educação do Paraná, para ser desenvolvida em sala de aula como metodologia para o desenvolvimento do ensino com foco na aprendizagem dos alunos. A Modelagem Matemática oportuniza a conexão do saber científico com o saber do aluno, o que o motiva na busca pelo conhecimento.

A Modelagem Matemática, na concepção assumida nessa investigação, "[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões." (BURAK 1992, p.62). Nessa concepção de Modelagem estão os problemas levantados a partir dos dados coletados, provenientes da pesquisa exploratória relativa ao tema de interesse, que determinam os conteúdos matemáticos a serem trabalhados, seguindo, como se percebe, uma ordem inversa àquela empregada no ensino da forma usual, na qual primeiro aparecem os conteúdos e, logo depois, problemas e exercícios.

A presente investigação, para a consecução do problema proposto e dos objetivos a serem alcançados, será de natureza qualitativa/interpretativa de acordo com os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994) e com um delineamento de Estudo Etnográfico em Educação, seguindo os pressupostos de Ludke e André (1986), Oliveira (2013) e André (1995).

Para os propósitos estabelecidos, esta dissertação estrutura-se em quatro capítulos. No primeiro capítulo, há uma abordagem geral sobre Modelagem Matemática, bem como os precursores, no Brasil, e algumas características das variadas formas de conceber a Modelagem Matemática sob o ponto vista de autores como Barbosa, Bassanezi, Biembengut, Caldeira, Almeida e Burak.

O segundo capítulo é uma revisão da literatura, embasada em teses e dissertações que têm como foco a Modelagem Matemática na Educação Básica e, ainda mais precisamente, no Ensino Fundamental.

O terceiro capítulo trata da metodologia, com algumas considerações a respeito do problema e dos objetivos da investigação, da natureza e do delineamento, que se caracteriza como pesquisa qualitativa interpretativa, com ênfase no tipo etnográfico-educacional. Explicitam-se características de uma pesquisa etnográfico-educacional, esboçando algumas considerações quanto ao local em que os experimentos foram realizados, bem como algumas características dos participantes da investigação. São descritas as etapas e também os procedimentos adotados na investigação. Também há uma descrição do modo como foram realizadas a coleta e o tratamento dos dados e são apresentadas considerações em relação ao objeto educacional.

No quarto capítulo estão contidas as descrições dos temas desenvolvidos: produção de leite, impostos e pomar na escola, bem como as análises das atividades desenvolvidas. A análise dos dados coletados é sistematizada a partir das ações do professor e do envolvimento dos estudantes.

Em seguida há as considerações gerais ou finais.

CAPÍTULO I

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

1.1 Precursores da modelagem matemática no Brasil

Ao encontro das necessidades do ensino e aprendizagem de Matemática, alicerçada nas novas tendências em Educação Matemática, encontra-se a Modelagem Matemática. Mas, é incompleto iniciar tratando da Modelagem Matemática sem trazer um rápido apanhado de seus precursores no Brasil, as pessoas que idealizaram, impulsionaram e contribuíram para a consolidação da modelagem, no final da década de 1970, início de 1980 e que ganharam adeptos em todo o Brasil. Segundo Biembengut (2009) são destacados, neste momento, os nomes de Aristides C. Barreto, Ubiratan D'Ambrosio e Rodney C. Bassanezi.

Conforme o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM)[1], Barreto, em meados da década de 1970, ao atuar como professor do departamento de Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) adapta às suas aulas de matemática o que tinha adquirido de conhecimento sobre Modelagem Matemática quando cursou Engenharia, na década de 1960. Nas disciplinas que leciona, sempre procura utilizar-se de modelos, como estratégias de ensino, o que o leva a aceitar e a entender que, com a Modelagem, os estudantes são mais motivados e interessados, descartam o intrigante questionamento: para que serve isto?

Em 1960, nos Estados Unidos, forma-se o *Undergraduate Mathematics Application Program* – UMAP cujo objetivo é preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas. A partir de um tema preparam-se materiais didáticos, com aplicações em diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de melhorar a aprendizagem de matemática no Ensino Superior. D'Ambrosio, professor e pesquisador na *Brown University*, em Providence, RhodeIsland, na *University of Rhode Island*, em Kingston – Rhode Island e na *State University of New York*, em Búfalo, New York, toma ciência desse programa e, ao retornar ao Brasil, em 1972, para atuar na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, implanta propostas de educação matemática no Brasil semelhantes àquelas de que tomou conhecimento. Nesse momento, ouve falar de Aristides Camargo Barreto, matemático interessado em modelos dinâmicos integrados à música.

---

[1] Disponível em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores. Acesso em 13/02/2016.

A convite de D'Ambrosio, Barreto ministra, na UNICAMP, uma palestra que desperta interesses em Rodney Carlos Bassanezi que, na década de 1980, na coordenação de um curso promovido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC-UNICAMP) para trinta professores de Cálculo Diferencial Integral, de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, propõe a Modelagem Matemática, em particular, na resolução de problemas de Biologia aplicados ao Cálculo Diferencial e Integral (Biomatemática).

Cabe ressaltar que os trabalhos destes professores centram-se, basicamente, na Graduação e na Pós-Graduação. Desta forma, os primórdios da Modelagem Matemática desenvolvem-se com base na matemática pura e aplicada.

Em 1983, a primeira instituição de Ensino Superior do Paraná a abrir-se a essa nova alternativa de ensinar Matemática é a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, atualmente Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, por meio de um curso de especialização coordenado e ministrado por professores do IMECC da UNICAMP. O curso conta com a participação de professores do Primeiro e do Segundo Graus, atualmente Ensino Fundamental e Médio que contribui, significativamente, com a troca de ideias, nessa nova perspectiva, para o ensino de Matemática. (BURAK, 2005).

No curso, Burak, um dos precursores da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Básica, aprimora seus conhecimentos nessa tendência no ensino de Matemática e aperfeiçoa suas experiências no mestrado, na Universidade Estadual Paulista Julio Mesquita Filho – UNESP, Campus de Rio Claro e no doutorado realizado na UNICAMP, experiências que visaram, principalmente, o ensino de Matemática na Educação Básica.

Desde os pioneiros trabalhos com modelagem no Brasil, percebe-se que muitos autores não nutrem a preocupação em conceber maneira distinta para sua utilização em/ou no âmbito da Educação Básica que não aquela da qual a modelagem é originária - das ciências exatas e naturais. Entretanto, visam um meio de tornar o ensino de matemática mais entendível, com aplicação prática dos conteúdos matemáticos no cotidiano dos alunos. Essa forma de conceber a Modelagem na Educação Matemática é importante pois segue o paradigma epistemológico das Ciências Humanas e Sociais que tem implicações diretas na forma de conceber o ser do estudante, o estilo de ensino, a aprendizagem e o objeto de estudo.

Na sequência algumas concepções de modelagem matemática na perspectiva de atores reconhecidos por trabalharem nesse contexto.

1.2 Concepções de Modelagem Matemática

Atualmente, no Brasil, são encontrados vários autores que desenvolvem estudos e pesquisas sobre Modelagem Matemática com diferentes concepções. Nesse trabalho realizamos um estudo dessas concepções, sobre o que é Modelagem Matemática do ponto de vista desses pesquisadores, dentre eles Barbosa (2001, 2004), Bassanezi (2002, 2011), Biembengut (1999, 2009), Biembengut e Hein (2003), Caldeira (2009), Almeida e Brito (2005), Almeida e Ferruzzi (2009), Almeida e Dias (2004), Almeida e Vertuan (2010), Burak (1987, 1992, 1998, 2004), Burak e Klüber (2008), Burak e Aragão (2012).

Cada autor idealiza a Modelagem sob ponto de vista distinto. Em consequência, decorrem formas diferenciadas de conceber e encaminhar as atividades que envolvem a modelagem. Entretanto, todos esperam que essa metodologia, se realizada segundo cada uma de suas concepções, seja de grande valia ao ensino com vistas à aprendizagem da Matemática.

1.2.1 Modelagem para Barbosa[2]

Muitas vezes, a Modelagem Matemática é conceituada, em termos genéricos, como a aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento. Para Barbosa (2004) isso pode ser visto como uma limitação teórica e admite que a "Modelagem é um grande 'guarda-chuva', onde cabe quase tudo. Com isso, não quero dizer que exista a necessidade de se ter fronteiras claras, mas de se ter maior clareza sobre o que chamamos de Modelagem." (BARBOSA, 2004, p. 73).

Barbosa defende que a "Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade." (BARBOSA, 2001, p.6). Com a especificidade da Educação Matemática o autor deixa claro que a Modelagem é de grande importância no contexto escolar:

> Creio que as atividades de Modelagem podem contribuir para desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática. Discussões na sala de aula podem agendar questões como as seguintes: O que representam? Quais os pressupostos assumidos? Quem as realizou? A quem servem? Etc. Trata-se de uma dimensão devotada a discutir a natureza das aplicações, os critérios utilizados e o significado social, chamado por Skovsmose (1990) de conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p.74).

[2]Jonei Cerqueira Barbosa: Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil (2001). Professor da Universidade Federal da Bahia. Orientador de Mestrado e Doutorado.

Do ponto de vista pedagógico, Barbosa sugere o desenvolvimento da Modelagem Matemática dentro do atual programa de ensino nas escolas, explicitando que a atividade pode ser desenvolvida de três formas:

> Caso 1: O professor propõe o problema, traz todas as informações necessárias para resolução, ficando para o aluno a responsabilidade de construir o modelo e encontrar a solução do problema.
> Caso 2: O professor traz o problema que geralmente é de áreas distintas, ou seja, diferentes áreas do conhecimento que não pertencem à Matemática, cabendo aos alunos a busca pelos dados para resolver o problema.
> Caso 3: Este é um pouco diferente, pois, aqui o tema pode ser escolhido pelo professor ou pelos alunos. Os alunos têm um pouco mais de participação, pois, trazem o problema e integram-se em todas as etapas para resolver o problema, isto é, buscam informações que possibilitem a criação do modelo bem como a validação deste. (BARBOSA, 2001 p.4).

Barbosa (2004) levanta como hipótese, que há lacunas em relação ao saber-fazer da Modelagem e do contexto escolar. Em vista disto, aponta dois domínios para a formação dos professores em relação à Modelagem: a experiência como aluno e a experiência como professor. O primeiro domínio diz respeito a desenvolver diversas atividades de Modelagem, experimentando uma variedade de situações, e o segundo refere-se a discutir quais as tarefas do professor no desenvolvimento de atividades de Modelagem. Dessa maneira, a discussão acerca dos domínios traz implicações sobre a natureza das atividades de formação, possibilitando perspectivas para a condução dos processos de formação em Modelagem.

1.2.2 Modelagem para Bassanezi[3]

Bassanezi acredita que o gosto da matemática aumenta com mais facilidade quando é ocasionado por interesses e estímulos externos à matemática, vindos do que ele chama de mundo real. Assim, o caminho para desenvolver esse gosto é a matemática aplicada. O autor destaca que

> A modelagem de situações-problema envolvendo a realidade cotidiana funciona como elemento motivador para o aprendizado dos alunos. Tal efeito motivador não se reflete apenas no aprendizado da matéria, mas também revela aos alunos a interação que existe entre as diversas ciências. A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, **em qualquer nível, mais atraente e agradável**. Uma modelagem eficiente permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e

[3]Rodney Carlos Bassanezi: Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, Brasil(1977) Professor titular da Universidade Estadual de Campinas e Orientador de Doutorado.

> entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. (BASSANEZI, 2002, p. 177, grifo nosso).

Este autor destaca a Modelagem Matemática como um processo que alia teoria e prática, propicia entender a realidade em busca de meios para transformá-la. Compreendida como "[...] um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão."(BASSANEZI, 2002, p. 17).

Ainda, para o autor:

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (Bassanezi, 2004, p.24).

Existem várias definições de modelo matemático e a que, para Bassanezi, é mais clara foi escrita por Mclone (1931): "Modelo matemático é construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular." (2006, p.20).

Os passos a serem seguidos, para construir um modelo matemático, segundo Bassanezi são apresentados em um esquema constante de: "Experimentação; Abstração; Resolução; Validação; Modificação e Aplicação." (2011, p.26). Eis cada um dos passos, propostas por Bassanezi (2011, p. 26-31) de uma forma simplificada:

Experimentação - fase na qual são levantadas as variáveis envolvidas e obtidos os dados necessários para a fase da resolução.

Abstração fase que o autor separa em vários passos por meio dos quais é criado o modelo matemático referente ao problema.

> Seleção das variáveis – A distinção entre as variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema.
> Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando.
> Formulação de hipóteses – As hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas. A geração de hipóteses se dá de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.
> Simplificação – Não são raras as situações em que o modelo dá origem a um problema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido à sua complexidade. Neste caso, a atitude será voltar ao problema original e tentar restringir as informações incorporadas ao modelo em um nível que não desfigure irremediavelmente o problema original, mas que resulte em um problema matemático tratável. (BASSANEZI 2011, p.28-29).
> Resolução – fase em que ocorre a transformação das hipóteses naturais em um modelo matemático.

Validação - fase na qual o modelo é aceito ou rejeitado, pois é analisado se o modelo proposto para resolução do problema é válido ou não.

Modificação - caso ocorra a rejeição, nessa fase é reformulado o modelo proposto, novas informações aparecem e o modelo pode ser ajustado e até mesmo refeito, se necessário.

Essa forma de ver e conceber a Modelagem, por Bassanezi, está voltada principalmente para o Ensino Superior e Pós-Graduação.

1.2.3 Modelagem para Biembengut[4]

Ao descrever modelos Biembengut (1999) destaca:

> [...] a criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Geografia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da Ciência é testemunha disso. (BIEMBENGUT 1999, p.11).

Para que haja essa interação é necessário, na perspectiva da autora, uma série de procedimentos agrupados por Biembengut e Hein (2003) em três etapas: interação: etapa na qual se reconhece a situação-problema e se familiariza com o assunto a ser modelado; matematização: etapa esta em que se formula e resolve o problema em termos do modelo; modelo Matemático: etapa final na qual se interpreta a solução e se valida o modelo.

Para implementar a Modelagem Matemática na prática do ensino da matemática Biembengut e Hein (2003) sugerem cinco passos: diagnóstico sobre os alunos, escolha do tema, desenvolvimento do conteúdo programático, orientações de modelagem e avaliação do processo.

No artigo "30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais", Biembengut (2009) relata o movimento da modelagem na educação, e destaca:

> [...] esse movimento, iniciado há três décadas, inaugurou novo caminho de promover conhecimentos, novas formas de transmitir experiências e novas concepções matemáticas, multiplicando-se proficuamente. Os trinta anos testemunham quão significativa a modelagem matemática tornou-se na Educação brasileira (BIEMBENGUT, 2009, p.1).

Utilizar a modelagem matemática em qualquer nível de Ensino possibilita, antes de tudo, ensinar o estudante a fazer pesquisa e relacioná-la ao seu interesse. Embora existam

[4]Maria SalettBiembengut: Doutora em Engenharia de Produção e Sistemas pela Universidade Federal de Santa Catarina (1997), CLT da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Brasil.

diferentes concepções de Modelagem, elas convergem, não somente em relação à melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática, mas também, e todos concordam, que atividades mediadas pela Modelagem contribuem para maior interação e reação entre os sujeitos envolvidos, o que potencializa a produção de conhecimento (BIEMBENGUT, 2009).

A Modelagem Matemática defendida por Biembengut (1999) consiste em desenvolvê-la em conformidade com o currículo ou programa de ensino previsto na escola, a partir de temas que abordem os conteúdos programáticos estabelecidos, ficando o ensino restrito a um conjunto de conteúdos pré-estabelecido, ano após ano.

1.2.4 Modelagem para Caldeira[5]

Para Caldeira (2009, p.1), a Modelagem Matemática não é apenas um "[...] método de ensino e aprendizagem, mas uma concepção de educação matemática possível de incorporá-la nas práticas de professores e professoras." Ao tratar da Modelagem o autor separa suas argumentações em três partes: a Matemática relacionada com a cultura; os pressupostos epistemológicos que sustentam a Modelagem e os aspectos didático-pedagógicos nessa concepção.

Ao tratar da cultura, destaca a maneira como se pode conhecer a matemática aceitando como uma prática existente e que propõe:

> [...] aceitar a Matemática não mais como aquela defendida pelos pitagóricos e, posteriormente, por Platão de que ela habita fora dos cinco sentidos e posicioná-la numa dimensão humana. Isso nos remete a alguns pontos, dentre eles: Uma concepção de que a Matemática não foi descoberta, mas que é construída ou inventada por meio de padrões e convenções (WITTGENSTEIN, 1999); um currículo que não apenas leve em consideração a 'universalidade' da matemática, mas que possa também considerar aspectos de uma matemática construída nas interações sociais; os valores humanos devem estar intimamente relacionados com a concepção da matemática como construção ou invenção em que se faz presente o diferente. (CALDEIRA, 2009, p.35).

Conforme Caldeira (2009) por ser a cultura um compartilhamento social entre o ser humano, é absurda a ideia de que alguém não tenha cultura. O homem é, igualmente, um produto cultural com crenças, valores, regras, objetos, sentidos, conhecimentos e tudo aquilo que se caracteriza como inerente à espécie humana, determinados pelas condições da época e do local no qual as pessoas vivem.

[5]Ademir Donizeti Caldeira: Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1998). Professor da Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

> Tais produtos culturais não são apenas produzidos, eles devem ser também consumidos e reproduzidos e um dos produtos culturais imprescindíveis para a nossa existência é o conhecimento matemático [...], dado que ele, por se constituir de entendimento, averiguação e interpretação quantitativa, apresenta-se como um dos instrumentos que nos subsidia como ferramenta para intervir na sociedade (CALDEIRA, 2009, p.36).

Na abordagem das questões epistemológicas Caldeira (2009, p.40), na linha da Racionalidade das Ciências Modernas, afirma "[...] que sempre existe um sujeito que conhece e um objeto que é conhecido". Nesse sentido o autor, embasado nas teorias de Chauí (1999), se refere a três perspectivas quanto à questão da fonte do conhecimento matemático, tema que não será aprofundado, neste momento, mas são elas: "[...] a primeira defende que a *fonte* está nas *ideias* - os racionalistas -; a segunda acredita que está nas *coisas* - os empiristas - e que habitam mundos separados, e a terceira que está na *relação* entre as ideias e as coisas, - os construtivistas." (CHAUÍ, 1999 *apud* CALDEIRA, 2009 p. 40).

Quanto à questão didático-pedagógica, Caldeira (2009) se refere à matemática das escolas como algo pronto, uma matemática posta nos currículos escolares por uma lista de conteúdos. Caldeira sustenta a Modelagem Matemática, vindo ao encontro da visão de Burak, como meio de romper com essa linearidade:

> Isso nos permitirá acreditar que as verdades matemáticas não estão prontas e acabadas e que não as descobrimos somente pela razão ou pelos nossos sentidos. No entanto, não basta apenas acreditar que isso possa ocorrer; temos que, na prática, oportunizar nossos estudantes e mostrar que, às vezes, é possível existir uma outra matemática que não somente aquela do currículo oficial. (CALDEIRA, 2009, p.44).

Para Caldeira (2009) o conhecimento matemático adotado pela cultura escolar, se incorporado pelos pressupostos da Modelagem Matemática, faz com que o estudante perceba a necessidade de enfrentar sua realidade e modificá-la, se necessário for. Esse posicionamento acontece, principalmente, pela sua participação ativa em sala de aula. Problematizar, elaborar as próprias perguntas, desenvolver, por meio da pesquisa, refletir e tirar conclusões são pressupostos básicos da perspectiva de Modelagem Matemática. Desta forma, fundamenta-se o jeito de ver o mundo e de pensar, estruturando as coisas e os acontecimentos, estabelecendo uma ordem que dá sentido à vida (CALDEIRA, 2009).

1.2.5 Modelagem na perspectiva de Almeida[6]

Para Almeida, em Almeida e Brito (2005), a Modelagem Matemática constitui-se em uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático, que mostra aplicações da Matemática em diferentes áreas do conhecimento.

Ao tratar da Modelagem nas práticas educativas, com perspectiva investigativa para estabelecer a mediação com aspectos sociais e culturais na construção do conhecimento, destaca que a aula de matemática "[...] pode ser entendida como um espaço investigativo, relacional e comunicativo no qual se pode construir conhecimento." (ALMEIDA e FERRUZZI, 2009, p.118).

> [...] o termo 'modelagem matemática' refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenômeno que pode ser matemático ou não. Neste sentido, trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar (ALMEIDA e FERRUZZI, 2009, p.120).

Nessa perspectiva, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem constitui-se em um conjunto de ações, tais como coletar informações, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, simplificar, obter uma representação matemática (modelo matemático), resolver o problema por meio de procedimentos adequados e analisar a solução, o que implica numa validação e oportuniza afirmar a sua aceitabilidade, ou não.

Na mesma linha, as ações são associadas ao envolvimento com a formulação de um problema; um processo investigativo; a seleção de uma representação matemática (ou modelo matemático); a análise de uma resposta para o problema; a comunicação de resultados para outros (ALMEIDA e FERRUZZI, 2009).

As autoras Almeida e Dias (2004, p.25) concordam que a Modelagem proporciona aos alunos "[...] oportunidades de identificar e estudar situações-problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos matemáticos".

Almeida e Vertuan (2010), apoiando-se em Kaiser e Sriraman (2006), destacam seis perspectivas que se diferenciam em relação ao objetivo central da Modelagem Matemática: realística, contextual, socio-crítica, epistemológica, cognitiva e educacional.

[6]Lourdes Maria Werle de Almeida: Doutora em Engenharia de Produção. No Pós-Doutorado investigou usos da linguagem Matemática a partir da perspectiva de Wittgenstein. Professora da Universidade Estadual de Londrina, desde 1985.

Na perspectiva realística o objetivo é desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados, oriundos da indústria e do ambiente de trabalho. Em aulas de Matemática, a perspectiva contextual tem a finalidade de mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos. A perspectiva socio-crítica se refere ao poder formatador da Matemática na sociedade quanto ao exercício da cidadania. Na perspectiva epistemológica a Modelagem tem como objetivos o desenvolvimento da Matemática enquanto teoria. As situações-problema são estruturadas para gerar o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Na perspectiva educacional, o foco da Modelagem é fazer os alunos investigarem o porquê e o como dos modelos matemáticos. Entretanto, cabe, ao professor a análise das dificuldades dos alunos nas atividades de Modelagem relacionadas à matematização, à interpretação e à aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares. Esta perspectiva divide-se em dois objetivos mais específicos: o de desencadear processos de aprendizagem - perspectiva educacional didática - e o pertinente à introdução de conceitos matemáticos e ao seu desenvolvimento - a perspectiva educacional conceitual. A perspectiva cognitivista é relacionada à educacional e se preocupa em analisar os processos cognitivos ativados, pelos alunos, durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem (ALMEIDA e VERTUAN, 2010).

Para esses autores, se o professor tiver um conhecimento destas diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas, potencializa a prática de Modelagem em sala de aula.

1.2.6 Modelagem para Burak[7]

Para Burak (1987), a grande preocupação é trabalhar a matemática nas escolas, de modo a tornar seu ensino significativo, mais próximo às experiências vividas pelo aluno, ou seja, buscar uma matemática com significado de modo a favorecer a aprendizagem. Nesse entendimento do ensinar, Burak (1987) opta pela Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, pois considera que a liberdade oferecida ao estudante de raciocinar, conjecturar e estimar favorece o pensamento criativo estimulado pela curiosidade e motivação. Julga, ainda, que a contextualização dá mais sentido e

[7]Dionísio Burak: Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1992). Atualmente é professor titular aposentado da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Pós-Doutorado (2010) – Universidade Federal do Pará.

significado para o estudo de Matemática, uma vez que parte do interesse, da motivação por um tema ou situação-problema.

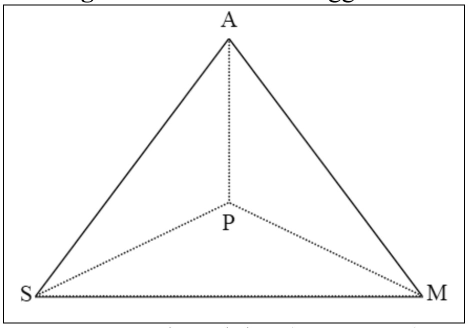
Na tese de doutorado, Burak (1992) insere, na concepção de Modelagem, dois princípios para o desenvolvimento de um trabalho com a Modelagem Matemática: 1) o interesse do grupo ou dos grupos participantes e 2) a obtenção de informações e dados que, sempre que possível, devem ser coletados do ambiente foco do interesse do grupo. Nessa fase Burak "Procura levar em conta os sujeitos, o ambiente social, cultural e outras variáveis." (KLÜBER e BURAK, 2008, p.20).

Na concepção de Burak (1992, p.62) a Modelagem Matemática "[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões."

Burak (2010), ao defender a Modelagem como uma Metodologia de Ensino, o faz com base num entendimento de Educação Matemática que contempla o conhecimento na ótica das Ciências Humanas e Sociais.

A Educação Matemática, em que se ampara a Modelagem Matemática, na interpretação de Burak (1998, 2004, 2010), nasce da necessidade de se considerar, além da matemática, outros aspectos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, sendo "[...] a capacidade cognitiva do sujeito que aprende, a sua cultura, os fatores sociais e econômicos, a língua materna e outros." (BURAK e KLÜBER, 2008, p.94). Tais preocupações envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de matemática levam alguns autores a propor configurações para a Educação Matemática. Inicialmente, o tetraedro "MAPS" de Higginson (1980, *apud* Rius 1989, p.30) formado por quatro áreas: M = Matemática, P = Psicologia, S = Sociologia e A = Filosofia (Figura 1). Conforme Burak e Klüber (2008), para Higginson, essas quatro áreas são necessárias e suficientes para explicar a natureza da Educação Matemática, porque se relacionam, respectivamente, às seguintes perguntas: o quê?, quando? e como?, quem?, e onde?, por quê? Nesta configuração de Educação Matemática, as arestas, faces e vértices mostram as interações possíveis entre a Matemática, Filosofia, Psicologia e Sociologia (BURAK e KLÜBER, 2008).

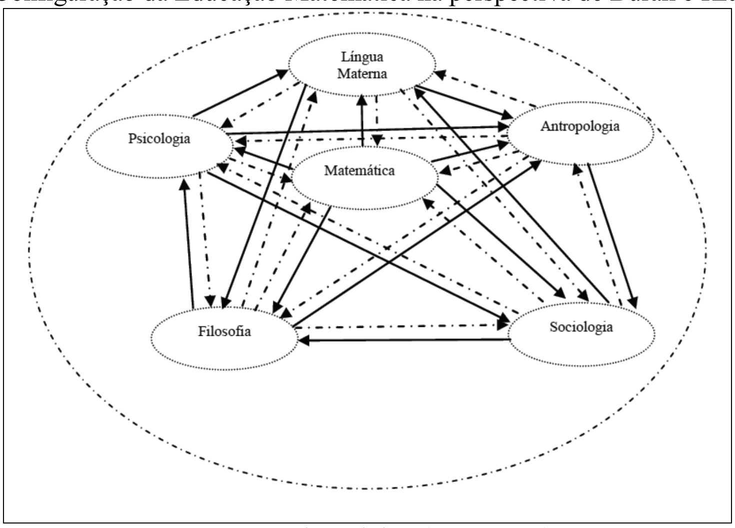
Figura 1. Tetraedro de Higginson



Fonte: Burak e Klüber (2008, p. 95).

Manifesto pelo próprio Higginson (*apud* Rius (1989) esse modelo foi proposto para uma época e o tempo o tornou obsoleto com a inserção de novas áreas que agregam a Educação Matemática (BURAK e KLÜBER, 2008). Assim Burak e Klüber (2008) propõem uma nova configuração (Figura 2) em que "[...] a Matemática parece interagir com as diferentes áreas do conhecimento, possibilitando um entendimento de que ela é a 'adjetivação', ficando a 'substantivação' para a Educação." (p.98).

Figura 2. Configuração da Educação Matemática na perspectiva de Burak e Klüber (2008)



Fonte: Burak e Klüber (2008, p.98).

Burak e Klüber (2008) argumentam que esta nova configuração expressa a relação da Matemática com demais áreas da Educação e supera um ideal geométrico "[...] podendo, inclusive, ser epistemologicamente orientado pelas Ciências Humanas e Sociais, evidentemente, sem desconsiderar o objeto de estudo, a Matemática" (p. 98). Dessa forma, os autores destacam que:

> [...] a nova representação da Educação Matemática reflete uma visão da Matemática como um de seus componentes e não 'o componente'. A percepção da Matemática como parte do todo, e não como o todo em si, promove novos enfoques e gera a possibilidade de se estabelecer interações. Confere, sobretudo, a possibilidade de se tratar a Matemática e o seu ensino e a aprendizagem em um contexto em que se favorecem as múltiplas interações entre as áreas que a constituem, as quais, por sua vez, agem e interagem em uma relação de reciprocidade (BURAK e KLÜBER, 2008, p. 97).

Burak e Aragão (2012) apontam que sob o ângulo da Educação Matemática, cabe aos educadores matemáticos "[...] propor aos estudantes situações que os desafiem para usar de imaginação e criatividade, bem como para desenvolverem capacidades de expressar e registrar ideias e procedimentos, além de conjecturar, especular, levantar hipóteses e (com) prová-las." (p.80).

Burak (2010) destaca como premissa "[...] o porquê de se ensinar Matemática, e mais, o porquê de se ensinar mediado pela Modelagem." (p.17). Aponta que a forma e o objetivo de se ensinar desse modo estão diretamente relacionados com o tipo de ser que se pretende formar, para fazer frente aos desafios do presente século. Um sujeito que seja autônomo, crítico, capaz de trabalhar em grupo, de tomar decisões diante dos desafios da vida, tanto familiar quanto profissional, como cidadão consciente de suas escolhas e das consequências delas.

Na orientação de Modelagem, defendida por Burak, o processo de ensino e aprendizagem é alicerçado "[...] nas teorias da cognição, constituídas principalmente por uma visão construtivista, sociointeracionista e de aprendizagem significativa, que consideram o estudante como um agente da construção do próprio conhecimento." (BURAK, 2010, p.18).

Para Burak (1998, 2004, 2010) Klüber e Burak (2008) Burak e Aragão (2012) a modelagem para fins de encaminhamento didático ocorre a partir de cinco etapas: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; e análise crítica das soluções.

> Escolha do tema – é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem um tema. Esse tema pode ser dos mais variados, uma vez que não necessita ter nenhuma ligação imediata com a matemática ou com conteúdos matemáticos, e sim com o que os alunos querem pesquisar. Já nessa fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada (KLÜBER e BURAK, 2008, p.21).

Conforme continua Burak (1998, p.33):

> Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminha-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos, os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar. A pesquisa pode ser bibliográfica ou contemplar um trabalho de campo, fonte rica de informações e estímulo para a execução da proposta. Esta etapa é muito rica, pois cada grupo, conforme o tema, se insere no contexto. A coleta de dados, as questões levantadas previamente pelo grupo e a adição de novas situações levam a um comportamento mais atento, mais sensível, mais crítico, que são atributos desejáveis em um pesquisador.
> Levantamento dos problemas – de posse dos materiais e da pesquisa desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturarem sobre tudo que pode ter relação com a matemática, elaborando problemas simples ou complexos que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou aprender conteúdos matemáticos, isso com a ajuda do professor, que não se isenta do processo, mas se torna o 'mediador' das atividades.
> Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – nessa etapa, busca-se responder aos problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático, que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente.
> Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É a etapa em que se reflete acerca dos resultados obtidos no processo e como esses podem ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo, dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam (KLÜBER e BURAK, 2008, p.21-22).

A Modelagem proposta por Burak é uma alternativa para desenvolver atividades na Educação Básica que não se limita a um programa rígido de conteúdos de ensino, pois entende que, no cotidiano, os conteúdos matemáticos inerentes aos problemas que os indivíduos têm que resolver não seguem os modelos encontrados nos livros didáticos e, sim exigem clareza e entendimento de onde e como pesquisar o que necessitam.

Por meio da Modelagem o estudante vê sentido e significado nos conteúdos estudados, com satisfação pessoal em suprir necessidades de seu interesse, formando atitudes positivas em relação à Matemática (BURAK e MARTINS, 2015). A Modelagem Matemática experimenta crescimento significativo em relação à postura, à consciência crítica, e à formação de conceitos matemáticos para os indivíduos envolvidos, quando comparada à aula de forma tradicional que se embasa na memorização e na repetição, sem que o aluno entenda para que serve ou por que estuda questões como teoria, exemplos resolvidos e extensas listas de exercícios a resolver. Essa posição contrária à forma tradicional de se ensinar matemática pode ser encontrada em trabalhos como os descritos no Capítulo 4, que trata das atividades desenvolvidas nesta dissertação. Como exemplo, o tema Impostos sobre o qual um grupo de estudantes ficou inquieto ao ler uma reportagem na *Revista Super Interessante*, Edição 317 de abril de 2013, intitulada “Por que tudo no Brasil custa tão caro”, reportagem que faz um comparativo entre o preço de alguns produtos no Brasil, nos EUA e na China.

A partir das diferentes maneiras quanto à abordagem das atividades de modelagem matemática, é possível afirmar que a decisão por desenvolver atividades de modelagem nas aulas de matemática é exclusiva do professor. O resultado trazido por tais atividades para a aprendizagem depende da forma como o professor conduz o trabalho, da sua disposição para enfrentar os obstáculos que surgem e da sua coragem para o desafio de romper com a forma de ensino de Matemática realizada de maneira tradicional.

A Modelagem ainda encontra algumas barreiras em sua adoção como metodologia de ensino na Educação Básica com base em argumentos de que os estudantes devem ter alguns pré-requisitos para a continuidade dos estudos em anos seguintes, o que faz as experiências significativas serem deixadas de lado, no contexto da sala de aula. Este lado seguidor pouco contribui na formação de um cidadão do século XXI, além de lhe tirar a possibilidade de desenvolver com autonomia, liberdade e competência, tudo em nome de um currículo (BURAK, 2010).

O mesmo autor desde o tempo de sua atuação como professor da Educação Básica, mais precisamente no ano de 1981, já desafiava esta visão de trabalho pautado em um currículo rígido a ser seguido.

Burak (2010) aponta como uma das possíveis saídas para a educação de modo geral e, particularmente, para o ensino de Matemática a tomada de outra direção no tratamento das questões do ensino e da aprendizagem, “[...] aquela sustentada pelo paradigma do conhecimento complexo, como a ideia do global e da necessidade de recompor o todo se desejarmos conhecer as partes”. (p.20)

Com esse propósito o autor apoiando-se em Morin (2006) destaca a virtude cognitiva do princípio de Pascal[8], segundo o qual a educação do futuro deverá se inspirar:

> Sendo todas as coisas causadas e causadoras, ajudadas ou ajudantes, mediatas e imediatas, e sustentando-se todas por um elo natural e insensível que une as mais distantes e as mais diferentes, considero ser impossível conhecer as partes sem conhecer o todo, tampouco conhecer o todo sem conhecer as partes (MORIN, 2006, p.37 *apud* BURAK, 2010, p.20).

Diante disso a Modelagem Matemática na Educação Matemática pode contribuir para

[8]PASCAL, Pensées (texto estabelecido por Leon Brunschwicg). Ed. Garnier-Flammarion, Paris, 1976.

que se deixe a condição de seguidores para ser buscador, tanto para os professores quanto para os estudantes, especificamente os da Educação Básica que, cada vez são mais dependentes dos professores, não por sua vontade, mas pela maneira que o sistema os molda. Há que ter a coragem de rever as concepções que fundamentam teorias e práticas, de modo a possibilitar uma educação mais consciente e um ensino que promova um aprendizado mais significativo e útil ao exercício da cidadania dos estudantes.

As diferentes formas de conceber o ensino e aprendizagem pelas diferentes concepções de Modelagem Matemática, tratadas neste trabalho, são sintetizadas no quadro a seguir.

Quadro 1. Concepções de Modelagem Matemática e encaminhamento de atividades em cada concepção.

Autores	Concepção	Encaminhamento de atividades com modelagem matemática
Barbosa	"Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade." (BARBOSA, 2001, p. 6).	Não sugere etapas, mas destaca que as atividades podem ser deselvolvidas seguindo três casos a partir de um convite ao aluno. Caso 1: O professor propõe o problema, traz todas as informações necessárias para resolução, ficando para o aluno a responsabilidade de construir o modelo e encontrar a solução do problema. Caso 2: O professor traz o problema que geralmente é de áreas distintas, ou seja, diferentes áreas do conhecimento que não pertencem à Matemática, cabendo aos alunos a busca pelos dados para resolver o problema. Caso 3: Este é um pouco diferente, pois, aqui o tema pode ser escolhido pelo professor ou pelos alunos. Os alunos têm um pouco mais de participação, pois, trazem o problema e integram-se em todas as etapas para resolver o problema, isto é,

		buscam informações que possibilitem a criação do modelo bem como a validação deste.
Bassanezi	"Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual." (BASSANEZI, 2004, p.24)	Segue os passos: Experimentação; Abstração; Resolução; Validação; Modificação e Aplicação.
Biembengut	Modelagem é o "processo que envolve a obtenção de um modelo." (BIEMBENGUT, 1999, p. 20)	Segue três etapas: Interação - etapa na qual se reconhece a situação-problema e se familiariza com o assunto a ser modelado; matematização: etapa esta em que se formula e resolve o problema em termos do modelo; modelo Matemático: etapa final na qual se interpreta a solução e se valida o modelo. Para implementar a Modelagem Matemática na prática do ensino da matemática Biembengut e Hein (2003) sugerem cinco passos: diagnóstico sobre os alunos, escolha do tema, desenvolvimento do conteúdo programático, orientações de modelagem e avaliação do processo.
Caldeira	A Modelagem Matemática constitui-se em um sistema de aprendizagem (CALDEIRA, 2005). Para o autor, a Modelagem não é apenas um "[...] método de ensino e aprendizagem, mas uma concepção de educação matemática possível de incorporá-la nas práticas de professores e professoras." (CALDEIRA, 2009, p.1).	Não sugere etapas – como a modelagem é considerada um sistema, ela pode assumir diferentes encaminhamentos de acordo com as necessidades para o desenvolvimento do trabalho. A posição do autor também parece desenvolver-se em uma perspectiva antropológica. (KLÜBER e BURAK 2008, p.31)
Almeida	"a Modelagem Matemática constitui-se em uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da	O desenvolvimento de uma atividade de Modelagem constitui-se em um conjunto de

	Matemática, de um problema não essencialmente matemático, que mostra aplicações da Matemática em diferentes áreas do conhecimento." (ALMEIDA e BRITO, 2005).	ações, tais como coletar informações, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, simplificar, obter uma representação matemática (modelo matemático), resolver o problema por meio de procedimentos adequados e analisar a solução, o que implica numa validação e oportuniza afirmar a sua aceitabilidade, ou não.
Burak	A Modelagem Matemática "[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões." (BURAK, 1992, p.62).	A modelagem para fins de encaminhamento didático parte de dois princípios básicos: 1) o interesse do grupo ou dos grupos participantes e 2) a obtenção de informações e dados, sempre que possível, devem ser coletados no ambiente foco do interesse do grupo. Na seguência segue cinco etapas norteadoras: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; e análise crítica das soluções.

Fonte: O autor – 2016

O próximo capítulo faz uma revisão da literatura, embasada em teses e dissertações, incluindo pesquisas que envolvem a Modelagem no âmbito do Ensino Fundamental da Educação Básica.

CAPÍTULOII

REVISÃO DA LITERATURA

2.1A Modelagem Matemática na Educação Básica

A Modelagem Matemática se constitui, nas últimas décadas, uma promissora alternativa para o ensino de Matemática, notadamente no âmbito da Educação Básica. Dessa forma analisa-se alguns autores que abordam e desenvolvem trabalhos com a Modelagem Matemática nesse nível de ensino.

O pioneiro trabalho que embasa a Modelagem Matemática na Educação Básica, como uma alternativa para o ensino e aprendizagem de Matemática, é apresentado por Burak, na dissertação de mestrado (1987) e aprofundada no doutorado (1992).

Após a fase da tese, a partir dos estudos envolvendo a Educação Matemática, Burak constrói sua concepção de Modelagem Matemática. Para isso a concebe numa perspectiva de Educação Matemática que tem nas Ciências Humanas e Sociais seus pilares, considerando a educação, principalmente em nível da Educação Básica, em um sentido mais amplo que envolve, além do matemático outros contextos tais como: econômico, psicológico, social, cultural e político.

A atual forma de conceber a Modelagem, proposta por Burak, parte de dois princípios: do interesse do grupo de participantes e das informações e dos dados necessários que são coletados no ambiente em que se localiza o interesse do grupo.

A partir de 1998, há mudança em relação à quarta etapa concebida por Burak (1992). O autor descreve essa etapa como a resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema. Essa alteração compreendida pelo autor é necessária para o desenvolvimento no ensino, na Educação Básica, haja vista que cobre maior parte dos conteúdos de certa unidade, por exemplo, se o trabalho está solicitando apenas a função linear, favorece o desenvolvimento de outras funções tais como: afim, constante, identidade, entre outras. A preocupação do autor centra-se na construção do processo de ensino e aprendizagem e na aquisição do conhecimento, desde a escolha do tema, passando pela pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e análise crítica das soluções, pelo aprendiz e pelo professor, como mediador do conhecimento.

Burak (1992, p.55), referindo-se à Modelagem Matemática, ressalta:

> Essa forma de pensar o ensino de Matemática carrega consigo a concepção de uma matemática não restrita ao seu próprio contexto mas capaz de relacionar o que é aprendido dentro e fora da escola: uma Matemática construída na interação do homem com o mundo, uma Matemática com história.

Nessa concepção não existe a sequência rígida dos conteúdos conforme a ementa da série. Os conteúdos são estudados e desenvolvidos de acordo com o contexto e pela necessidade dos problemas levantados nos temas escolhidos. A decisão pela escolha dos temas cabe exclusivamente aos alunos. O professor, quando ainda inexperiente pode optar em trabalhar apenas com um tema por vez, elegendo, juntamente com os alunos, o tema de maior interesse. Assim, para Burak, em Burak e Klüber (2008) na realização de atividades com Modelagem "[...] o aluno deve buscar, o professor deve mediar e o ambiente é a fonte de toda a pesquisa." (p. 22)

Como já mencionado no primeiro capítulo, desde os precursores até hoje, são vários autores que desenvolvem teorias relacionadas à Modelagem Matemática, mas os trabalhos de Burak contemplam preocupações com o ensino e a aprendizagem na Educação Básica.

Na Educação Básica, conforme Penteado[1] (2015), estudos e avaliações externas revelam a falta dos saberes matemáticos que são ensinados de forma convencional e não compreendidos pelos estudantes. Instigados pelos resultados apontados, educadores e pesquisadores de todo o Brasil encontram na Educação Matemática e suas tendências, alternativas metodológicas para superar o quadro atual. Penteado (2015) apresenta um estudo, parte integrante de sua qualificação como mestre, intitulado: *As práticas de Modelagem Matemática na Educação Básica do Estado do Paraná* em que verifica se a Modelagem Matemática é trabalhada em salas de aula, com objetivo de superar a falta de compreensão matemática dos alunos. A pesquisa investiga como a Modelagem é empregada em sala de aula, na Educação Básica no Estado do Paraná. Nas práticas apresentadas como relatos de experiências nos Encontros Paranaenses de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), os resultados da pesquisa de Penteado (2015) apontam que dos 65 relatos apresentados em cinco edições do evento apenas 28 práticas foram desenvolvidas em nível de Educação Básica. Destas, 75% ocorreram em horários regulares das aulas. Segundo a autora sobre o pequeno número de práticas de Modelagem Matemática na Educação Básica no Estado do

[1] Daniele Regina Penteado defendeu, em 2015, pelo Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, dissertação, para obtenção do título de mestre, tendo como orientador o Prof. Dr. Dionísio Burak.

Paraná, desenvolvidas durante as aulas de matemática “[...] pode-se inferir que as práticas de Modelagem Matemática também não se constituem em práticas efetivas no ensino de Matemática no âmbito considerado da Educação Básica.” (2015, p.58).

> O incentivo dado às pós-graduações no que diz respeito à pesquisa, e que têm impulsionado as práticas que envolvem Modelagem Matemática como experiências ou como propostas para o desenvolvimento de atividades futuras, não passam de sugestões para os professores da Educação Básica (PENTEADO, 2015, p. 58).

Outro ponto relevante apontado pela autora é que, entre os relatos analisados, não se percebe com clareza a opção por uma ou outra concepção de Modelagem, reflexo da formação recebida nos cursos de licenciatura, que não deixam claras as diferenciações e as potencialidades das concepções.

Kaviatkovski[2] (2012) desenvolveu uma pesquisa, como parte dos requisitos para obtenção de título de mestre, intitulada *A Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nos anos iniciais do ensino fundamental* que teve como objetivo “[...] contribuir com a inserção da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino e aprendizagem no âmbito dos anos iniciais” e “[...] apontar, após reflexões analíticas, as explicitações dos professores relacionadas às perspectivas de utilização da Modelagem Matemática nos anos iniciais”. Os dados foram coletados pela pesquisadora em dois cursos de formação em serviço, para professores dos anos iniciais. Após o curso, os integrantes avaliaram a possibilidade da adoção do trabalho com a Modelagem, nas aulas.

Em relação ao primeiro objetivo a autora destaca que “[...] mesmo a Modelagem sendo tema de estudo da Educação Matemática, há quase três décadas, ainda não se consolidou como uma metodologia de ensino e aprendizagem na Educação Básica.” (2012, p. 99). Esta relação, conforme a autora é mais acentuada em nível dos anos iniciais.

Quanto às perspectivas para a utilização da Modelagem nos anos iniciais a autora verifica que, embora a metodologia rompa com o ensino da forma tradicional, a maioria dos professores não tem segurança para aplicar em sala de aula. A linearidade dos conteúdos dispostos nos currículos, conforme aponta a autora, “[...] não permitem que o professor visualize as potencialidades da Modelagem e avance para uma metodologia mais dinâmica.” (2012, p. 101).

É muito mais cômodo ao professor seguir o livro didático, passo a passo, do que

---

[2] Marines Ávila de Chaves Kaviatkovski defendeu dissertação,pelo Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, em 2012, para obtenção do título de mestre, orientada pelo Prof. Dr. Dionísio Burak.

aventurar-se no pouco conhecido, no qual não tem nenhuma segurança do que encontrará e como abordar, com a classe, os problemas que surgem no decorrer das atividades, e que, muitas vezes, o próprio professor não faz ideia de como resolver. O professor não avalia que, ao resolver os problemas em conjunto, explorando a criatividade dos alunos, os conteúdos ficam na memória dos alunos, pois foram eles que descobriram meios para encontrar a solução almejada.

Apesar dos esforços de pesquisadores em apontar as potencialidades da Modelagem, ainda se caminha em passos lentos para alcançar o objetivo de constituir a Modelagem como atividade primordial em aulas de matemática. Magnus[3] (2012) desenvolve, na dissertação de mestrado, uma pesquisa que reforça este posicionamento intitulada: *Modelagem Matemática em sala de aula: principais obstáculos e dificuldades em sua implementação*. A autora se propõe a responder ao seguinte questionamento: quais os principais obstáculos e dificuldades relatados pelos professores de matemática ao trabalharem, ou não, com Modelagem em sala de aula? Ela envia um questionário, via *e-mail,* a 250 professores da rede pública no estado de Santa Catarina. Obteve resposta de apenas 43 questionários preenchidos, que se constituiram a base de sua pesquisa.

Como resultado a autora aponta a falta de conhecimento e o despreparo dos professores para desenvolverem atividades nesse espaço, a falta de tempo para a preparação das aulas e para o trabalho em sala de aula e, em alguns casos, a resistência dos alunos que já estão moldados em um sistema de aulas de forma tradicional seguindo livros textos e apostilas.

Mesmo com os empecilhos, a autora aponta alguns professores, 9 dos 43 analisados, que dizem não ter dificuldades em trabalhar com a Modelagem. Mas, por meio dos relatos a autora (2012, p. 96) percebe que a Modelagem "[...] parece ser uma 'ferramenta' que o professor utiliza para ensinar geometria.", o que está implícito na forma como a Modelagem é entendida por estes professores. A autora confirma o entendimento de Modelagem, quando coloca:

> A modelagem neste caso destoa de meu entendimento. [...] entendo a matemática como uma 'ferramenta' que me possibilita compreender essa sociedade. E da forma como é exemplificada por esses professores, a modelagem é que se torna a ferramenta para ensinar algum conteúdo matemático.

---

[3]Maria Carolina Machado Magnus defendeu em 2012, pelo Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, a dissertação para obtenção do título de mestre, orientada de Prof. Dr. Ademir Donizeti Caldeira.

> Nestes casos, concebo que os professores conduzem seus trabalhos através de uma estratégia inversa (ARAÚJO, BARBOSA, 2005), em que partem de um conteúdo matemático a ser ensinado e posteriormente buscam algum assunto que possibilite a abordagem do mesmo. (MAGNUS, 2012, p. 96).

Em contraponto, a autora encontra professores que têm preocupação, ao trabalhar com Modelagem, em trazer situações do interesse dos estudantes, o que amplia a motivação deles em realizar as atividades propostas. A autora pontua que esses professores destacam não ter dificuldades no trabalho com a modelagem e considera:

> Não existe 'a ilusão de que não haverá dificuldade apenas porque o tema é de interesse do aluno' (SCHELLER, 2009, p. 41). Pois, como pontua Jacobini (2004), a modelagem amplia a motivação, mas não garante que abrangerá toda uma turma. Sendo assim, Caldeira, Silveira e Magnus (2011) descrevem sobre a experiência com o trabalho de modelagem em uma classe de 8ª série/9º ano em que o tema escolhido emergiu do interesse dos alunos, porém, mesmo partindo da realidade e interesse deles, nem metade da turma participou efetivamente do trabalho. Desta forma, os autores concluem que não há uma 'receita' para uma aula atraente, que chame a atenção de todos os alunos. (MAGNUS, 2012, p.98).

Em sua análise Magnus entende que a Modelagem ganha espaço no ensino quando constata que metade dos professores pesquisados afirmam trabalhar com modelagem nas aulas. Mesmo com dificuldades e com pouco entendimento da metodologia, buscam nela um meio de superar os obstáculos encontrados no ensino de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos.

A dissertação de Feyh[4] (2013) intitulada *Modelagem Matemática na Educação do Campo,* aborda atividades de Modelagem desenvolvidas na Educação do Campo, e visa responder à questão: como a Modelagem Matemática pode contribuir na construção do conhecimento relacionando à matemática acadêmica com a cultura local dos alunos do campo?

No trabalho a autora traz um apanhado geral sobre Modelagem Matemática e sobre a Educação do Campo. O trabalho foi desenvolvido na Educação Básica em turmas do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio. A concepção de Modelagem adotada foi a de Biembengut (2013). Os temas e as questões foram apresentados pela pesquisadora.

Na primeira experiência a autora trabalha, em uma turma de 1º ano, com o tema "Abordagem sobre a vida das abelhas", e na segunda, desenvolvida com alunos do 2º e do 3º

---

[4] Cleonice Ricardi Nunes Feyh, em 2013, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) da Universidade Regional de Blumenau, defende sua dissertação com a orientação da Profª. Drª. Maria Salett Biembengut.

ano com o tema “Proposta sobre cubagem da madeira: quantos metros cúbicos possui uma tora?”A proposta da autora com esse trabalho é apontar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino para a Educação do Campo, relacionando o ensino com as culturas locais.

Em conclusão, a autora (2013) destaca que as observações realizadas mostram os alunos motivados para aprender a partir da realidade, o que é inerente ao trabalho com Modelagem. E mais, a Modelagem Matemática, na Educação do Campo, dá sentido aos processos pedagógicos e dinamiza o currículo que permite conexões entre os saberes matemáticos e a cultura local.

As experiências com Modelagem, no ensino e aprendizagem, realizadas em um colégio do campo, foram realizadas com outro olhar, no encaminhamento de uma atividade sustentada pela concepção de Modelagem de Burak.

2.2 A Modelagem Matemática no Ensino Fundamental

Parte integrante desta revisão bibliográfica, cabe descrever algumas dissertações, desenvolvidas com base em aplicações com alunos, em sala de aula, e em turmas do Ensino Fundamental. São muitas as dissertações que investigam o trabalho do professor que aplica atividades com a modelagem, mas poucas têm a pretensão de descrever trabalhos efetivados com os alunos. Em relação à Educação Básica, no Ensino Fundamental, são apresentadas algumas, disponíveis, que sustentam a literatura.

Nespolo[5] (2014) na dissertação *Uma proposta de ensino de matemática para a Educação Básica* descreve as etapas da realização de uma atividade de modelagem aplicada numa turma de sexto ano, cujo tema é festa da matemática. A proposta do tema é do professor e aceita pelos alunos, que foram instigados a passear, ir até o clube para a realização da festa. A ida foi de bicicleta. O meio de transporte escolhido oportuniza o trabalho com conteúdos ligados à circunferência, números irracionais e operações com decimais. Mesmo não previstos no currículo do sexto ano, foram trabalhados por serem significativos para os alunos, naquele momento.

O pesquisador usa, no embasamento teórico sobre Modelagem os autores: Burak,

[5] Rodrigo Fernando Nespolo, em 2014, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Pato Branco, PR, defende a dissertação, com orientação do Prof. Dr Fredy Maglorio Sobrado Suárez e co-orientação do Prof. Dr João Biesdorf.

Caldeira, Almeida, Bassanezi, e Biembengut. Não deixa claro, no texto, sua preferência por determinada concepção, embora utilize os passos descritos por Burak (1998) para o encaminhamento da atividade. Faz uma aproximação com as indicações de Almeida e Dias (2004) que recomendam que o professor não comece uma atividade de modelagem matemática de maneira abrupta porque defendem a familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática de forma gradativa, seguindo três etapas: primeiro o professor coloca o aluno em contato com a situação problema e fornece os dados e informações necessárias para a resolução; na sequência o professor sugere uma situação problema cabendo, aos alunos, a coleta dos dados e as pesquisas para a resolução e, para concluir, os alunos são os responsáveis por uma atividade de Modelagem e, ao professor compete orientá-los e acompanhá-los.

Conforme o autor (2014), a principal característica, observada nos alunos no decorrer da realização da atividade foi a motivação em aprender novos conteúdos matemáticos, despertada pela abordagem significativa e diferenciada, mediada pela Modelagem Matemática.

A dissertação de Kaczmarek[6], em 2014, registra atividades de Modelagem Matemática, aplicadas a um sexto ano e a um nono ano, para averiguar e identificar as ações e interações dos estudantes, nas atividades de Modelagem Matemática, baseadas no referencial vygotskyano. De forma resumida, os apontamentos da autora são:

> Favorecimento do diálogo reiterando a comunicação como instrumento de mediação entre o social e o individual;
> favorecimento na troca e na colaboração com o outro mais experiente;
> internalização de conceitos, através do enfrentamento de situações adversas;
> aprendizagem, possibilitando o desenvolvimento da sociedade;
> manifestações da emancipação e da autonomia com a escolha do tema, dos grupos, dos problemas e das estratégias de solução;
> construção do processo de ensino e aprendizagem a partir dos interesses das crianças, neste caso, dos estudantes (KACZMAREK, 2014, p. 97).

A autora coloca que a pesquisa reforça a importância, para os estudantes, da realização do trabalho em grupo e do interesse deles. “[...] autonomia, criticidade, criatividade, atenção, memória, raciocínio, percepção, diálogo e afetividade foram evidenciadas, portanto, internalizadas.” (2014, p.97) E ainda salienta que, por meio da Modelagem Matemática, no trabalho em grupo, com a mediação do professor, é possível verificar “[...] aquilo que a criança é capaz de fazer com assistência, hoje, ela será capaz de realizar sozinha, amanhã.”,

[6]Derli Kaczmarek defende, em 2014, pelo Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, a dissertação para obtenção do título de mestre, orientada pelo Prof. Dr. Dionísio Burak.

principal viés na ação e interação do processo de ensino e aprendizagem da teoria vigotyskiana.

Schmitt[7] na dissertação intitulada *Modelagem Matemática no Ensino Fundamental: interesse em aprender matemática,* defendida em 2010, visa identificar o interesse de estudantes em aprender matemática por meio de Modelagem Matemática. Tal preocupação é oriunda dos questionamentos: como despertar o interesse dos estudantes em aprender matemática? Em que medida a Modelagem Matemática contribui para este despertar?

Os dados experimentais foram coletados em duas turmas, uma de sexto ano e outra de sétimo ano. Para verificar o interesse e/ou desinteresse dos estudantes por meio da proposta de Modelagem, a autora elaborou um quadro, seguindo as etapas de Modelagem na concepção de Biembengut (2004): percepção e apreensão; compreensão e explicação; significação e modelação. Em cada etapa selecionou as ações de interesse e desinteresse dos estudantes, apontando que o dever consiste na realização das atividades por necessidade ou obrigação e contribui para os estudantes oscilarem entre o interesse e o desinteresse, conforme quadro 2:

Quadro 2. Identificação do interesse dos estudantes segundo Schmitt (2010)

ETAPAS DA MODELAGEM	INTERESSE	DESINTERESSE	DEVER
1ª Percepção e apreensão	Apresentação de elementos ilustrativos; envolvimento com os demais estudantes; realização de atividades ligadas à natureza.	Não percebido.	Não existe.
2ª Compreensão e explicação	Representação inicial por meio de desenhos; identificação de conhecimentos prévios; interação com a turma.	Aprendizado de novos conceitos matemáticos.	Necessidade de realização de atividades que valham nota.
3ª Significação e modelação	Construção de um modelo; aprendizagem de um novo conhecimento; resposta à questão inicial da atividade.	Resolução de questões sobre o tema; Aplicação dos conhecimentos matemáticos aprendidos.	Necessidade de realização de atividades que valham nota.

Fonte: Schmitt, 2010, p.103

A autora conclui que a atividade de Modelagem desperta o interesse dos alunos em aprender matemática, mas não garante a aprendizagem. Há que criar uma necessidade que sustente e estimule o aprendizado, que garanta a oscilação entre interesse e desinteresse.Essa necessidade é apontada como valer nota, imprescindível para os estudantes realizarem as

[7]Ana Luisa Fantini Schmitt, em 2010defendeu dissertação no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) da Universidade Regional de Blumenau, para obtenção de título de mestre, com a orientação da Profª. Drª. Maria Salett Biembengut.

atividades em todas as etapas. Por meio de pré-teste e pós-teste a autora comprova que a Modelagem Matemática contribui para a evolução do aprendizado de conceitos e cálculos matemáticos na maior parte dos estudantes.

Brito[8] (2013) desenvolve, na dissertação, trabalho titulado *Problemas de otimização Geométrica Aplicado ao estudo de praças: uma experiência de ensino com a atividade de Modelagem Matemática*, no qual descreve e analisa experiência com alunos do Ensino Fundamental, com o objetivo de responder às questões: como abordar, com alunos do Ensino Fundamental, aplicações da Geometria, utilizando problemas de otimização em atividades de Modelagem? Como desenvolver, nos alunos a argumentação e o raciocínio dedutivo em Geometria, mediante a experimentação, análise e comunicação de problemas de otimização abordados com atividades de Modelagem?

O autor embasa as atividades realizadas na concepção de Modelagem de Almeida, que defende o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem em três momentos distintos para maior familiarização do aluno, já descritos anteriormente quando tratado sobre o trabalho de Nespolo (2014). A atividade foi desenvolvida em um Centro Socioeducativo. Todas as atividades foram originadas dos objetivos do professor, fixando-se, no momento 1 e 2 do trabalho com Modelagem na concepção de Almeida.

Na escolha do tema os alunos podiam levantar qualquer assunto, com a condição que a coleta dos dados fosse realizada utilizando o *Google Earth*. Defendido pelo autor, esse *software* foi utilizado pelas ferramentas que envolve otimização de distâncias, área e perímetro, ferramentas como: régua, escala, elevação de terreno e inserção de polígonos. Para o estudo, os alunos apontaram várias localizações em Londrina e, dentre essas, a opção mais aceita foi tirar as medidas da Praça Rocha Pombo e realizar uma maquete para apresentação em um evento no final do ano. A proposta de elaborar um projeto para a reforma da praça, a execução da maquete durante as aulas, a discussão sobre o modo como as imagens foram obtidas, motivou fortemente os alunos, pois anteriormente não tinham acesso à *internet*.

Conforme o autor, para os alunos resolverem os problemas propostos foi fundamental conjecturar, testar hipóteses, fazer experimentos, ou seja, “[...] empregar seus próprios saberes para chegar ao saber sistematizado da Geometria.” E ainda destaca que “[...] a experiência dos alunos foi fundamental para perceberem que esses problemas não eram triviais, ou seja, não

[8] Dirceu dos Santos Brito, em 2013, pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, defendeu a dissertação para obtenção do título de mestre com a orientação da Prof^a^. Dr^a^. Lourdes Maria Werle de Almeida.

eram problemas de livros de matemática que mostram a pergunta logo depois a fórmula que dá a resposta." (BRITO, 2013,p.111).

Quanto à segunda questão, o autor afirma que não visava demonstrações formais ou provas rigorosas, mas estimular uma situação que promovesse a análise, a discussão e a comunicação, em que propriedades importantes da Geometria fossem justificadas. Para alcançar esse objetivo o autor pontua que o "[...] caminho é promover situações em que os alunos são chamados a argumentar, a defender uma solução ou justificar um procedimento adotado." (BRITO, 2013, p.113), que é inerente a uma atividade de Modelagem Matemática em nosso entendimento.

Schönardie[9] (2011), por meio de uma atividade de Modelagem Matemática para o ensino de função afim, com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, planejou validar a pertinência em trabalhar o conteúdo com alunos nessa faixa etária, visto que esse conteúdo, seguindo programas de ensino, é abordado a partir do nono ano. O referencial teórico utilizado pela autora foi Barbosa (2001), Biembengut (2000) e Skovsmose (2000). O tema foi proposto pela pesquisadora, seguindo a concepção de Barbosa que divide a Modelagem em três casos. Trabalhar no segundo caso, em que é apresentado aos alunos um problema, cabendo a eles a responsabilidade pela coleta dos dados, para a resolução. Entretanto, segundo a pesquisadora ocorreu alteração, pois os alunos não coletaram os dados para a resolução do problema proposto, o que aponta que nem sempre o estudante se envolve com o tema a que foi convidado a participar. Muitas vezes, o que é de interesse do professor não chama a atenção dos estudantes, continuando a aula a ser desestimulante e tradicional, na qual tudo é apresentado pelo professor, competindo aos educandos o exercício da repetição e da memorização.

Mesmo a pesquisadora trazendo todos os dados necessários para o trabalho dos alunos, compreendendo-se na primeira etapa para a realização da atividade de Modelagem na concepção de Barbosa, conforme a autora, os resultados apresentados ao final das atividades propostas, mediadas pela Modelagem, foram positivos. Os resultados indicam a validade e a adequação dos conteúdos de função linear para a faixa etária em questão, de acordo com a abordagem empregada.

[9]Belissa Schönardie, em 2011, no programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, defendeu dissertação para obtenção do título de mestre com a orientação da Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant' Ana.

Com essa revisão comprova-se que a Modelagem Matemática está presente em atividades desenvolvidas em nível de Educação Básica mesmo que, ainda, de forma ocasional, o que se explica pela comodidade do professor quando trabalha seguindo livro texto ou apostilas.

Os resultados colhidos no ensino de matemática, quando tem como norte a forma tradicional, são apontados por avaliações externas, como não satisfatórios. Cabe ao professor utilizar novas metodologias que oportunizem a evolução no ensino, com vistas à aprendizagem. Entre as novas metodologias, encontra-se a Modelagem Matemática, estudada por vários pesquisadores, com concepções diferenciadas, mas todas convergindo para um mesmo fim, o aprendizado mais significativo e o entendimento para a resolução de problemas oriundos de temas da vivência do estudante.

Ao professor cabe entender essas concepções e encontrar, na que mais lhe convier, a forma diferenciada de trabalhar a Matemática. Nas dissertações analisadas, os autores optaram por variadas concepções para o trabalho com Modelagem Matemática.

Como decorrência da revisão bibliográfica, assume-se a concepção de Burak (1992, 1998, 2004) na realização das atividades de modelagem matemática a partir do interesse dos estudantes, cabendo a esses a escolha do tema, porque a experiência mostra que, quando o tema parte do interesse dos estudantes, eles se tornam ativos no processo e sentem-se mais motivados em realizar as etapas da modelagem.

Essa revisão bibliográfica comprova que muito é falado sobre Modelagem, mas são poucas as experiências, em nível de Educação Básica, encontradas em teses e dissertações, o que leva a elaborar a questão da presente dissertação: o que se mostra em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática, a partir das atividades realizadas com Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica? Como Objetivo Geral propõe-se: apontar e discutir as implicações pedagógicas e científicas que decorrem da adoção da Modelagem Matemática na Educação Matemática, em relação ao ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental da Educação Básica. E como objetivos específicos elege-se: desenvolver temas, com base no interesse dos estudantes, utilizando a Modelagem Matemática; examinar e interpretar, os dados coletados das produções e entrevistas com os estudantes, sobre aspectos pedagógicos decorrentes da utilização da Modelagem Matemática.

Outro objetivo específico surge, ao compreender o que apresenta Magnus (2012) quando se refere ao despreparo do professor para atuar na Educação Básica com a Modelagem Matemática e a falta de clareza sobre a concepção de Modelagem a adotar e seguir. Nessa investigação um objetivo se impõe: produzir subsídios aos professores da Educação Básica, sob a forma de um Produto Educacional que contempla um referencial teórico sobre a Modelagem Matemática e que fundamenta as ações pedagógicas. Um vídeo, a partir das atividades desenvolvidas, contendo episódios sobre o desenvolvimento das principais atividades realizadas com os estudantes, e um passo a passo de como trabalhar com os conteúdos matemáticos mediados pela Modelagem Matemática.

No capítulo seguinte apresenta-se a metodologia e a justificativa da adoção da concepção de Modelagem defendida por Burak (1987, 1992, 1998, 2004), que embasa a prática no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

CAPÍTULO III

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

3.1Considerações, problema e objetivos da investigação

Quando se desenvolve uma investigação responde-se a uma questão norteadora, para obter respostas à indagação que a ensejou, com vistas a alcançar os objetivos propostos.

Nesta investigação a questão examinada é: o que se mostra, em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, a partir das atividades realizadas com Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica? O objetivo geral, a ser alcançado ao final da investigação, consiste em apontar as implicações pedagógicas e científicas que decorrem da adoção da Modelagem Matemática na Educação Matemática, em relação ao ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental da Educação Básica. E como objetivos mais específicos: examinar e interpretar os dados coletados das produções e entrevistas com os estudantes, sobre aspectos pedagógicos decorrentes da utilização da Modelagem Matemática; desenvolver um Produto Educacional para os professores da Educação Básica, e a elaboração de um vídeo, a partir das atividades desenvolvidas.

3.2Natureza e delineamento da investigação

Diante da questão e dos objetivos propostos realiza-se uma investigação qualitativa com um posicionamento metodológico de natureza qualitativa. A investigação qualitativa segundo Bogdan e Biklen (1994), tem um caráter flexível e agrupa variadas estratégias de investigação com as mesmas peculiaridades.

> Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.16).

Na investigação qualitativa o ambiente natural é fonte direta para a coleta dos dados, que podem ser recolhidos das mais variadas formas, tais como palavras, imagens, produções escritas, vídeos e áudios, com o objetivo de analisá-las em toda sua riqueza, respeitando a forma como foram registrados. (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

Os participantes da pesquisa respondem aos questionamentos, em consonância com suas perspectivas pessoais, sem necessidade de se moldar à questões previamente elaboradas, como apontam Bogdan e Biklen (1994, p. 17),

> Na investigação qualitativa não se recorre ao uso de questionários. Ainda que se possa, ocasionalmente, recorrer a grelhas de entrevista pouco estruturadas, é mais típico que a pessoa do próprio investigador seja o único instrumento, tentando levar os sujeitos a expressar livremente as suas opiniões sobre determinados assuntos. Dado o detalhe pretendido, a maioria dos estudos são conduzidos com pequenas amostras.

Quanto às entrevistas, os mesmos autores (p.134), destacam que podem ser realizadas de duas formas: com estratégia dominante para recolher dados ou "[...] utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas.", para coletar dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, que permitem ao investigador entender e descrever como os sujeitos interpretam aspectos do mundo.

Para Bogdan e Biklen (1994, p.51) os investigadores qualitativos estabelecem estratégias para tomar como experiências as considerações do ponto de vista do informador, em que "[...] o processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra." Ainda segundo os autores "[...] na investigação qualitativa a relação é continuada; desenvolve-se ao longo do tempo. Conduzir investigação qualitativa assemelha-se mais ao estabelecimento de uma amizade do que de um contrato." (p.76).

Dentre outros autores, incorporam-se as orientações de André (2005, p.13) que designa o método de pesquisa como qualitativa pelo tipo da coleta de dados. A autora sugere "[...] o emprego de termos mais precisos quando se quiser identificar diferentes modalidades de pesquisa". A autora alerta, ainda "[...] para o risco de se continuar empregando o termo 'pesquisa qualitativa' de forma genérica e extensiva, pois se pode cair no extremo de chamar de qualitativo qualquer tipo de estudo, desde que não envolva números [...]" (ANDRÉ, 2005, p.15).

Em relação ao contexto dessa investigação escolhe-se um trabalho de estudo etnográfico referindo-se ao campo de investigação, mais precisamente de estudo etnográfico em educação, mesmo levando em consideração as críticas existentes a essa abordagem metodológica, quando trabalhada na educação.

A etnografia no campo da educação, conforme Oliveira (2013) sugere inúmeras possibilidades.

> [...] nos aproxima do cotidiano escolar, leva-nos a um encontro profundo com sua dinâmica e com os sujeitos que a compõem; contudo, ela também nos exige uma ampliação de nosso escopo teórico, que deve ser articulado com a pluralidade de dados que emergirão do campo, com aquele momento em que o pesquisador sentirá o 'Anthropological Blues', no dizer de Damatta (1978), dando sentido à famosa frase de Geertz que diz que a antropologia é tudo aquilo que os antropólogos fazem, o que inclui aí, inegavelmente, os educadores (p.279).

Sob o ponto de vista de André (2005) etnografia é:

> [...] um esquema de pesquisa desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e a sociedade. Etimologicamente etnografia significa 'descrição cultural'. Para os antropólogos, o termo tem dois sentidos: (1) um conjunto de técnicas que eles usam para coletar dados sobre os valores, os hábitos, as crenças, as práticas e os comportamentos de um grupo social; e (2) um relato escrito resultante do emprego dessas técnicas. (ANDRÉ, 2005, p.24).

Para André (2005, p.24) um trabalho pode ser caracterizado como do tipo etnográfico em educação quando "[...] faz uso das técnicas que tradicionalmente são associadas à etnografia, ou seja, a observação participante, a entrevista intensiva e a análise de documentos."

Essas fases são explicadas pela autora: a observação é participante pelo pesquisador interagir com a situação em estudo, afetando-a e sendo por ela afetado. Essa característica se faz presente no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática enquanto uma metodologia de ensino, pois nela, as ações de mediação exercidas pelo professor/pesquisador o insere de forma intensa em todas as etapas previstas para o desenvolvimento das atividades de Modelagem. As entrevistas visam um aprofundamento das questões para melhor compreensão dos problemas observados. Os documentos, as produções, as manifestações, por vezes, os gestos entre outras formas parecem ser válidos, usados para contextualizar o fenômeno, explicitar suas vinculações mais profundas e para corroborar com os dados coletados por meio de outras fontes (ANDRÉ, 2005).

André (2005) destaca, ainda, que na pesquisa etnográfica em educação são usuais dados descritivos, oriundos de situações, pessoas, ambientes, depoimentos, diálogos, reconstruídos pelo pesquisador em forma de palavras ou transcrições literais. Estes elementos justificam a opção por esse delineamento. O tempo em que o pesquisador mantém contato direto com a situação que pretende estudar pode variar desde algumas semanas até anos de pesquisa e análises.

Para Oliveira (2013) a prática etnográfica

> [...] não pode ser compreendida como simples 'técnica' de coleta de dados, já que a tal coleta não existe; os dados são construídos no processo interativo com os

> sujeitos, com os lugares, com as experiências vividas por parte do 'nativo' e do pesquisador (p.279).

Com essa afirmação, entende-se a importância da produção de entrevistas, de coletar as produções dos estudantes, de dar atenção às manifestações espontâneas dos estudantes, no decorrer das atividades nas interações nos grupos e entre os grupos, e descrevê-las no diário de campo.

A pesquisa etnográfica intenta, conforme André (2005):

> [...] a formulação de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e não sua testagem. Para isso faz uso de um plano de trabalho aberto e flexível, em que os focos da investigação vão sendo constantemente revistos, as técnicas de coleta, reavaliadas, os instrumentos, reformulados e os fundamentos teóricos, repensados. O que esse tipo de pesquisa visa é a descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade (p.25).

Oliveira (2013, p.278) caracteriza a etnografia na escola em estar lá, estar aqui, apoiando-se em Geertz (1989 e 2004) que destaca que estar lá, significa conviver com os nativos, dialogar com eles, acompanhar seu cotidiano. Para contextualizar, neste trabalho, os nativos são os alunos, no convívio escolar. Quanto ao estar aqui o autor destaca que "[...] implica transformar nossa experiência com o outro em algo acessível, escrever e apreender a dinâmica do fluxo cultural que vivenciamos no decorrer de nossas pesquisas".

> O resultado de todo esse processo investigativo é apresentado em formato de relatório final, podendo materializar-se também em forma de dramatizações, colagens, slides, desenhos, fotografias, dentre outras. Sua linguagem escrita aparece de maneira informal, num estilo de narração, transmitindo claramente o caso estudado (OLIVEIRA, 2008, p.6).

Ainda considerando que toda investigação qualitativa é também interpretativa ou interpretacionista, como denomina Oliveira (2008, p.2) "[...] levando em conta que o ser humano não é passivo, mas sim que interpreta o mundo em que vive continuamente", pois considera:

> [...] que o homem é diferente dos objetos, por isso o seu estudo necessita de uma metodologia que considere essas diferenças. Nesse posicionamento teórico, a vida humana é vista como uma atividade interativa e interpretativa, realizada pelo contato das pessoas. Os procedimentos metodológicos, então, são do tipo etnográfico como, por exemplo: observação participante, entrevista, história de vida, dentre outros (OLIVEIRA, 2008, p.3).

Com adaptações necessárias procura-se, nesta investigação em particular, conhecer como se efetiva o trabalho com a Modelagem Matemática do ponto de vista do currículo escolar, das ações e interações na participação dos estudantes, da aprendizagem de conteúdos de natureza matemática e de outras, sob o ponto de vista do campo da Modelagem como metodologia de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental entre outros passíveis de observação. Justifica-se, pois o delineamento escolhido.

3.3 Local do desenvolvimento

O desenvolvimento das atividades com Modelagem Matemática ocorreu em duas turmas do nono ano, no período regular, em um Colégio Estadual do Campo no interior do município de Cantagalo, estado do Paraná.

3.4 Participantes

Tendo em vista que a pesquisa etnográfica, voltada às questões educacionais, reflete, entre outros pontos, sobre os processos de ensino e aprendizagem, situando-os num contexto sociocultural mais amplo, não reduz a pesquisa somente ao ambiente escolar, mas também promove uma relação entre o que se aprende na escola e o que se passa fora dela. (OLIVEIRA, 2008). Traça-se as características dos indivíduos envolvidos, quanto à idade, sexo, atividades realizadas em contraturno escolar, se trabalham e quantas horas. Também destaca-se o círculo familiar em que vivem, rendimento médio familiar, as pretensões futuras sobre profissão, suas diversões e passatempos.

Os estudantes, meninos e meninas com idade em torno de 14 e 15 anos (apêndice 1), auxiliam a família no contraturno, em atividades da agricultura e da pecuária. Estes elementos formam o contexto que circunda os participantes da investigação. Franco destaca a importância da contextualização: "[...] deve ser considerada como um dos principais requisitos, e mesmo 'o pano de fundo', no sentido de garantir a relevância dos resultados a serem divulgados e, de preferência, socializados" (2012, p.31). Para melhor explicação a autora aponta:

> O importante é ressaltar que qualquer que seja a forma de explicitação, fique claro o contexto a partir do qual as informações foram elaboradas, concretamente vivenciadas e transformadas em mensagens personalizadas, socialmente construídas e expressas via linguagem (oral, verbal ou simbólica) que permitam identificar o contexto específico de vivência, no bojo do qual foram construídas, inicialmente, e, com certeza, passíveis de transformações e reconstruções (FRANCO, 2012, p.51-52).

Quanto à caracterização dos participantes da pesquisa, no total de 34 alunos, 20 são meninos e 14 meninas, ou seja, 59% são do sexo masculino e 41% do sexo feminino. Destes apenas um reside com tios, os demais moram com os pais.

Ao serem indagados quanto à pretensões futuras, todos almejam terminar o Ensino Médio. Após essa etapa escolar 20 alunos (59%) têm como objetivo fazer um curso superior. Desses, 8 (oito) pretendem fazer medicina veterinária ou agronomia, cursos voltados para a realidade em que vivem; 12 (doze) alunos (35%) pretendem trabalhar, continuando o que já estão fazendo, 9 (nove) em atividades da agricultura e da pecuária, 2 (dois) em atividades da construção civil e 1 (um) mecânico de automóvel. Dentre todos, 2 (dois) estudantes, os de 18 anos de idade, não opinaram quanto as suas pretensões, mas já trabalham na agricultura.

Outro ponto analisado em relação aos participantes diz respeito ao tempo dedicado aos estudos, além da sala de aula. A maior parte dos estudantes destaca que o tempo é mínimo e para alguns até inexistente, sendo o foco o trabalho para sustento próprio e para auxiliar na receita familiar. A análise gráfica e o resultado da pesquisa que sustenta esta afirmação são visualizados nos apêndices 2 e 3.

Quanto às atividades que realizam em contraturno escolar, trabalho e estudo, constata-se que, a maior parte dos alunos, é de trabalhadores estudantes, sendo que 74% deles trabalham, tendo alguns que trabalham até cinco horas por dia. Em contrapartida, o tempo extraclasse destinado ao estudo é mínimo. 94% dos estudantes não estudam ou estudam até uma hora por dia. Isso pode ser o motivo que contempla a queixa dos professores de que os alunos não têm hábito de fazer tarefas domiciliares.

Quanto à renda média familiar esses alunos podem ser caracterizados, em maior parte, pertencentes à classe média baixa, com receita bruta mensal de até dois salários mínimos, proveniente de atividades rurais em pequenas propriedades, ou como trabalhadores assalariados de grandes agricultores e fazendeiros (apêndice 4).

3.5 Etapas e procedimentos da investigação

No trabalho em sala de aula, primeiramente foi explicado aos alunos o que é a Modelagem Matemática e como se desenvolve uma atividade dessa natureza, seguindo a concepção de Burak (1998, 2004, 2010). Em seguida foram enumeradas e descritas as cinco etapas sugeridas para o desenvolvimento da Modelagem para fins de encaminhamento didático: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s); resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; análise crítica da(s) solução(ões). Essas etapas de desenvolvimento das atividades de

Modelagem nortearam os encaminhamentos e procedimentos adotados.

Escolha do tema: etapa em que os estudantes e o professor sugerem e opinam sobre temas variados de interesse comum, sem a necessidade de ter, inicialmente, ligação direta com conteúdo matemático, mas com o que os alunos quiserem pesquisar. Esses conteúdos aparecem de forma natural no decorrer das atividades. Cabe aos estudantes a decisão final pela escolha do tema. “Já nessa fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada.” (KLÜBER e BURAK, 2008, p.21).

Pesquisa exploratória: com o tema definido, os participantes são instigados na busca de materiais e subsídios teóricos de variadas formas, desde pesquisas bibliográficas até o trabalho de campo.

Levantamento dos problemas: de posse dos dados e materiais coletados nas pesquisas, os estudantes são incentivados a conjecturar em relação à elaboração de problemas, desde os mais simples até os mais complexos, que acontece com a ajuda do professor que não se isenta do processo, mas torna-se mediador das atividades.

Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema, etapa na qual se busca o auxílio dos conteúdos matemáticos que passam a ter sentido e significado para os estudantes

> [...] que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente. (KLÜBER e BURAK, 2008, p.21).

Análise crítica das soluções: etapa marcada pela criticidade em relação à viabilidade e à adequação das soluções obtidas, que podem estar logicamente e matematicamente corretas, mas serem inadequadas à situação. Essa etapa possibilita discussões a respeito das decisões e ações tomadas, que contribuem “[...] para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam.” (KLÜBER e BURAK, 2008, p.22).

Essa forma de encaminhamento possibilita, a partir de temas de interesse dos estudantes, o desenvolvimento de variados conteúdos, com fundamento nos dados levantados com pesquisas e investigações realizadas pelos próprios estudantes e mediados pelo professor. As atividades com a primeira turma foram desenvolvidas em outubro, novembro e dezembro de 2015, em dois encontros semanais, perfazendo 5 (cinco) aulas por semana, num total de 35 aulas. Com a segunda turma, as atividades foram desenvolvidas durante o primeiro semestre de 2016, com um total de 58 aulas.

3.6 Da coleta de dados

Os dados empíricos foram coletados por meio de gravações, vídeos e foram constituídos pelas produções dos estudantes durante a realização das atividades, pelos depoimentos espontâneos dos estudantes, de forma individual e/ou coletiva. Outro instrumento de coleta de dados foi um Diário de Campo, elaborado pelo professor, no decorrer de cada uma das etapas da Modelagem acima descritas.

A coleta e o tratamento dos dados seguiram as normas previstas e aprovadas pelo Comitê de Ética para as Ciências Humanas, para a realização dessa investigação.

3.7 Do tratamento e análise dos dados

O tratamento e análise dos dados seguiram os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994), na perspectiva de manipulação mecânica.

> Por manipulação mecânica dos dados entendemos as maneiras de classificar o material em pilhas, pastas separadoras ou ficheiros de computador, de modo a facilitar a acesso as suas notas. Deve organizá-los de modo a ser capaz de ler e recuperar os dados à medida que se apercebe do seu potencial de informação e do que pretende escrever (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.232).

Nessa perspectiva a técnica de trabalhar mecanicamente os dados é inestimável por dar direção aos esforços do pesquisador, após o trabalho de campo, e por tornar manipulável algo potencialmente complexo. "Ter um esquema é crucial; não importa o esquema particular que escolher." (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.232).

Os dados coletados foram separados por temas de Modelagem Matemática trabalhados.

Quanto à escolha do que foi analisado, é explicitado por Bogdan e Biklen (1994) "Não importa qual a que vai analisar em primeiro lugar. Pode querer pegar numa sobre a qual julgue saber bastante ou acerca da qual tem algumas ideias." (p.235).

Assim os dados foram reunidos em três temas. Os que se referem à produção de leite, à impostos, e ao pomar na escola e organizados, para a análise, seguindo os encaminhamentos pedagógicos e metodológicos trabalhados em sala de aula, nas etapas propostas por Burak (1998, 2004, 2010) no contexto de cada tema, com atenção às ações dos estudantes que foram desenvolvidas durante a realização das atividades.

As análises dos dados seguiram a perspectiva Bogdan e Biklen (1994), com vistas a convencer os leitores da plausibilidade do exposto. Assim,

> Citar os sujeitos e apresentar pequenas secções das notas de campo e de outros dados ajuda a convencer o leitor e a aproximá-lo das pessoas que estudou. As citações não só descrevem as afirmações dos sujeitos, como também a forma como as transmitiram e a sua maneira de ser (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.252).

Outra maneira de apresentar os dados é de forma incorporada diretamente no texto, como parte integrante do descrito. Para isso, são agregados os diálogos e as descrições na narrativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

3.8 Do objeto educacional

O objeto educacional consiste na elaboração de um caderno de orientações acompanhado de um vídeo, pautado nas experiências realizadas sobre a utilização da Modelagem Matemática cujo público alvo são professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental da Educação Básica. Consta de um referencial teórico sobre a Modelagem Matemática que fundamenta as ações pedagógicas no âmbito dessa investigação e um vídeo contendo episódios sobre o desenvolvimento das principais atividades efetivadas com os estudantes de duas turmas de nono ano do Ensino Fundamental, que servem como subsídios para os professores de Matemática que atuam na Educação Básica. Ainda, nesse vídeo constam algumas orientações sobre o passo a passo de como trabalhar com os conteúdos matemáticos mediados pela Modelagem Matemática na Educação Matemática, abordados nesta investigação.

O próximo capítulo descreve as atividades realizadas, as análises e interpretações do material coletado.

CAPÍTULO IV

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Ao iniciar os trabalhos com modelagem matemática, devido à pouca experiência do professor/pesquisador com essa metodologia de ensino e aprendizagem, escolheu-se trabalhar com uma turma da manhã (9º. Ano A), por ser mais calma. Na primeira conversa com os alunos foi exposto que, na atividade de modelagem matemática, que eles podiam sugerir temas variados, conforme seus interesses diferentemente do que vinha ocorrendo, na maior parte das aulas, até aquele momento, de forma tradicional, em que somente o professor apresentava os conteúdos e os alunos resolviam os exercícios propostos, de forma análoga aos exemplos.

A possibilidade de os alunos sugerirem e opinarem a respeito do que pretendiam estudar, de início, motivou e despertou a curiosidade deles, que tiveram um momento destinado às discussões em um grande grupo para que, na sequência elegessem o tema de maior aceitação.

De início, apenas um tema foi selecionado, devido à inexperiência dos estudantes e do professor. Burak (2005) orienta o professor, ainda inexperiente com essa metodologia, ser conveniente combinar com os estudantes e trabalhar um tema por vez e, à medida que sua habilidade e conhecimento aumentam, passar a trabalhar com mais temas de forma conjunta.

A seguir descreve-se as atividades desenvolvidas segundo os temas selecionados: produção de leite, impostos e pomar na escola.

4.1 Descrição da atividade de modelagem com o tema: produção de leite.

4.1.1 Escolha do tema

Como se pretendia trabalhar apenas com um tema, devido à pequena experiência com a metodologia e tendo em vista que surgiram várias propostas, essas foram anotadas no quadro negro, e feita uma votação. Os temas sugeridos foram: futebol, maconha, agricultura, produção de leite e falta de água. Dentre esses, após as discussões e procedida a votação o tema escolhido foi produção de leite. A escolha desse tema deixou evidente que a maioria dos estudantes optou por esse tema por ser de conhecimento de todos, um assunto familiar e que, de alguma maneira, vincula-se às atividades desenvolvidas pelos familiares. Escolhido o tema, o professor orientou os estudantes a formarem grupos com três e quatro integrantes, para que dialogassem e pesquisassem sobre o assunto.

4.1.2 Pesquisa exploratória

Em grupo, os estudantes são orientados a conversar a respeito do tema e sobre o que o envolve. Dessas conversas surgem alguns apontamentos, entre eles: o preço pago por litro de leite, pois nas propriedades dos estudantes não eram os mesmos para todos, mas variavam de R$ 0,84 a R$ 0,95 o litro; a alimentação dos animais pois, para que uma vaca tenha boa produção deve estar bem alimentada; com relação à raça dos animais, pois a produção do leite é também condicionada à raça do animal; com relação à saúde dos animais, considerando a importância de serem saudáveis, de receberem vacinas e medicamentos de forma preventiva. Nesse aspecto, as principais doenças a serem prevenidas são: Mastite, Brucelose, Tuberculose, Febre Aftosa, Doença do Casco e Parasitoses.

A partir das conversas, o Grupo 1 (G1) sugere a possibilidade de fazer uma visita a uma propriedade rural. Conforme o estudante E2 a propriedade sugerida, por ele, pertence a um dos moradores mais antigos da localidade e que há muito tempo vende leite. A sugestão do G1 ganhou a aceitação de todos os demais, diante da possibilidade de sair da sala em uma visita técnica para aprender mais sobre o tema. A proposta foi então levada ao conhecimento da direção, que autorizou e se propôs solicitar o ônibus, para a prefeitura, para transportar os estudantes até a propriedade escolhida.

Sobre isso, novas indagações surgiram, dentre elas: se os estudantes e professor seriam recebidos? Se poderiam chegar, sem ter conversado antes com o proprietário? Quem se dispunha a ir pedir autorização ao proprietário? Os estudantes chegam a um consenso sobre a necessidade de autorização e que esta seria solicitada por alguém conhecido do proprietário. O estudante E2 se dispôs a ir, na parte da tarde, conversar com o proprietário. Assim, termina a aula com os estudantes motivados e com enormes expectativas para o próximo encontro.

Na parte da tarde o professor/pesquisador se encontrava em hora atividade, então considerou, por bem, acompanhar o estudante na visita. Em conversa com o proprietário, foi exposto o trabalho a ser realizado e este se prontificou em receber os grupos de estudantes para dialogar. Ficou pré-agendada a visita para a semana seguinte, mediante confirmação por telefone, condicionada à disponibilidade do transporte para levar os estudantes. Após a liberação do transporte a visita foi confirmada.

Na realização da visita, os estudantes dos grupos conversaram com o proprietário entrevistado que explicou como são constituídas algumas partes de sua propriedade (Figuras 3). A localização do galpão, estrebaria, piquetes de pastagens e a forma como o leite é tirado e armazena. Usando o sistema de ordenha o leite é tirado, armazenado até três dias em um resfriador a granel, e coletado pelo caminhão leiteiro, que transporta o leite até a cooperativa. Mostrou ainda, o tipo de ração dos animais, e também explicou que há um tempo atrás vinham sacas de 60 quilos que custavam em torno de 15 reais. Hoje são sacos de 25 quilos, e custam em torno de 20 reais. Mostrou também, alguns medicamentos e vacinas, bem como fez uma explanação sobre sua utilização.

Figura 3. Vista de algumas partes da propriedade rural visitada.

Fonte: O autor 2015.

O entrevistado esclareceu que, mesmo como é observado, tudo é de forma simples, mas, pelo sistema de ordenha instalado, verificável na parte inferior da Imagem 3, o leite não tem contato, em nenhum momento, com mão humana. "*Após a lavagem e a higienização da ulbra (sic) da vaca são colocados os tetos da ordenha, com um sistema de pressurização e encanamento, o leite vai direto para o resfriador*[1]."

Dentre os questionamentos realizados pelos estudantes ao entrevistado convém destacar:

1 No decorrer do texto, para diferenciar os dados empíricos e os diálogos entre os participantes e o professor/pesquisador utilizar-se-á de itálico.

Estudantes (Es[2]): *Como está a produção de leite nos últimos meses?*

Entrevistado: *Eu, ultimamente, como vocês mesmos podem observar, não tenho investido muito, os custos aumentaram bastante. Quando vim morar aqui na região éramos eu a mulher e três crianças, tínhamos somente duas vaquinhas, o leiteiro transportava o leite em uma rural a gás, e com o dinheiro do leite dessas duas vaquinhas nós quase passava o mês, a ração e os remédios dos animais eram mais baratos. Hoje tenho 30 cabeças de gado, estou tirando 13 vacas e quando colocamos tudo na ponta do lápis sobra muito pouco. Ai, meio que nos desmotivamos em aplicar mais na produção de leite. Meus filhos hoje são casados, um deles faz só isso e até que consegue viver do leite, mas tem que trabalhar muito [sic].*

E 3: *Quanto suas vacas produzem de leite por dia?*

Entrevistado: *Depende das pastagens, agora que a aveia está boa, variam de 14 a 20 litros por animal. Por isso que nos preparamos com silagem, quando enfraquece a pastagem temos que tratar no coxo para não diminuir muito a produção.*

Além de conversas envolvendo a produção de leite, o entrevistado motiva os estudantes a plantarem árvores, mostra a estrebaria e destaca que foi construída com madeira de pinheiros que ele mesmo plantou. Fala aos participantes que, em suas propriedades, se cada um plantasse uma fileira de árvores, nas divisas, teriam daqui a quinze ou vinte anos madeira para o consumo, sem necessidade de cortar as nativas. Ainda, esclarece, o tempo representa bastante para uma árvore crescer, mas se pensarmos assim daqui há alguns anos não teremos mais árvores nativas, pois o homem só vai tirando da natureza e não pensa que ele mesmo no futuro ficará sem.

Em seguida, convida os estudantes a visitar o seu pomar, mostra a eles alguns pés de ponkans carregados e os orienta: *Essas fruteiras foram plantadas de semente, dizem que as frutas de mercado não são boas para produzir, mas é só plantar, vejam, basta ter paciência, demora um pouco mais em torno de oito a dez anos para produzirem, mas produzem. Hoje tem as mudas de enxerto que no segundo ano já carregam, se forem compradas custa em torno de quinze reais, mas podem ser feitas facilmente.*

O entrevistado, ainda mostra aos alunos alguns enxertos que ele mesmo fez e ensina a técnica. *Para fazer um enxerto, basta ter um pé comum, esses que nascem da semente, o ideal é na grossura do dedo e um ramo de ano de uma fruteira de enxerto. Um palmo acima do*

[2]Nos diálogos, doravante, E se refere à estudante; Es, estudantes e PP, professor/pesquisador.

solo, você corta aparado, e faz uma fenda, essa é a parte que dará sustentação à nova planta, no galho que será enxertado é só fazer uma cunha que deve ser encaixada na fenda. Após encaixá-los, basta amarrar um plástico fino bem apertado, para cobrir o enxerto e não entrar água, e esperar as partes se colarem, daqui há dois anos estarão produzindo."

Finalizada a conversa, os estudantes são autorizados a tirarem algumas frutas. Todos agradeceram o atendimento e a cordialidade da acolhida e voltaram ao colégio.

Em sala, os grupos tiveram mais cinco aulas para a pesquisa exploratória realizada no laboratório de informática, na biblioteca e em material trazido de casa. Essa pesquisa foi concretizada por alguns grupos em forma de tópicos, outros a apresentaram em forma de texto que, em parte podem ser observadas nos anexos 1 e 2.

4.1.3 Levantamento dos problemas

Em sala de aula os estudantes foram motivados e orientados, a partir de seus conhecimentos e dos materiais coletados nas pesquisas, a conjecturar em relação à matemática e outros aspectos, e elaborarem problemas que são destacados a seguir.

De posse dos dados levantados, com os estudantes cuja família vende leite (Imagem 4), a partir da verificação de que os preços variavam, foi formulado, de forma conjunta, o primeiro problema.

Problema 1) Qual o preço médio pago, nas propriedades, pelo leite, na região do Cavaco?

4.1.4 Resolução e desenvolvimento do conteúdo matemático

Para resolver este problema coube ao professor esclarecer alguns conceitos estatísticos. Por exemplo, pretendendo-se saber de precisamente o preço médio, seria necessário pesquisar todos os moradores da região. Na estatística, é denominado universo da pesquisa/população, o que demandaria tempo e recursos financeiros. Mas, pode-se usar uma amostra da população, a partir dos dados coletados na sala (Imagem 1).

O professor esclarece ainda que amostras geralmente são usadas em pesquisas de opinião pública, muito comuns em tempos de eleições, quando são apontados os candidatos que estão na frente, pois, toda a população só é consultada no dia da eleição.

Compreendidos os conceitos da estatística descritiva sobre população e amostra, os estudantes construíram um quadro em sala de aula com os dados coletados, que tratavam dos estudantes da turma cuja atividade da família era a venda de leite. Constataram que o preço recebido por litro de leite, em um mesmo mês, variava entre as propriedades. Por meio do quadro (Imagem 1)[3] foi possível avaliar que não existe uma relação direta entre a quantidade de vacas e litros produzidos e entregues em um mês, explicitado pelos estudantes, mas que essa relação depende da raça do animal.

Imagem 1. Dados coletados na sala com estudantes cujas famílias entregam leite.

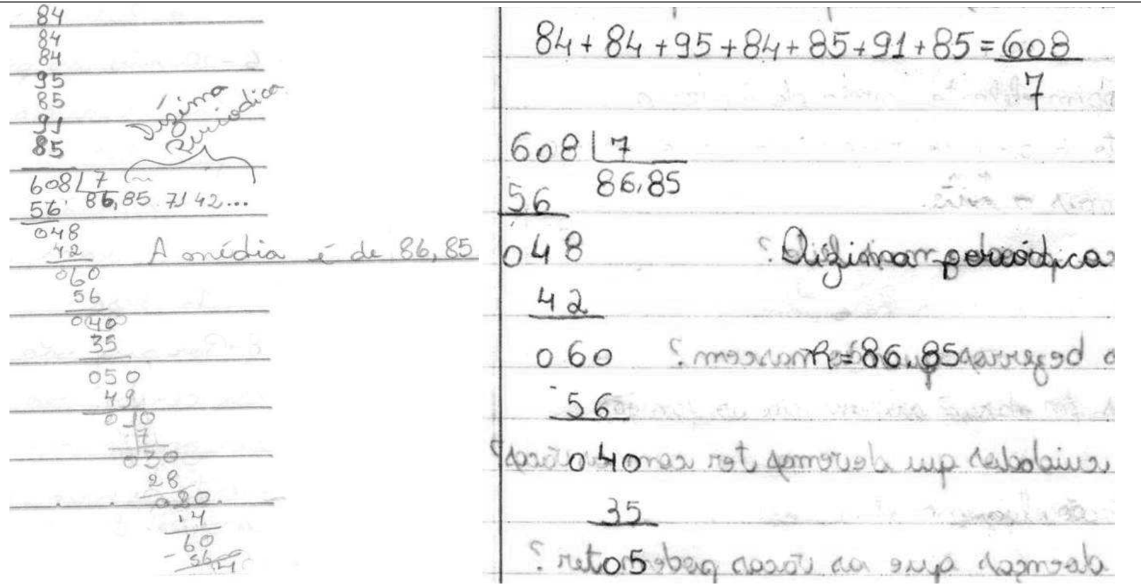
nº de vacas	litros entregues	valor / litro
13	5.000	0,84
10	3.600	0.84
14	3.900	0,95
3	450	0,84
6	600	0.85
5	900	0.91
8	240	0.85

Fonte: Estudantes – 2015

Com os dados, os grupos trabalharam para encontrar possíveis soluções para a questão do preço médio. O Grupo 1 e o Grupo 3 pensaram de forma semelhante (Imagem 2). O Grupo 2 pensou a adição, a partir de agrupamentos (Imagem 3). O significado dos resultados apresentados por cada grupo é discutido na etapa da análise crítica das soluções.

[3] Denomina-se Imagem a todas as produções (ideias, desenvolvimento de operações) realizadas pelos grupos de estudantes.

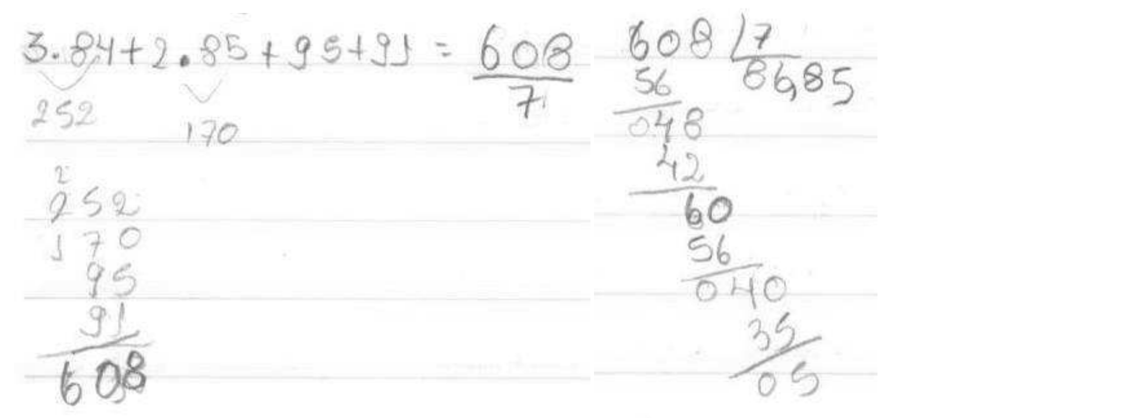
Imagem 2. Resolução dos grupos 1 e 2 (Os valores são apresentados como centavos, em busca do valor médio pago por litro de leite, considerando os dados coletados na sala de aula).



a) G1 b) G2

Fonte:Estudantes – 2015

Imagem 3. Resolução pelo Grupo 2

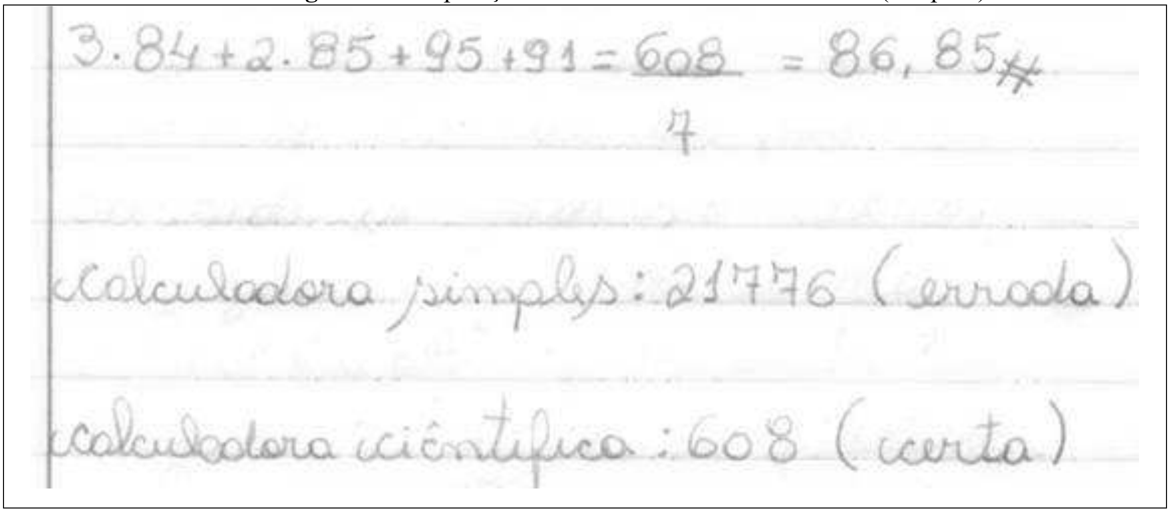


Fonte: Estudantes – 2015

Já o Grupo 4, utilizou calculadoras, uma simples e uma científica, e chegou a um impasse e, para dirimi-lo, foi solicitada a presença do professor.

E1 G4: *Professor quando resolvemos a adição 3× 84+2 × 85+95+91, os resultados das duas calculadoras não fecham. Quando comparamos com os resultados dos outros grupos a resposta correta é a da calculadora científica (Imagem 4). Será que a minha está estragada, loca (sic)?*

Imagem 4. Comparação entre resultados de calculadoras (Grupo 4)



Fonte: Estudantes – 2015

PP: R*efaçam as operações, quero ver.*

Percebendo o erro cometido pelas estudantes, o professor compartilha com a sala, o problema do Grupo 4.

PP: *Quando o Grupo 4 tenta calcular a expressão,* e escreve no quadro, *3×84+2×85+95+91, utilizando duas calculadoras diferentes, encontram dois resultados, alguém sabe o porquê dessa diferença?*

E3 G2*: Nós também estávamos utilizando uma calculadora simples e o resultado não fechava, dava muito alto, pois são sete parcelas somadas menores que 100, logo deveria dar menos que 700, e dava mais, quando fazíamos a multiplicação junto com a adição. Resolvemos fazer primeiro as multiplicações, anotar o resultado. Depois somamos tudo. Ai sim fecha [sic].*

PP*: Alguém sabe explicar essa diferença?*

O silêncio paira sobre a sala. O professor/pesquisador entende a dificuldade dos estudantes e, voltando-se para a expressão no quadro, questiona-os novamente.

PP: *Para resolver uma expressão desse tipo, a mão, o que devemos realizar primeiro?*

Es: *Primeiro a multiplicação depois a adição.*

PP: *Ai está a diferença!!! Quando vocês utilizam a calculadora simples querendo resolver a expressão da forma que ela se apresenta. A calculadora é uma máquina que só faz o que vocês solicitam, ela não pensa por vocês. Quem tem calculadora faça 3×84. Qual o resultado?*

Es: 252

PP: *Agora somem 2, e verifiquem quanto mostra o visor. Perceberam o resultado*

'254'. Esse é o valor que vocês multiplicam por 85. É isso mesmo que vocês queriam fazer?

Es: *Não, nós queríamos multiplicar o 85 por 2 e somar com o 252.*

O professor pesquisador então explica, que se os alunos não optassem por utilizar um papel para ir anotando o resultado das multiplicações para só depois agrupá-los com as adições, eles poderiam utilizar a opção de memória das calculadoras simples (M+, M- e MRC). Então os alunos testam, e afirmam que não sabiam para que serviam aquelas funções.

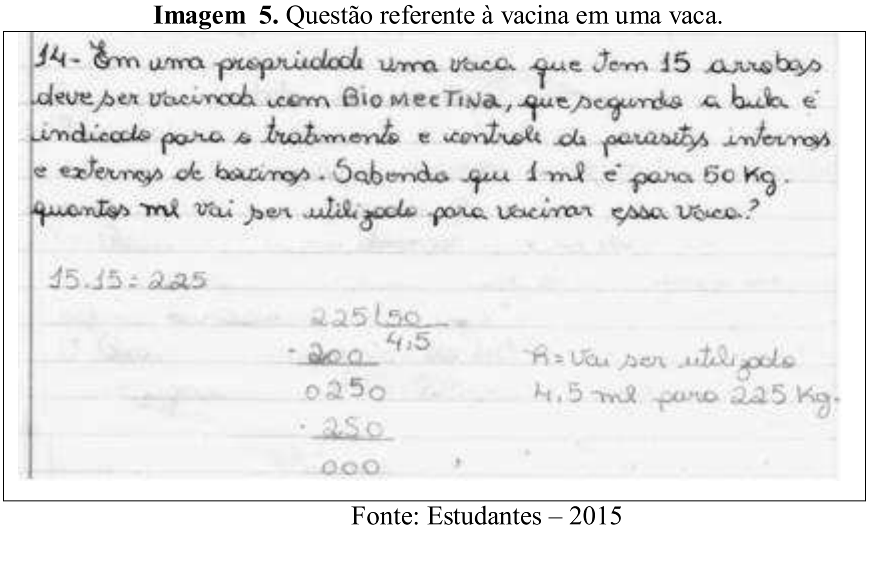
E1 G4: *Mas como na calculadora científica dá certo?, Se digitar a expressão, como aparece?*

PP: *Alguém sabe porquê isso é possível?*

Os estudantes não se manifestam. Então o professor/pesquisador explica que as calculadoras simples trabalham apenas com uma operação por vez. As científicas são programadas para trabalhar com todas as operações e resolver primeiro as potências e raízes, depois multiplicação e divisão, e na sequência adição e subtração. Existe também a necessidade, conforme a expressão, de utilizar os parênteses, por exemplo, caso se pretenda que a calculadora científica calcule primeiro uma adição antes de uma multiplicação. Se não forem usados os parênteses ela fará o que está programado, pois é uma máquina e ao homem compete saber as funções dessa máquina, pensar e não somente apertar botões.

Outra questão formulada em conjunto com a turma foi a respeito da prevenção e do controle de parasitas, a partir de uma bula de vacina trazida pela estudante E1 do Grupo 4. A Imagem 5 apresenta a questão que todos se propuseram a resolver, e a resolução do Grupo 4.

Imagem 5. Questão referente à vacina em uma vaca.


14- Em uma propriedade uma vaca que tem 15 arrobas deve ser vacinada com BIO MECTINA, que segundo a bula é indicado para o tratamento e controle de parasitas internos e externos de bovinos. Sabendo que 1 ml é para 50 Kg. quantos ml vai ser utilizado para vacinar essa vaca?

15.15 = 225

225 | 50
-200 4,5
0250
-250
000

R= Vai ser utilizado 4.5 ml para 225 Kg.

Fonte: Estudantes – 2015

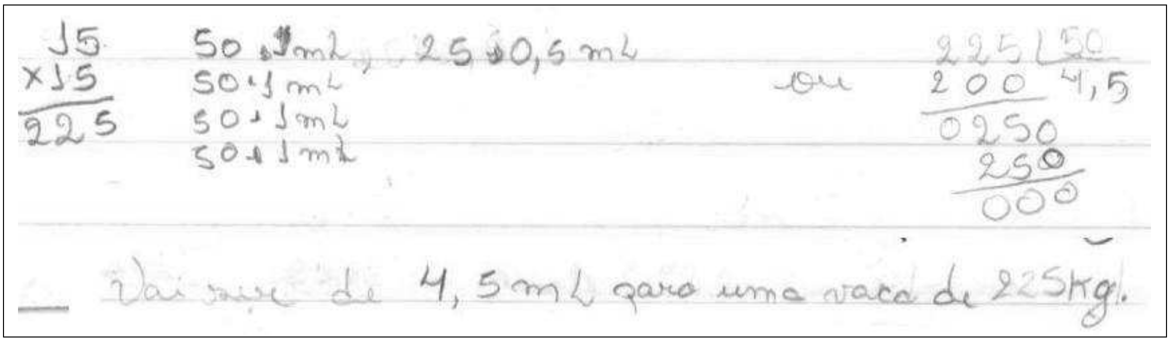
Para resolver esta questão, inicialmente discutiu-se quantos quilos tem uma arroba.

Concluindo-se que uma arroba equivale a quinze quilos. A resolução dos grupos 2 e 3 foram semelhantes a do Grupo 4 apresentadas na Imagem 5. Já o Grupo 1 após fazer a transformação de arrobas para quilos, 15 arrobas × 15 quilos = 225 quilos e, antes de fazer a divisão usual, conforme a Imagem 6, pensa de forma diferente e atribui a cada 50 Kg, 1 mL e a 25 Kg 0,5 mL. Com isso, o professor/pesquisador pergunta:

PP: *Porque vocês resolveram dessa forma?*

Es G 1: *é mais fácil pensar assim do que fazer a conta, pois se a vaca tem 225 quilos e para cada 50 quilos é 1 mL, logo, para 200 quilos vai ser 4 mL e mais meio para os 25 quilos, total de 4,5 mL. E está certo professor, pois confirmamos com a divisão*.

Imagem 6. Resolução pelo Grupo 1 (dosagem de vacina).



Fonte: Estudantes – 2015

4.1.5 Análise crítica das soluções

Após todos os grupos chegarem a uma conclusão, foram desafiados a refletir sobre a solução apresentada e compartilhar com todos os colegas. Quanto ao primeiro problema todos apresentaram 86,85. O professor questiona:

Professor: *O que esse 86,85 significa? São litros de leite? São reais?*

Os alunos retornam ao problema e aos dados utilizados, e concluem que estavam se referindo ao preço médio pago pelo leite nas propriedades, com base nos dados levantados em sala de aula.

Os estudantes pensam e concluem que trabalharam com valores inteiros, mas esses valores referiam-se a centavos, portanto em média é pago 86,85 centavos por litro de leite em cada propriedade, ou seja, R$ 0,8685.

Os estudantes trabalharam os centavos como se fossem valores inteiros. Então, foi solicitado que confirmassem os resultados alcançados utilizando a notação usual de reais.

Assim, com auxílio de calculadoras realizaram os cálculos $0,84 \times 3 + 2 \times 0,85 + 0,91 + 0,95$ e obtiveram o resultado de 6,08. Usando o valor médio, dividiram pelo total (7) obtendo em notação correta o resultado 0,868571, aproximadamente R$ 0,87.

PP: *É comum trabalhar com mais de duas casas decimais quando referido a centavos?*

Estudantes em consenso: "*não professor, sempre usamos duas casas, nunca falamos R$ 0,8685.*

Professor: *Se na propriedade de vocês entregassem dez mil litros de leite no mês, vendendo a R$ 0,8685 quanto receberiam a mais do que se vendessem a R$0,86? [sic.]*

Os estudantes fizeram as multiplicações $(0,8685 \times 10.000)$ e $(0,86 \times 10.000)$ com auxílio da calculadora, sem antes pensarem de outra forma, e respondem que receberiam 85 reais a mais, quando o valor por litro tem quatro casas decimais.

O professor/pesquisador questiona por que fazer uma conta tão simples com a calculadora se poderiam realizar até de cabeça?

A primeira resposta apresentada pelos estudantes, em forma descontraída, foi: "*claro*! *Fácil para o senhor que é professor!".* Entendendo a dificuldade, e a falta de conhecimento dos estudantes, em realizar cálculos de forma mental, o professor/pesquisador interage e desenvolve o raciocínio dos estudantes, na construção do conhecimento, sobre a multiplicação por dez e seus múltiplos (base decimal).

PP: *Quanto é* 1×10, 2×10, 3×10 *e se fosse* 1×100, 2×100, 3×100 *e* 1×1000, 2×1000, 3×1000.

Esses questionamentos foram rapidamente respondidos pelos estudantes de forma correta. O professor/pesquisador entende que poderia utilizá-los como subsunçores[4] para construir e expandir o conhecimento dos estudantes sobre multiplicações por dez e seus múltiplos. Com algumas representações numéricas no quadro, envolvendo multiplicações, questiona os estudantes.

PP: *Ao se multiplicar qualquer valor maior que 1, por 10, o resultado será maior ou menor que 10?*

Es: *maior que 10.*

PP: *e se multiplicar, agora, um valor menor que 1, por 10, o resultado será maior ou menor que 10? Por exemplo:* $0,1 \times 10$; $0,5 \times 10$; $0,8 \times 10$.

[4]Subsunçores, na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, se diz respeito à estrutura cognitiva existente que favorece novas aprendizagens.

E12: *sempre será um valor menor que 10. Pois quando multiplicamos um número qualquer por 10 o resultado será esse número com mais um zero. Se multiplicássemos por 100 aumentaria mais dois zeros, e assim sucessivamente. Mas quando estamos multiplicando um número decimal, esses que tem vírgula, por 10, a vírgula pula uma casa para a direita, se multiplicássemos por 100, a vírgula pulava duas casas. E assim por diante a vírgula sempre pula a quantidade de zeros [sic].*

O estudante E12 demonstrou que entende o algoritmo de multiplicação por 10 e seus múltiplos. O professor/pesquisador questiona a turma – *vocês concordam com o E12?* – os estudantes se expressaram afirmando que sim.

PP: *Por que fizeram a multiplicação de (0,8685×10.000) e (0,86×10.000) na calculadora, se com o raciocínio é mais rápido de que digitar os valores na calculadora?*

Estudante E1: *Ah professor!!! Tem que pensar e, vai que penso errado*.

Os demais estudantes concordam com o E1 afirmando que com a calculadora não se perdem. O professor/pesquisador questiona essa afirmação – *Será!?! O que estava acontecendo no problema da média do valor pago por litro de leite, quando vocês estavam usando a calculadora?*

E3: *É professor, às vezes nos perdemos até com a calculadora [sic].*

O professor/pesquisador explica que para não ocorrer isso, antes de usar uma máquina é necessário que se saiba estimar, isto é, precisa-se ter ideia de um valor aproximado para a resposta procurada e que se tenha conhecimento claro de como encontrar esses resultados caso não se dispusesse de uma máquina.

PP: *Quando forem realizar qualquer concurso ou até mesmo uma prova de vestibular deverão realizar todos os cálculos, que forem necessários, a mão e no raciocínio, pois não é permitido utilizar nenhum recurso, além de lápis, caneta e borracha.*

Após esses questionamentos retornou-se ao problema das casas decimais e o professor/pesquisador pergunta se os estudantes perceberam a diferença e a influência nos resultados, quando são utilizadas mais de duas casas decimais para grandes quantidades. Os estudantes percebem claramente o impacto. Com indagações de quanto, por exemplo, um laticínio que optasse por pagar com as quatro casas decimais, gastaria a mais se recebesse dez mil litros de leite de cem proprietários, fazendo $85 \times 100 = 8500$ os estudantes percebem mais claramente a influência das casas decimais.

Outro questionamento foi colocado aos participantes para que entendessem e percebessem a influência das casas decimais usadas quando em referência ao dinheiro. – *Nos postos como geralmente é apresentado o valor do litro de combustível?*

O E4 que possui uma motocicleta comenta: *Agora que entendo o porquê tem aquele nove pequenininho no preço da gasolina. Como os postos vendem grande quantidade de combustível, usar três casas decimais resulta em maior lucro, pois o consumidor pensa que está pagando os centavos com duas casas decimais e na verdade paga quase um centavo a mais, R$ 3,559 por litro 'regula bem dizer'*[5] *R$ 3,56 [sic].*

Com essas indagações e conversas, os grupos compreenderam a influência das casas decimais.

Quanto ao problema 2 na análise da resposta apresentada aceitou-se válido o valor 4,5 mL do medicamento para uma vaca de 15 arrobas. Ainda, discutiu-se a resolução por estimativa, apresentada pelo G1. Se para cada 50 quilos é 1 mL, e 15 arrobas tem 225 quilos, portanto 4 mL para 200 quilos e meio mL para 25 quilos, no total 4,5 mL.

Os estudantes compreenderam e aceitaram a resolução do G1, consideram mais fácil pensar assim, do que 'fazer contas'. O professor/pesquisador esclareceu e incentivou os estudantes a construir estratégias diferenciadas para resolver problemas. E, ainda apresentou outra forma de resolução, utilizando grandezas proporcionais.

Quando o professor/pesquisador se refere à regra de três, os alunos lembram ter estudado no ano anterior, mas quando solicitados a explicar porque as grandezas eram diretamente proporcionais ficaram na dúvida. E o professor/pesquisador questiona.

PP: *Para esse animal que tem 15 arrobas são necessários 4,5 mL da vacina. E se fosse um animal com 10 arrobas? E se o animal tivesse 20 arrobas? Quando seria mais e quando seria menos que 4,5 mL?*

Os estudantes entendem claramente que o animal menor receberia uma dose menor e, o animal maior uma dose maior. O professor/pesquisador explica – *Isso define o problema de se referir a grandezas diretamente proporcionais: se aumentar uma grandeza a outra também deve aumentar.* E resolve o problema, (Imagem 7), utilizando a regra com os alunos, que afirmam lembrarem-se dos passos para resolver, mas que não fizeram ideia de que poderiam ter utilizado na resolução.

[5] Termo utilizado pelo estudante que significa "equivale aproximadamente".

Imagem 7. Resolução utilizando a regra de três.

$$\frac{50}{225} = \frac{1}{x} \rightarrow 50x = 225 * 1 \rightarrow x = \frac{225}{50} \rightarrow x = 4{,}5$$

Fonte: O autor

Com a afirmação dos estudantes, compreende-se que quando eles aprendem um conteúdo matemático sem ligação com a realidade, ainda que saibam a forma mecânica eles apresentam dificuldades em relacionar e aplicar em um problema mesmo que este seja relacionado ao seu dia a dia.

4.2 Descrições da atividade de modelagem com o tema: impostos.

4.2.1 Escolha do tema

Os trabalhos e as discussões que envolveram o tema impostos, escolhido inicialmente por um grupo de três estudantes, na sequência envolveu a sala toda em discussões sobre o que é feito com os impostos cobrados no Brasil. Essas discussões podem suscitar uma formação de cidadão mais consciente e crítico em suas ações. As discussões em sala apontaram possibilidades para a destinação do dinheiro arrecadado pelo estado, os estudantes entendem que os impostos devem ser aplicados no bem-estar social, em áreas como saúde, educação, segurança e transporte, dentre outras.

Os apontamentos, em sala, trouxeram outro questionamento: Por que a maior parte dos serviços públicos é precária? Uma pessoa doente que necessita de um acompanhamento médico especializado deve ficar dias, meses e até mais de ano em filas de espera por atendimento do S.U.S (Sistema Único de Saúde). A sala, por unanimidade, chega a um consenso "*A destinação dada ao dinheiro arrecadado pelos impostos não está tendo o fim esperado*", argumentam sobre os escândalos envolvendo o dinheiro público que atualmente é bastante noticiado nos meios de comunicação.

Alguns educandos, amparados no que a mídia noticia, defendem que a saída para o Brasil é a mudança da presidência da República. A Modelagem na perspectiva assumida incentiva as discussões, os debates, as ideias com o objetivo de formar cidadãos mais autônomos. Nesse sentido, com objetivo de deixá-los mais críticos quanto à visão da política brasileira, os estudantes foram questionados: O Brasil é governado por apenas uma pessoa? Será que só essa pessoa é a responsável por tudo de ruim que acontece? Essas indagações provocaram intensos debates na sala de aula.

Os estudantes entraram em um consenso que: o *presidente da República não administra sozinho, pois tem deputados, senadores, governadores, prefeitos e vereadores. Embasando-se em reportagens apontam alguns políticos ligados à corrupção*.

4.2.2 Pesquisa exploratória

Na continuidade do trabalho com a Modelagem os estudantes do grupo foram orientados a pesquisar a respeito do tema. Encontraram uma reportagem intitulada "Por que tudo no Brasil custa tão caro" reportagem da revista Super Interessante, edição 317 de abril de 2013. A reportagem compara o preço, ao consumidor final, de alguns produtos no Brasil com o preço praticado em outros países. A reportagem, ainda destaca que a culpa não é somente das alíquotas dos impostos praticados, mas também, da infraestrutura precária de um país gigante como é o Brasil, da sua burocracia. Aponta também, nessa comparação, que o Brasil é uma nação que enriqueceu e não investiu em seu crescimento. A culpa é do governo, das indústrias, mas também é de todos.

Quanto aos impostos sobre produtos fabricados aqui no Brasil, essa mesma reportagem destaca que são: 12% de ICMS, 9,25% de PIS e Cofins e mais 3,4% de outros impostos, por exemplo, Imposto de Renda e de Contribuições Sociais sobre o lucro líquido (CSLL), isso só para o produto sair da fábrica! E ainda incidem mais impostos sobre o varejo. Em eletrônicos importados os impostos são maiores ainda. Um celular Samsung Galaxy SIII, exemplificado na reportagem, em Miami EUA, custa R$ 650,00, aqui no Brasil o mesmo celular não é vendido por menos de R$ 2.048,00. Em parte, isso é culpa dos impostos, pois em Miami os impostos cobrados são em torno de 7%, enquanto aqui o imposto para esse tipo de produto gira em torno de 40%.

4.2.3 Levantamento dos problemas

Após a leitura da reportagem o grupo 1 se propõe a fazer uma estimativa: qual a diferença nos preços pagos por alguns produtos no Brasil, comparado aos EUA e a China? Comparação esta apresentada pelo grupo 1 em forma de um quadro (Imagem 8), com base na reportagem da revista e pesquisas na *internet*.

Imagem 8. Comparação entre preços de alguns produtos[6]

País	Produto	Preço	
Brasil	Carrinho do bebê	R$ 999,00	
	Camiseta Hollister	R$ 79,00	Total
	Ipod 32GB	R$ 1.999	R$ 3.736
	Perfume CK One	R$ 169,00	
	calça diesel	R$ 490,00	
EUA	Carrinho do Bebê	R$ 530,44	
	Camiseta Hollister	R$ 38,30	Total B
	Ipod 32 GB	R$ 1176,79	R$ 2.198,72
	Perfume CK One	R$ 82,50	
	calça diesel	R$ 370,69	
China	Carrinho de bebê	R$ 343,19	
	Camiseta Hollister	R$ 47,19	Total C
	Ipod 32 GB	R$ 599,00	R$ 1269,23
	Perfume CK One	R$ 79,90	
	calça diesel	R$ 200,00	

Fonte: Estudantes – 2015

A partir dos dados coletados na revista e da elaboração do quadro, os estudantes se propuseram a calcular a percentagem que um brasileiro paga a mais em suas compras, comparando com os preços dos EUA e da China.

Outra questão levantada pelos estudantes foi: Só de impostos, para o carrinho de bebê (Imagem 8), ao sair da fábrica quanto é pago?

4.2.4 Resolução e desenvolvimento do conteúdo matemático

Neste momento os participantes do grupo não conseguiam encontrar um método para calcular a porcentagem mesmo tendo em vista que porcentagem é estudada desde o quarto ano das séries iniciais do Ensino Fundamental. Os estudantes argumentaram:

Es G1: *Professor, nós aprendemos ano passado a calcular porcentagem de um valor utilizando esta regra,* apontando em uma regra de três simples, da forma:

$$\frac{3736}{1024{,}18} = \frac{100\%}{x} \quad \Rightarrow \; x = 27{,}41\%$$

[6] Embora o Grupo não apresente a marca do carrinho de bebê, tratavam de produtos equivalentes.

Es: Mas quando multiplicamos 1024,18 por 27,41% na calculadora só encontramos 280,72, e se somarmos com 1024,18 não encontramos o 3736.

O professor/pesquisador verifica os cálculos dos estudantes e não encontra erros, mas percebe o equívoco cometido, pois o que os cálculos mostravam era quanto por cento 1024,18 equivale de 3736.

Coube ao professor/pesquisador a ação da mediação, "[...] entre o conhecimento dos estudantes e o conhecimento matemático já estabelecido." (BURAK e ARAGÃO, 2012, p. 96). Procura entender o que eles sabiam sobre porcentagem, e encontrar uma forma de resolver o problema da porcentagem juntamente com os estudantes. Nesse sentido, questiona-os:

PP: Se sou dono de uma loja, e compro uma calça no atacado pagando R$ 100,00 e a vendo por R$ 200,00, qual a porcentagem sobre o preço de compra?

E1: *Professor se dobrou, então o lucro foi de 100%.*

Os demais estudantes do grupo G1 concordam com o lucro de 100% e o professor/pesquisador os questiona: – *E se a vendesse por R$150,00, quanto por cento eu teria de lucro?*

Após algumas discussões o grupo G1 chega a um consenso "A*umentou a metade do custo, então o lucro foi de 50%".*

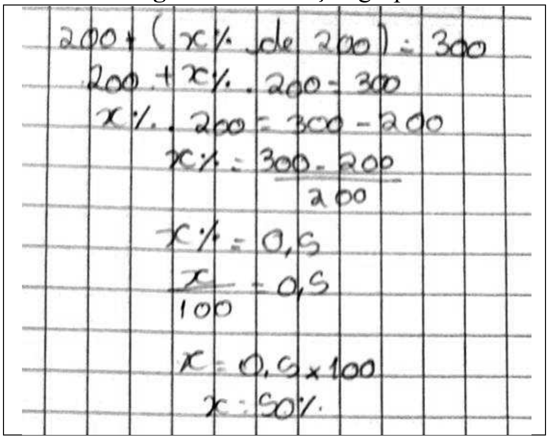
PP: *Ótimo!!! , mas como vocês realizam esses cálculos?*

A Estudante E2, com o auxílio do grupo G1, faz alguns rascunhos e chama o professor/pesquisador, apresentando uma expressão, da forma: $100 + \left(\frac{50}{100} \times 100\right) = 150$. Explica: *R$100 é o preço de custo, 50% de R$100,00 é R$50,00, então, somando temos R$ 150,00.*

O professor/pesquisador concorda com a explicação dada pela estudante e questiona: *Na expressão apresentada, vamos supor que vocês não consigam deduzir a porcentagem, então vamos chamar o* $\left(\frac{50}{100}\right)$ de $\left(\frac{x}{100}\right)$ *e isolar o "x", entendamos que 100 é o valor inicial, e 150 é o valor final com a porcentagem.* A resolução é apresentada pelos estudantes da seguinte forma: $x = \left(\frac{150-100}{100}\right) \times 100$.

PP: *E se comprassem uma bicicleta por R$ 200,00 e a vendessem por R$ 300,00, quanto por cento teriam de lucro?* A resolução apresentada pelo grupo G1 está na Imagem 9.

Imagem 9. Resolução grupo 1

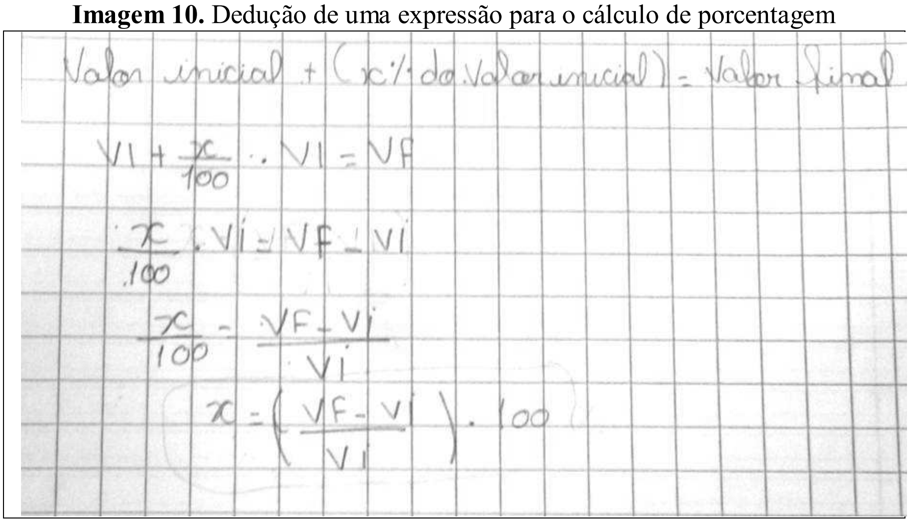


Fonte: Estudantes – 2015

O professor/pesquisador pede que comparem os dois problemas, o da calça e o da bicicleta e, que deduzam uma fórmula para calcular a porcentagem de qualquer preço, chamando o preço de compra de Vi (valor inicial) e o preço de venda de Vf (valor final).

Com o auxílio do professor/pesquisador, e por meio dos problemas anteriores, o grupo G1 construiu uma expressão para determinar a porcentagem de qualquer valor. Conforme Imagem 10.

Imagem 10. Dedução de uma expressão para o cálculo de porcentagem



Fonte: Estudantes - 2015

Com a expressão matemática construída os estudantes comparam os preços dos EUA com os do Brasil, e relacionam valor inicial, o menor valor (EUA) e valor final (Brasil). Conforme resolução apresentada nas Imagens 11 e 12:

Imagem 11. Resolução seguindo os passos da dedução da expressão.

$$2198{,}72 + \frac{x}{100} \times 2.198{,}72 = 3.736{,}00$$

$$\frac{x}{100} \times 2.198{,}72 = 3.736{,}00 - 2198{,}72$$

$$\frac{x}{100} = \frac{3.736{,}00 - 2198{,}72}{2.198{,}72}$$

$$\mathrm{x} = \frac{1537{,}28}{2.198{,}72} \times 100$$

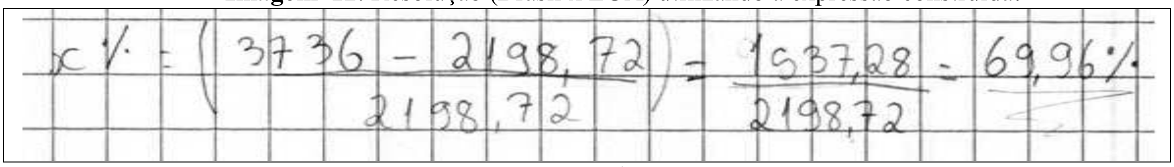
$$\mathrm{x} = 0{,}6991 \times 100$$

$$\mathrm{x} = 69{,}91\%$$

R: O Brasil paga 69,91% a mais em relação aos preços nos EUA.

Fonte: Estudantes – 2015 (Anexo 3)

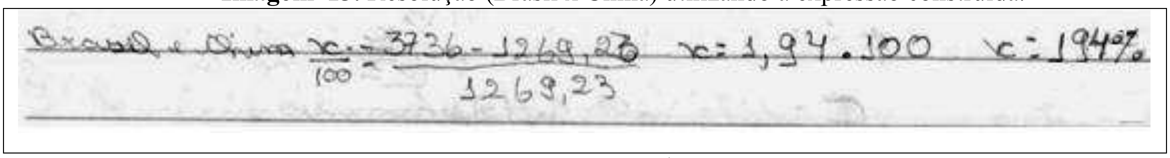
Imagem 12. Resolução (Brasil x EUA) utilizando a expressão construída.



Fonte: Estudantes – 2015

E, ainda determinam a porcentagem paga a mais no que se refere aos preços praticados no Brasil e na China. (Imagem 13).

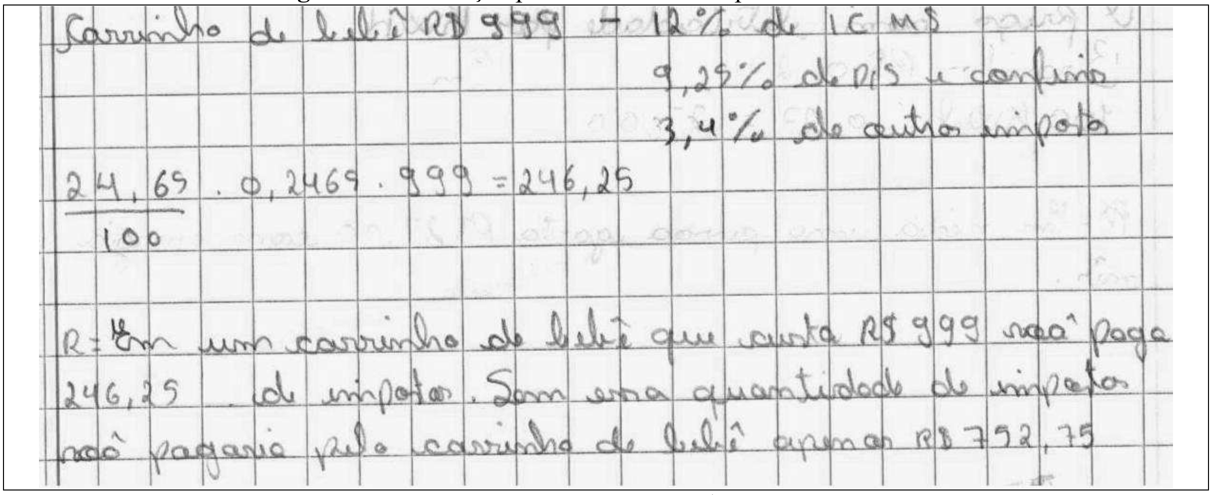
Imagem 13. Resolução (Brasil x China) utilizando a expressão construída.



Fonte: Estudantes – 2015

A resolução do problema, levantado pelos estudantes que indaga sobre o total pago de impostos sobre os produtos analisados quando se referiam ao carrinho de bebê, com base nos dados coletados da reportagem da revista em questão, os educandos apresentaram a resolução com o auxílio de uma calculadora (Imagem 14).

Imagem 14. Resolução problema cálculo impostos sobre o carrinho de bebê.


Carrinho de bebê R$ 999 → 12% de ICMS
9,25% de PIS e Cofins
3,4% de outro imposto

$\frac{24,65}{100} \cdot 0,2465 \cdot 999 = 246,25$

R: Em um carrinho de bebê que custa R$ 999 nós paga 246,25 de impostos. Sem essa quantidade de impostos nós pagaria pelo carrinho de bebê apenas R$ 752,75

Fonte: Estudantes – 2015

4.2.5 Análise crítica das soluções

Nessa etapa os estudantes refazem os cálculos para verificar se, no caso do Brasil e EUA quando fizessem R$ 2198,72 + 69,91% desse valor, resultaria em R$3736,00. Mas a valor encontrado foi R$ 3735,84, e coube ao professor/pesquisador esclarecer que essa pequena diferença foi devida ao fato de não utilizar todas as casas decimais, nos resultados. Diferença acarretada pelo arredondamento, também, pode ser verificada entre os preços do Brasil e China, R$ 1269,23 + 194% de 1269,23 = R$ 3731,53. Essas diferenças foram compreendidas pelos estudantes, pelo efeito do arredondamento das casas decimais. Quanto ao resultado final, os estudantes entendem que os cálculos estavam corretos, pois na relação Brasil e EUA o valor aumentou mais da metade e em relação Brasil e China o valor é quase três vezes mais.

A respeito do problema dos impostos o professor/pesquisador interrogou – *Então, com base no que vocês leram se não tivesse impostos sobre os produtos, no caso do carrinho de bebê, o valor pago seria de R$ 752,53?[sic].* De imediato os estudantes afirmam que sim, então o professor/pesquisador pede para que relessem parte da reportagem, pois deveriam compreender melhor o que estava escrito. A partir da releitura, uma das estudantes argumenta:

E3*: Pagamos mais impostos, ainda, pois, os 24,65% calculados por nós é pago só na fábrica, tem mais impostos quando as lojas nos vendem.*

E2: E colabora com a discussão – *Nooossa Professor! Quanto imposto! Para a fábrica vender para a loja, paga imposto e quando a loja vende para nós a loja paga impostos de novo sobre o mesmo produto [sic].*

PP: V*ocês hão de concordar comigo, quem paga todos esses impostos é o consumidor final, pois a fábrica e a loja, não podem ter prejuízo, logo, todos os impostos são repassados ao consumidor [sic].*

Os estudantes entendem que é para o consumidor final que incidem todos os custos das transações do produto adquirido, sem falar nos lucros das empresas e nos custos com transportes.

4.3 Descrições da atividade de modelagem com o tema: pomar na escola.

A turma que desenvolveu essa atividade é a segunda turma com que trabalhamos com a metodologia da Modelagem Matemática e que as atividades realizadas fazem parte da presente dissertação.

Para o início das atividades o procedimento foi semelhante ao realizado com a primeira turma. Iniciou-se apresentando a metodologia bem como a forma do encaminhamento das atividades nesse contexto, seguindo as etapas propostas por Burak (1998, 2004, 2010).

4.3.1 Escolha do tema

A possibilidade da escolha do tema de maior interesse da classe, como havia ocorrido nas atividades anteriores desenvolvidas com a primeira turma, despertou e motivou intensos debates e discussões na sala de aula. A formação de opinião e argumentação, já na escolha do tema são perceptíveis e pode ser verificada nos excertos a seguir conforme os diálogos dos estudantes.

E3: *Vamos trabalhar com jogo de bola, pois nesse contexto encontramos muita matemática, como por exemplo, a força que chutamos a bola, o percurso da bola ao ser chutada, bem como o ângulo que ela faz ao cair no chão e, o ponto onde chutar a bola para fazer gol no ângulo da trave. E podemos ir bater uma bolinha para fazer os testes, durante a aula de matemática [sic].*

E14: *Vamos estudar alguma coisa mais útil, por exemplo, a horta orgânica que vamos construir com o projeto de ciências, uma coisa que é de interesse do colégio todo, pois com esse projeto iremos produzir verduras, sem agrotóxico, para a nossa merenda [sic].*

E8: *Como a horta já será construída, por que não trabalhamos em outra coisa que ainda não temos no colégio, eu estava aqui pensando, vamos fazer um pomar, pensem!!! Nós termos frutas produzidas no colégio [sic].*

Esse tema se destacou e a turma participou das discussões, foi o tema de maior interesse. Mesmo antes de realizarmos uma votação, até os estudantes que haviam sugerido os demais temas se mostraram a favor do assunto pomar na escola.

Para dar prosseguimento na atividade a turma foi dividida em grupos com três e quatro integrantes, respeitando as escolhas. Nesse momento o estudante E2 optou por trabalhar sozinho. Segundo ele, não gosta de trabalhar em grupo. Então foi respeitada a decisão do estudante.

4.3.2 Pesquisa exploratória

Essa etapa iniciou com a realização de um levantamento dos espaços sinuosos existentes no colégio, com o objetivo de examinar o que mais se adequaria ao plantio do pomar.

Os estudantes manifestaram conhecimentos oriundos do seu cotidiano, com o objetivo de determinar os melhores locais para o plantio.

E16: *Mas, aqui no colégio a terra é muito seca, só tem grama e capim [sic].*

E8: *É só preparar a cova e fazer adubação [sic].*

PP: *Alguém sabe como deve ser essa cova? Que adubação devemos utilizar?[sic].*

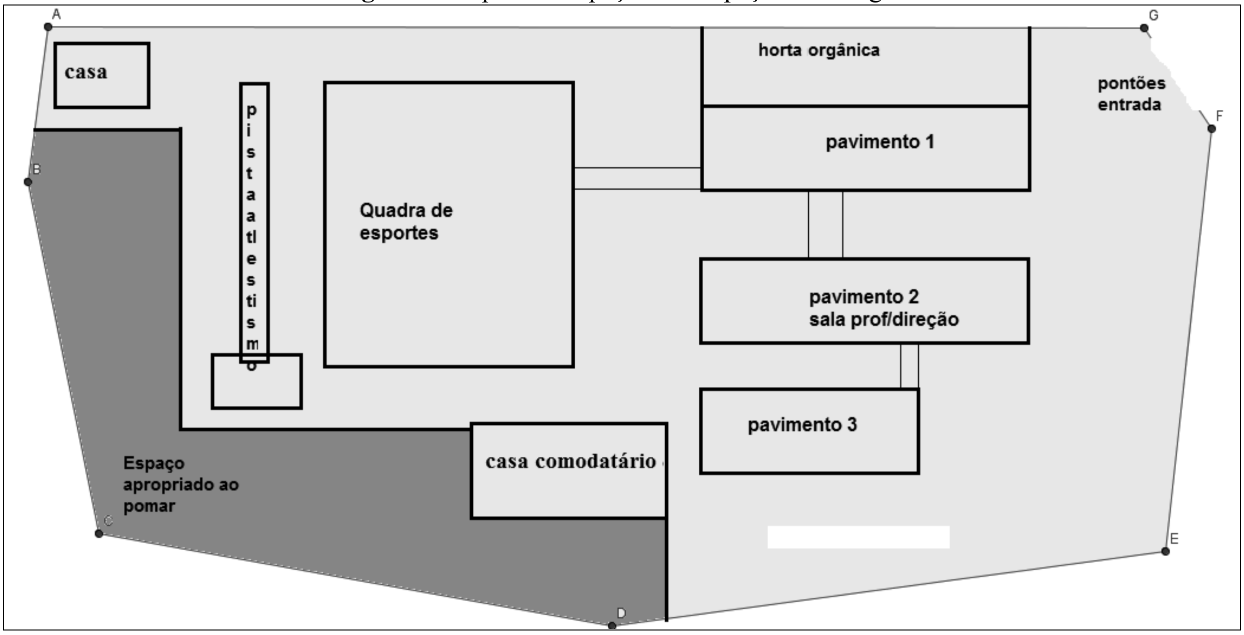
E8: *Deve ser uma cova boa para caber bastante esterco de gado, é assim que fizemos lá na casa [sic].*

E10: *Mas, meu pai plantou só fazendo um buraco que coube o jaca (torrão), nem adubou e está produzindo [sic].*

E8: *Porque deveria ser uma terra boa, se fizermos assim, aqui no colégio, as mudas podem morrer, pois elas necessitam de uma terra boa e com nutrientes para crescerem [sic].*

Os melhores espaços para o pomar são aqueles não utilizado pelos estudantes. Foram identificados os locais em que não havia, ou era pequena a movimentação de estudante. Eram os locais nos quais a vegetação natural crescia sem empecilhos (Figuras 4 e 5).

Figura 4. Esquema ocupação dos espaços no colégio.



Fonte: O autor – 2016

Figura 5. Estudantes escolhendo o melhor local para o plantio do pomar.

Fonte: O autor – 2016

A ideia do plantio de um pomar no colégio foi apresentada pelo professor/pesquisador à Direção da escola que se manifestou favorável e concordou com os espaços escolhidos, e destacou – *Este espaço estava inútil e com o pomar pode ser utilizado, constituindo um bem para todos os estudantes e para os professores [sic],* apoiando o objetivo da turma.

Para a medição do terreno, ocorreram algumas discussões.

PP: *Como podemos construir um esboço do espaço que dispomos [sic].*

E9: *Primeiro devemos medir.*

Diante da necessidade de fazer a medição, discutiu-se com os estudantes os instrumentos de medição, destacados por eles: a régua, metro, trenas de 2, 3, 5, 10, 30, 50 e

100 metros, corda, e GPS[7]. Analisou-se, ainda, a utilidade de cada instrumento e as situações em que cada um pode ser empregado e, para o caso em questão, qual o melhor a ser utilizado?

E8: *Lá em casa, para fazer as medidas de roça, utilizamos uma corda?[sic].*

E3: Mas a corda é usada para tirar grandes medidas, aqui que o espaço não é tão grande podemos utilizar uma trena [sic].

E1: *Meu pai tem uma fita métrica (trena) de 50 metros, posso trazer para a próxima aula [sic].*

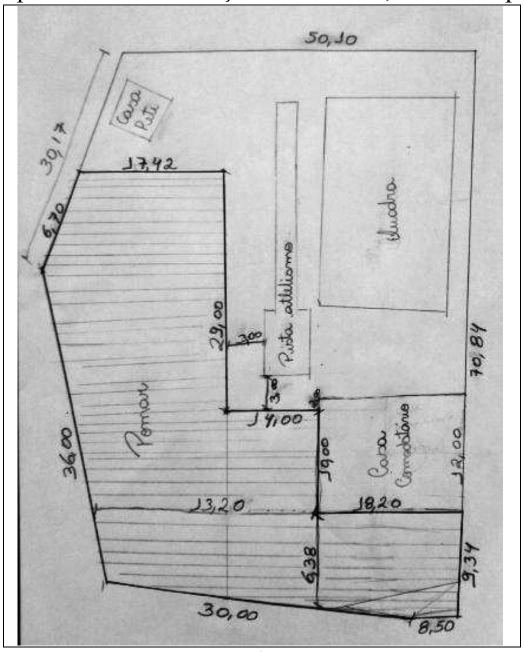
Os estudantes combinaram que cada grupo traria algum instrumento para realizar a medição, na próxima aula. A medição foi realizada (Figura 6), a (Imagem 15) traz o esboço com anotações das medidas.

Figura 6. Estudantes realizando as medições.

Fonte: O autor – 2016.

[7]GPS é a sigla de "*Global Positioning System*" que significa sistema de posicionamento global, em português. GPS é um sistema de navegação por satélite com um aparelho móvel que envia informações sobre a posição de algo em qualquer horário e em qualquer condição climática. Disponível em: http://www.sonhosbr.com.br/sonhos/significados/significado-de-gps.html acessado: 08/09/2016.

Imagem 15. Esquema com as medições do terreno, efetuadas pelos estudantes.



Fonte: Estudantes – 2016

Nesse momento da atividade alguns estudantes apresentaram dificuldade em fazer medidas com a fita métrica, porque nunca a tinham utilizado. Entretanto com a interação entre os grupos conseguiram, e aprenderam a usar o instrumento. Com a atividade de modelagem os estudantes desenvolveram ações e com instrumentos de medições compreenderam, na prática, como tirar medidas.

Coletadas todas as medidas os estudantes foram orientados a prosseguir a pesquisa, retomando as discussões a respeito das características do solo. Concordando com os estudantes quanto à carência de nutrientes do solo, foi proposto: – *Vamos realizar uma pesquisa para entender, com segurança, como proceder no plantio das mudas. Para a próxima aula vocês devem buscar e trazer materiais sobre plantio de mudas frutíferas, covas, adubações, cuidados, bem como espaçamento entre mudas [sic].*

Esperava-se que na aula seguinte os estudantes trouxessem materiais, mas não foi o que aconteceu, e a argumentação foi: – *buscamos, mas não encontramos nada em casa.* Como era de conhecimento os estudantes não dispunham de acesso à *internet* para pesquisa em casa, na biblioteca da escola não havia material sobre o tema, e o laboratório de informática da escola estava sem acesso à *internet.* O colégio tem uma sala de informática com vinte computadores, mas apenas quatro máquinas funcionam e se ligadas as quatro ao mesmo tempo travam e torna-se impossível a realização de uma pesquisa. Assim, o professor/pesquisador se prontificou em fazer a pesquisa e fornecer, algumas apostilas a respeito do assunto para os grupos pesquisarem.

Com base nos materiais encontrados e disponibilizados os estudantes aprenderam como fazer as covas para o plantio, a adubação necessária e o espaçamento entre as mudas. As covas devem ter de 40 x 40 x 40 cm a 60 x 60 x 60 cm, perfuradas e adubadas com no mínimo 60 dias de antecedência do plantio. A adubação, no caso, poderia ser feita com adubo orgânico e calcário. Optou-se por utilizar em média 3 kg de esterco de carneiro e 1 kg de calcário, para cada um dos pés de fruta, adubo este que foi disponibilizado pelo pai de um estudante. Esta adubação foi misturada com a terra superficial na proporção de três medidas de terra para uma de adubo.

Também foi compreendido pelos estudantes, que aberta a cova deveriam fazer uma forração com capim seco no fundo para segurar a umidade, e sobre o capim colocar a mistura de terra adubada, tampando totalmente o buraco com a terra do fundo. Quanto ao espaçamento, por ser o terreno do plantio do pomar uma área irregular, em que as árvores frutíferas não estariam em um único aglomerado, e com base em observações dos estudantes em árvores frutíferas de enxerto produzindo, que segundo eles não passam de 3 metros de diâmetro, podendo ser podadas e conservadas em tamanho desejado, foi usado um espaçamento de 4 metros entre as mudas.

Com a pesquisa percebeu-se que, para a região, a melhor época para o plantio são os meses de julho e agosto, assim os estudantes deviam preparar as covas no mês de maio. Discutiu-se, ainda em sala, como fazer as covas. A possibilidade de abrir com um trado em um trator, de início foi sugerida e logo descartada, pois perceberam que não teria como o trator entrar. Logo o serviço deveria ser manual.

Alguns estudantes se prontificaram a iniciar o serviço no contraturno. Mas não poderiam vir todos no mesmo dia. Em conjunto marcou-se a localização de cada cova, respeitando o espaçamento de quatro metros, para que quando viessem trabalhar, soubessem onde fazer as covas. Os estudantes E3 e E8 foram os primeiros que vieram trabalhar. Iniciaram os buracos onde a terra é mais drenada, em consequência mais fácil de cavar. Das 13h 30 até as 16 h cavaram 15 buracos.

A etapa da pesquisa exploratória continuou para atender necessidades surgidas no levantamento e na resolução dos problemas.

4.3.3 Levantamento dos problemas

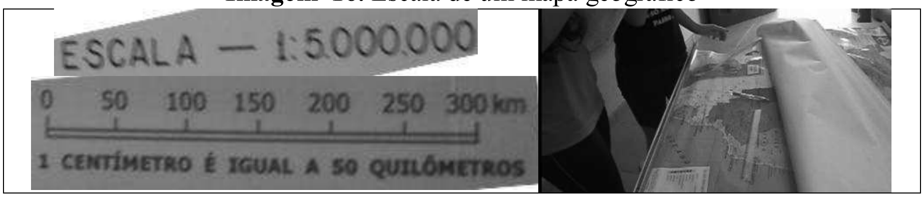
Com base nas pesquisas, os problemas foram elaborados de forma conjunta com todos os grupos.

Problema 1: Como fazer o desenho da parte dos fundos do colégio, que compreende a área para o plantio do pomar, mantendo a proporção (na escala)?

4.3.4 Resolução e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos

Para resolver este problema, as discussões levaram a considerar como fazer um desenho em escala e porquê utilizá-la. Essas indagações foram destacadas e compreendidas pelos estudantes, que manifestaram já terem trabalhado, em anos anteriores, com desenhos em escala – *Já desenhamos na escala, a planta da sala de aula. Cada centímetro no desenho correspondia a um metro da sala [sic].* Esse posicionamento dos estudantes foi mais bem exemplificado pelo professor/pesquisador, que destacou – *fazer um desenho em escala não é apenas estabelecer 1 centímetro para um metro (escala 1: 100), vamos até a biblioteca para analisar e entender como é construído um mapa geográfico e como é utilizada a escala* (Imagem 16).

Imagem 16. Escala de um mapa geográfico



Fonte: Mapa geográfico do Brasil e o Autor - 2016

Da análise, os estudantes compreenderam que cada centímetro no mapa corresponde a 5 milhões de centímetros no território. Na interação com os estudantes foi mostrado porque, na escala, 50 quilômetros correspondia a 1 centímetro.

PP: *Quantos centímetros tem 1 metro? E, quantos metros têm 1 quilômetro?*

Estudantes em consenso – *1 metro tem 100 cm. E, 1 quilômetro tem 1.000 metros.*

PP: *Então, quantos centímetros têm 1 quilômetro?*

Os estudantes deduziram que se 1 metro tem 100 cm, então 1 quilômetro tem 1.000 vezes 100 centímetros, ou seja, 1 quilômetro tem 100.000 centímetros, assim 5.000.000 de centímetros equivale a 50 quilômetros.

Com o auxílio de uma régua fizeram algumas medições e calcularam a distância em linha reta entre algumas cidades brasileiras.

Retornando à sala de aula as discussões foram em torno de como fazer o desenho dos fundos do colégio no qual se localiza o espaço destinado ao plantio do pomar. Optaram por utilizar a escala de 1:300, ou seja, 3 metros do terreno correspondendo a 1 centímetro no desenho.

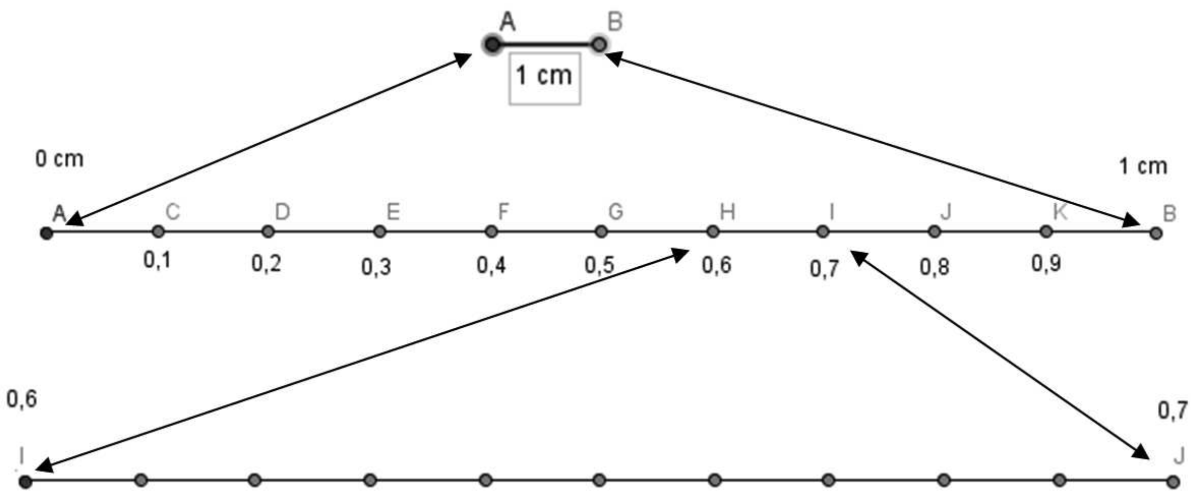
Ao fazerem as marcações das primeiras medidas seguindo a escala, encontraram dificuldades, pois não estavam mais trabalhando apenas com medidas inteiras e exatas, ao dividirem 70,84; 8,50; e 30,17 por três, encontram respectivamente 23,613...; 2,833...; e 10,056..., não conseguiam marcar com a régua essas medidas. Coube ao professor mediar essa ações.

PP: *Que número é maior 0,613 ou 0,7?*

Grande parte dos estudantes respondeu que 0,613 era maior. O professor com objetivo de dirimir essa dúvida solicitou que pegassem a régua e observassem quantos milímetros tem entre 0 e 1 centímetro. Todos destacaram ser 10 milímetros. Nesse contexto, o professor convida os estudantes a verificar uma ampliação de 1 centímetro, conforme quadro a seguir.

Quadro 3. Esclarecimento quanto à medições, para valores menores que milímetro.

PP: *Imaginemos uma lente que amplia 1 centímetro 10 vezes. Podemos perceber nitidamente a localização dos milímetros. E na sequência vamos imaginar outra lente que amplia novamente mais 10 vezes e ampliamos o milímetro do 0,6 ao 0,7.*



Fonte: O autor – 2016

Com a representação os estudantes compreenderam como fazer a localização, na régua, dos valores desejados. Ao fazerem o desenho, para todos os grupos algo deu errado. Em alguns casos sobrou medida sobrepondo os segmentos e para outros casos faltou ficando um espaço para fechar o desenho. Então, o professor/pesquisador foi solicitado em todos os grupos, os quais esperavam receber a resposta de imediato, mas foram instigados com um questionamento – *O que acontece com os ângulos internos de cada canto, quando aumentam ou diminuem a abertura ou a amplitude? O que isso implica no desenho?* Ao buscarem a solução foi comum em três grupos tentarem por aproximação diminuindo e aumentando os ângulos internos até o desenho fechar de forma mais aproximada.

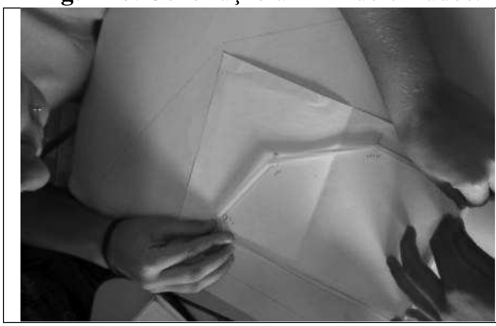
Interessante foi a forma de solucionar o problema encontrada pelo quarto grupo e compartilhada com a turma.

G4: *Como sabemos que um ângulo é reto, vamos fazer o desenho utilizando pedaços de madeira, cortamos na medida da escala e vamos fechando.*

E9: *Mas com madeira dá muito trabalho, daria para fazer com canudo de refri, passando um fio por dentro [sic].*

Sugestões aceitas por toda a sala, até os que já tinham feito o desenho, utilizaram a estratégia para comparar (Figura7).

Figura 7. Construção utilizando canudos.



Fonte: O autor – 2016

Ao finalizar o desenho, os estudantes foram questionados quanto ao nome e à soma dos ângulos internos do polígono formado, recordaram que se o polígono tem 6 lados é um hexágono, mas quanto aos ângulos internos, de imediato, não souberam responder.

Na interação com os estudantes, com objetivo de deduzir a soma dos ângulos internos do polígono formado (hexágono), foi questionado:

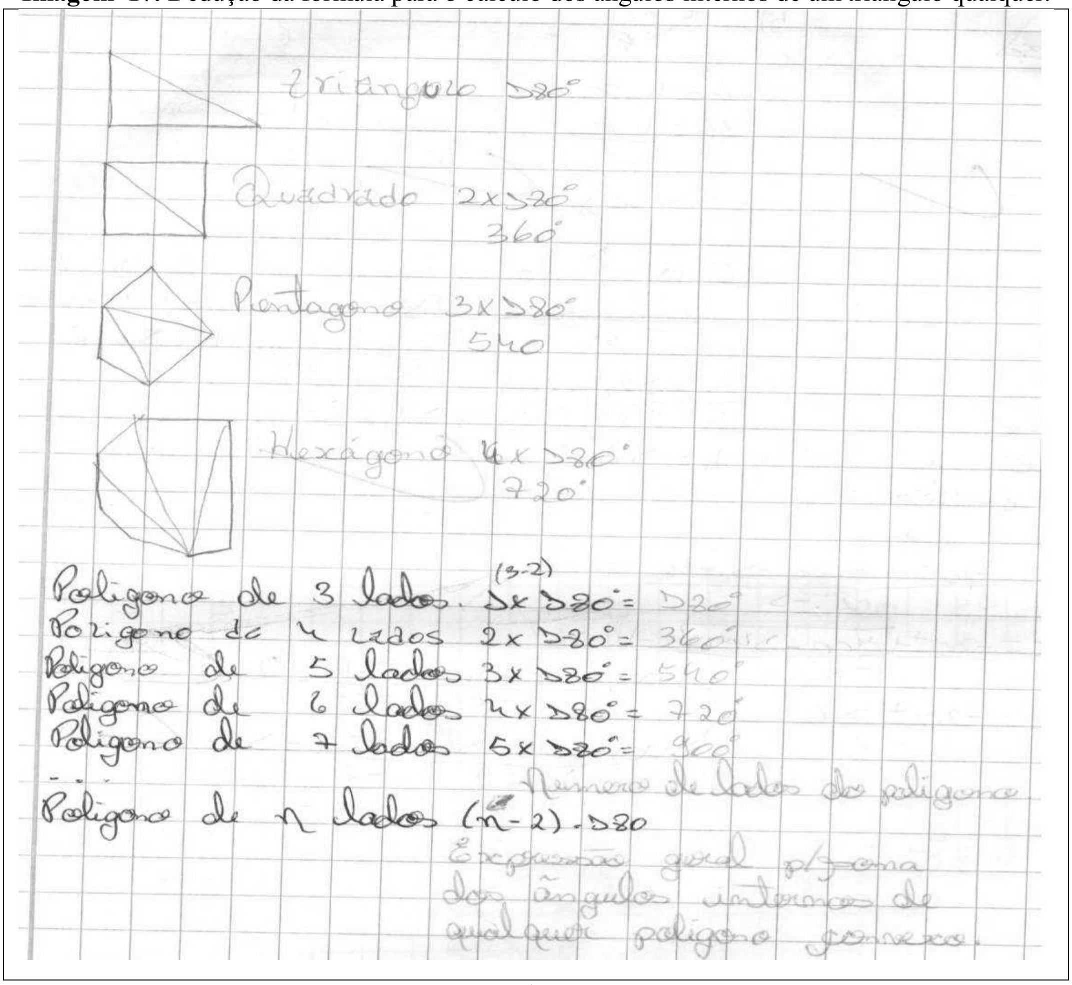
PP: *Quanto é a soma dos ângulos internos de um triângulo plano qualquer? E de um retângulo?*

Es: *Os ângulos internos do triângulo são 180 graus. E do retângulo 360 graus*.

PP: *E se tivéssemos um polígono de cinco lados (pentágono) quanto seria a soma dos ângulos internos?*

Esse questionamento, os estudantes de imediato não souberam responder, e foram novamente indagados – *Quantos triângulos podemos formar partindo de um mesmo ponto, em um retângulo, em um pentágono e em um hexágono?* Com esses questionamentos pudemos deduzir em conjunto a expressão utilizada para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer (Imagem 17). Deduzida a expressão os estudantes recordaram terem visto no ano anterior. Ainda coube na interação, o esclarecimento quanto a polígono côncavo e a polígono convexo.

Imagem 17. Dedução da fórmula para o cálculo dos ângulos internos de um triângulo qualquer.



Fonte: Estudantes – 2016.

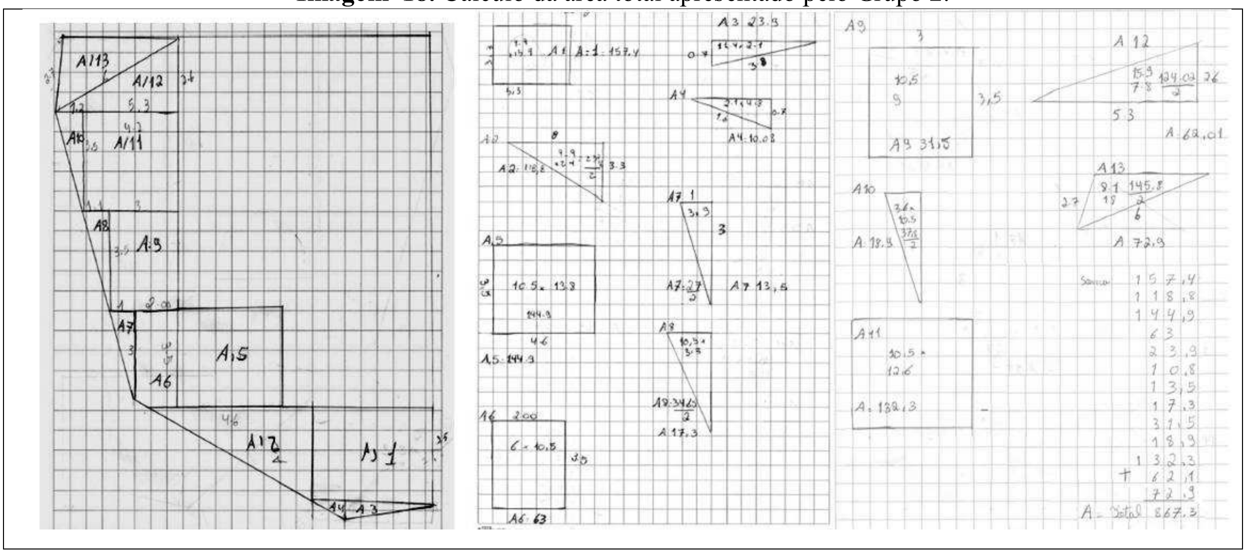
Problema 2: Quantos metros quadrados há para plantar o pomar? Quantos litros de terra é esse espaço?

Resolução e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do problema 2: Para resolverem, os estudantes de imediato, ao perceberem a forma do polígono que compreendia a área destinada ou plantio do pomar, não souberam como proceder. Foram questionados – *como calculamos a área de um triângulo? E de um retângulo?* Questionamentos respondidos pelos estudantes de forma correta – *área do triângulo é a base vezes a altura, e a área do retângulo é lado vezes lado [sic].*

PP: *Pensem nisso que vocês sabem, e encontrem uma forma de determinar aproximadamente a área que pretendemos calcular.*

Com interações entre os grupos, os estudantes perceberam que poderiam dividir a área total em áreas de triângulos e retângulos (Imagem 18).

Imagem 18. Cálculo da área total apresentado pelo Grupo 2.



Fonte: Estudantes – 2016

4.3.5 Análise crítica

A análise crítica do problema 1 ocorreu concomitantemente durante os procedimentos resolutivos, com atenção às discussões e aos apontamentos dos estudantes, conforme pode ser averiguado na etapa da resolução.

Para o problema 2 os grupos encontraram distintos resultados, o valor calculado para a área que mais se aproximou foi o do Grupo 2 sendo 867,3 m². Todos procederam da mesma forma, os cálculos foram realizados corretamente, mas estavam cometendo equívoco ao utilizarem a altura dos triângulos nos casos que não eram retângulos. Foi necessário auxiliar os estudantes a recordarem como determinar a altura, nesses casos.

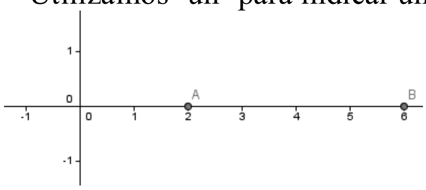
PP: *A altura será relativa ao lado que vocês tomarem por base, sempre formando um ângulo reto com o vértice, podendo a altura ser localizada dentro ou fora triângulo.*

Para exemplificar, foram construídas representações, no quadro, de triângulos agudos e obtusos, com a mesma medida de base e de altura e foram calculadas as áreas. Foram utilizados, ainda, os recursos do *software* GeoGebra. Como não havia computadores para os estudantes construírem, foi usado o notebook do professor e projetada a construção, para os estudantes.

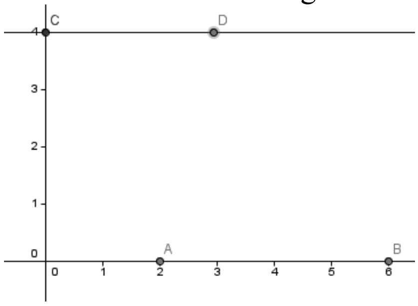
Quadro 4. Procedimentos adotados para os estudantes compreenderem qual medida utilizar ao se referir à altura de um triângulo plano qualquer.

1º passo: Criamos um segmento de reta fixo, com a ferramenta segmento de reta com comprimento fixo , que serviu como base ($\overline{AB}$ = 4 un*)

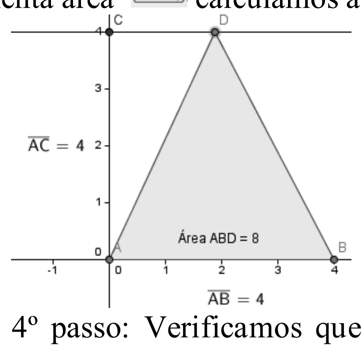
* Utilizamos ‘un’ para indicar unidade de medida.



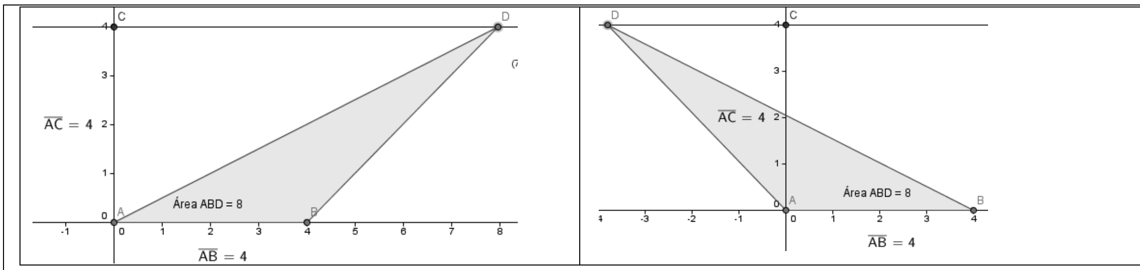
2º passo: Marcamos o ponto C para nele fixarmos uma reta paralela, com 4 un, ao segmento $\overline{AB}$, utilizando a ferramenta reta paralela , esta reta deu suporte a altura de todos os triângulos. Sobre esta reta ainda marcamos um ponto móvel D para ser utilizado como vértice do triângulo.



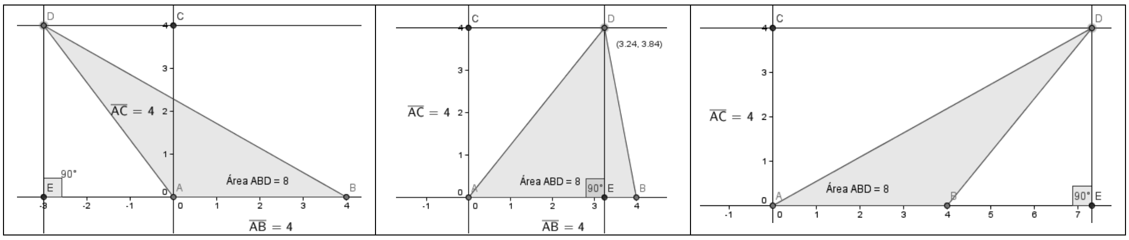
3º passo: Com a ferramenta polígono  construímos triângulos. E com a ferramenta área  calculamos a área do triângulo.



4º passo: Verificamos que mesmo o triângulo mudando de tipo, mantendo a mesma altura e mesma base, a área sempre será a mesma.



5º passo: Construímos ainda uma perpendicular , a reta que dá suporte ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice, ponto D, para verificarmos o ângulo formado, , do vértice com a reta que dá sustentação à base.

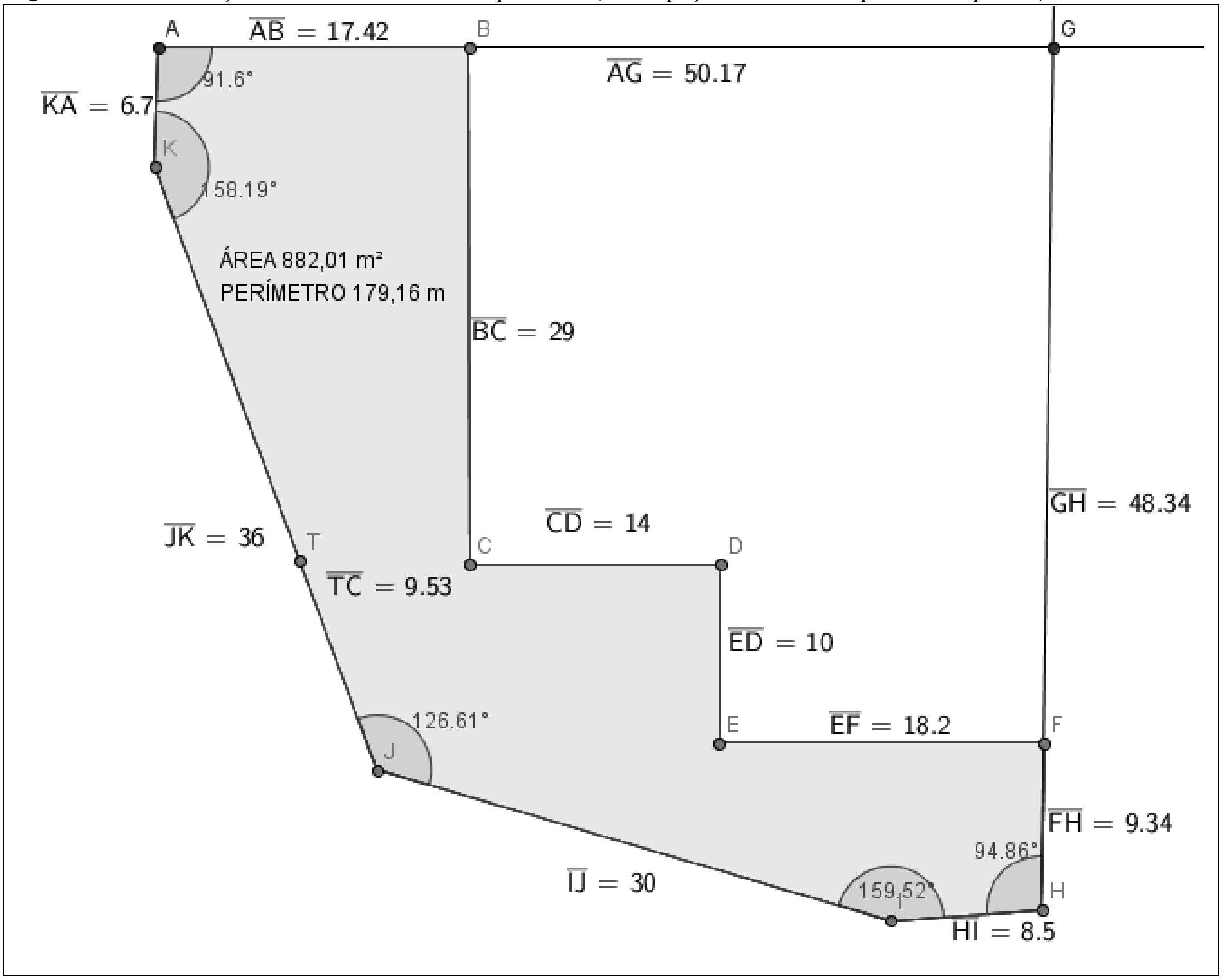


Com esta atividade ficou claro para os estudantes que a altura de um triângulo deve ser considerada sempre relativa à reta que dá suporte à base formando um ângulo reto com o vértice.

Fonte: O autor – 2016

Os estudantes compreenderam a forma correta de determinar a altura para calcular a área de qualquer triângulo e tiveram a oportunidade de refazer os cálculos e comparar com o cálculo da área construída e determinada no *software* GeoGebra (Quadro 5).

Quadro 5. Construção e cálculo da área e do perímetro, do espaço destinado ao plantio do pomar, no GeoGebra.



Fonte: O autor – 2016

Quanto à segunda parte da questão, como foi determinada a área da superfície, reformou-se a questão: quantos litros de terra corresponde a 882,01 m².

Para trabalhar a questão reviu-se medidas agrárias conhecidas pelos estudantes, e apontadas por eles.

E16: *Um litro é 11 por 55.*

PP: *Mas o que indica essa medida?*

E16: *Um retângulo que tenha 11 metros de largura por 55 metros de comprimento.*

PP: *Além do litro, quais as outras medidas agrárias medidas de terra que é de conhecimento de vocês?*

E8: *A quarta de terra que é 10 litros e um alqueire que é 40 litros*.

PP: *Em metros quadrados quanto é cada medida dessas*?

E9: *É fácil basta determinar quantos metros quadrado tem um litro (11 x 55 = 605 m²), agora multiplicamos por 10 para encontrar a área de uma quarta (605 x 10 = 6050 m²) e multiplicamos por 40 para encontrar a área de um alqueire (605 x 40 = 24.200 m²).*

E3: *E tem também o hectare que é 10.000 metros quadrados*.

As medidas agrárias eram de entendimento da turma, mas foi preciso esclarecer – *o alqueire tem variações de região para região, sendo que o empregado nesta região é o alqueire Paulista 24.200 m²; e tem ainda o alqueire do Norte com 27.225 m²; o alqueire mineiro com 48.400 m²; e o alqueire baiano com 96.800 m². Estas variações requerem a utilização de uma medida comum em todo o Brasil para não causar confusão. Esta medida é o hectare [sic].*

Retornando ao problema que buscava determinar de quantos litros é a área do pomar, os estudantes, utilizando calculadora, efetuaram a divisão da área do pomar 822,01 m², pela área de um litro 605m², obtiveram 1,358694 litros. Na interação quanto ao arredondamento, os estudantes compreenderam que a área é de aproximadamente 1,36 litros.

No próximo dia de aula, após os estudantes E3 e E8 trabalharem na realização dos buracos para o plantio das mudas, fazendo 15 buracos durante a tarde, das 13h 30 até as 16 h, as discussões, em sala foram em torno do trabalho que os estudantes haviam desenvolvido. Essas discussões originaram o **problema 3:** Considerando que dois estudantes fizeram 15 buracos em 2 horas e meia, quanto tempo um estudante, trabalhando sozinho e mantendo o mesmo ritmo de trabalho, levaria para fazer os 50 buracos?

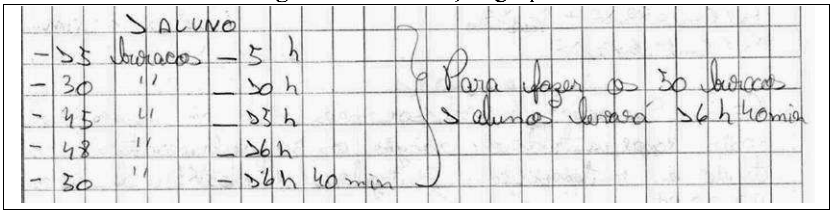
Resolução e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos:

A primeira forma de resolver foi apresentada pelo Grupo 4, que pensou em uma forma de proporção.

G4: *Se dois estudantes fazem 15 buracos em duas horas e meia, um estudante fará 15 buracos em cinco horas, e assim, fará 30 buracos em dez horas, 45 buracos em quinze horas. Se o estudante faz 15 buracos em cinco horas, então ele faz 3 buracos por hora, assim fará 48 buracos em dezesseis horas. Como ele faz 3 buracos por hora gasta vinte minutos para cada buraco. Portanto para fazer 50 buracos um estudante gastará dezesseis horas e quarenta minutos [sic].*

Em forma numérica os estudantes do grupo G3 apresentaram a resolução conforme Imagem 19.

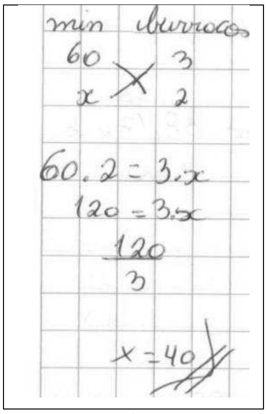
Imagem 19. Resolução grupo G3.



Fonte: Estudantes – 2016

O grupo G2 pensou no problema de forma análoga ao grupo G3, até encontrar que 48 buracos são cavados em dezesseis horas. Mas apresentaram um diferencial em relação à finalização do problema, quando utilizaram a regra de três simples e encontraram quanto tempo um estudante necessita para fazer 2 buracos, sendo 40 minutos (Imagem 20). Finalizam o problema determinando que o tempo é de dezesseis horas e 40 minutos.

Imagem 20. Regra de três utilizada pelo grupo G2 para calcular o tempo necessário para um estudante fazer 2 buracos.



Fonte: Estudantes – 2016

O grupo G1 não buscou forma diferenciada apenas seguiu o raciocínio apresentado pelo grupo G3. No contexto do problema 3 foi proposta, para a turma, uma nova situação: pretendendo fazer os 50 buracos em apenas uma hora, quantos estudantes seriam necessários, conforme o problema 4.

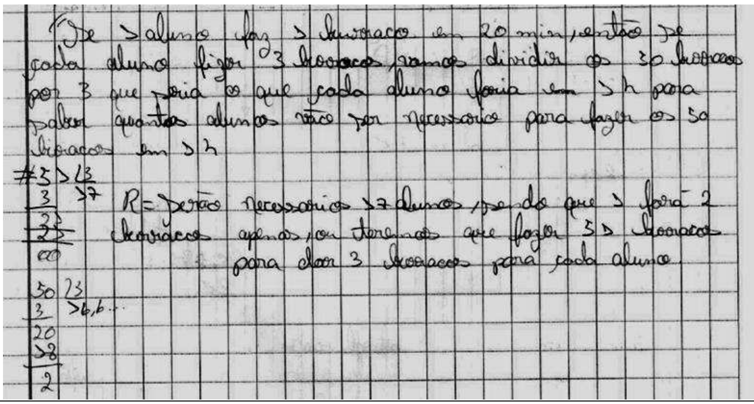
Problema 4: PP: *E se pretendêssemos fazer os 50 buracos em uma hora, quantos trabalhadores seriam necessários?*

A solução para este problema foi apresentada pelo grupo G4 (Imagem 21).

Imagem 21. Resolução problema 4 realizada pelo Grupo 4.

Se para fazer cada buraco um estudante gasta 20 minutos, então um estudante faz três buracos em uma hora. Assim dividimos 50 por 3 e encontramos quantos estudantes serão necessários para fazer os 50 buracos em uma hora (50 / 3 = 16,66...).

Análise crítica realizada pelo grupo: *A resposta correta é 17 estudantes, pois como se trata de grandeza discreta, número de pessoas que somente pode ser 1,2,3,4,..., 16 não dariam conta, então precisaria de 17 estudantes para cavar os 50 buracos em 1 hora.*


Se 1 aluno faz 1 buraco em 20 min, então se cada aluno fizer 3 buracos vamos dividir os 50 buracos por 3 que seria o que cada aluno faria em 1 h para saber quantos alunos vão ser necessarios para fazer os 50 buracos em 1 h

R= Serão necessarios 17 alunos, sendo que 1 fará 2 buracos apenas, ou teremos que fazer 51 buracos para dar 3 buracos para cada aluno.

Fonte: Material dos estudantes.

Os problemas 3 e 4 envolvem três grandezas, quantidade de estudantes, tempo necessário para fazer os buracos e quantidade de buracos. Nesse contexto, a partir do que os estudantes já sabiam, apresentamos o conteúdo referente à regra de três composta.

PP: *Problemas desse tipo, que envolvem três ou mais grandezas podem ser resolvidos por meio de uma regra de três composta. Vocês estão acostumados a utilizar a regra de três simples como o grupo 2 utilizou no problema 3. Recordando, o que é necessário verificar antes de resolver um problema utilizando regra de três?Quem lembra?*

E9: *Tem que ver se as duas grandezas aumentam, ou se uma aumenta e a outra diminui [sic].*

PP: *Correto, mas por que verificar isso? E, alguém lembra o termo matemático utilizado para denominar esses procedimentos?*

E1: *Devemos verificar para ver se precisamos inverter ou não, antes de resolver [sic].*

E9: *Com isso verificamos se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais [sic].*

PP: *É esse mesmo procedimento utilizado para resolver um problema quando se trabalha com mais de duas grandezas ao mesmo tempo, primeiro verifica-se a ordem das grandezas. Vamos ver como resolver os problemas 3 e 4 utilizando uma regra de três composta.*

1º passo: construir o Quadro 6 com as grandezas envolvidas.

2º passo: para verificar a ordem das grandezas fixa-se a grandeza a descobrir e analisar em relação às demais.

Quadro 6. Resolução utilizando regra de três composta

Quantidade de trabalhadores	Tempo (minutos)	Quantidade Buracos
2	150	15
1	x	50

Grandezas inversamente proporcionais **Grandezas diretamente proporcionais**

Fonte: O autor – 2016

3º passo: analisa-se o tempo em relação à quantidade de trabalhadores. Se o tempo de trabalho aumenta (seta para cima) a quantidade de trabalhadores para fazer um mesmo serviço diminui (seta para baixo), portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.

4º passo: analisa-se o tempo em relação à quantidade de buracos. Se o tempo aumenta (seta para cima), a quantidade de buracos feitos também deve aumentar (seta para cima), portanto são grandezas diretamente proporcionais.

5º passo: como a grandeza quantidade de trabalhadores é inversamente proporcional às demais, deve ser invertida e a ordem das grandezas fica $\frac{1}{2}, \frac{150}{\mathrm{x}}, \frac{15}{50}$.

6º passo: após estabelecer a ordem das grandezas monta-se a equação, deixando no primeiro membro a grandeza a descobrir, e resolve-se a equação.

$$\frac{150}{\mathrm{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{50}$$

PP: *O que fazer agora para determinar o valor de x?*

E9: É só fazer a multiplicação que está depois da igualdade, e multiplicar tudo cruzado [sic].

PP: *Outra forma, alguém sabe?*

Os estudantes não se manifestaram e o professor novamente os questionou – *por que utilizar a expressão multiplicamos cruzado?*

Es: *Foi como aprendemos para resolver uma regra de três, quando temos três valores e buscamos o quarto seguindo a mesma proporção.*

PP: *Para recordar: pode-se chamar* $\frac{150}{x} = \frac{15}{100}$ *de uma equação?*

Novamente os estudantes não se manifestaram e o professor questionou – *O que é uma equação?*

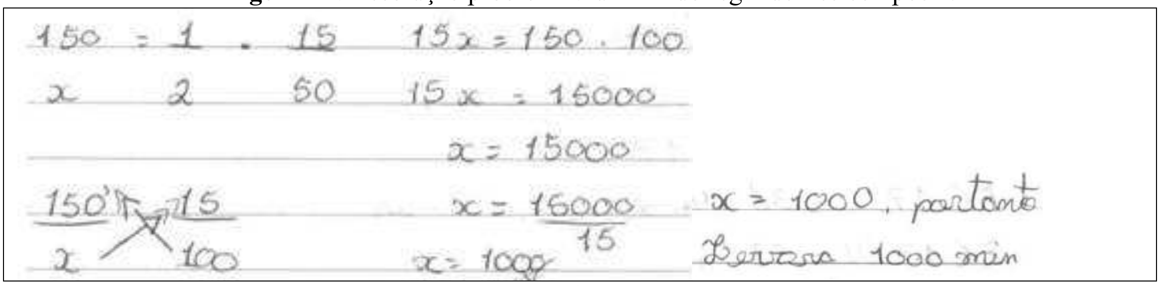
E16: *Quando temos uma igualdade e 'x' [sic].*

PP: *Quase isso, uma equação é uma igualdade que possui uma ou mais variáveis, ou seja, uma igualdade com valores desconhecidos.*

Continuando explica-se que em uma equação, quando se multiplicam ambos os membros por um mesmo número, não altera a igualdade. Portanto pode-se multiplicar ambos os membros por x e por 100, para eliminar os denominadores. E, dessa multiplicação é que surge a ideias de multiplicar cruzado, o que os estudantes verificaram.

Os estudantes finalizaram a resolução da equação e determinaram o valor de x (Imagem 22).

Imagem 22. Resolução problema 3 utilizando regra de três composta.

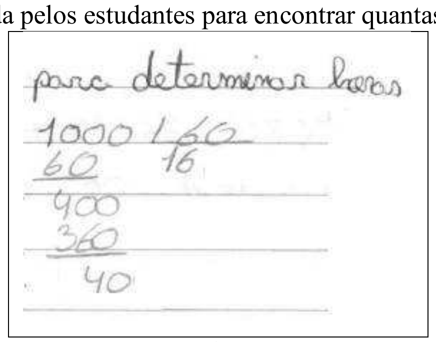


Fonte: Estudantes – 2016

PP: *Quando vocês resolveram por dedução encontraram 16 horas e 40 minutos, o que aconteceu que encontramos 1000 minutos agora?*

E9: *É o mesmo, basta transformar 1000 minutos em horas, como uma hora tem 60 minutos é só dividir 1000 por 60, a parte inteira são as horas e o resto são os minutos* (Imagem 23), *portanto são 16 horas e 40 minutos [sic].*

Imagem 23. Divisão realizada pelos estudantes para encontrar quantas horas tem em 1000 minutos.

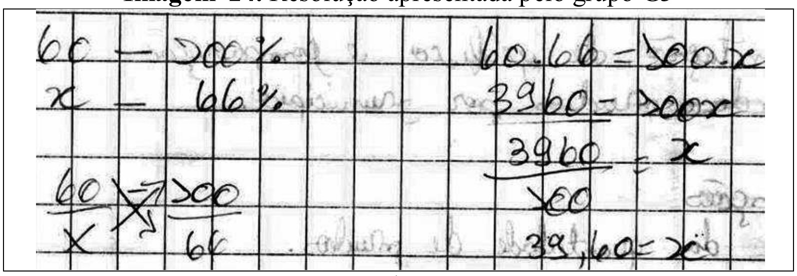


Fonte: Estudantes – 2016

O Grupo 2 realizou a divisão utilizando uma calculadora e questionou – *por que quando dividimos 1000 por 60 encontramos com a calculadora 16,66..., como resultado e não 16,40 [sic].*

O Professor questionou – *Alguém consegue esclarecer essa dúvida?* Os estudantes não souberam se expressar, então foram levados a pensar na parte inteira e na parte decimal que compõe o número 16,66..., são 16 inteiros mais 66,66% de um inteiro que fecha 17 inteiros. Se fossem 17 horas inteiras seriam 1020 minutos, mas o que se quer saber é quantos minutos corresponde 0,66... de uma hora. Foram novamente questionados – *Como proceder?* O grupo G3 apresenta uma solução (Imagem 24) e destaca – *60 minutos é uma hora, então corresponde a um inteiro (100%), devemos montar uma 'regrinha' e descobrir quanto 0,66 (66%) é de uma hora [sic].*

Imagem 24. Resolução apresentada pelo grupo G3

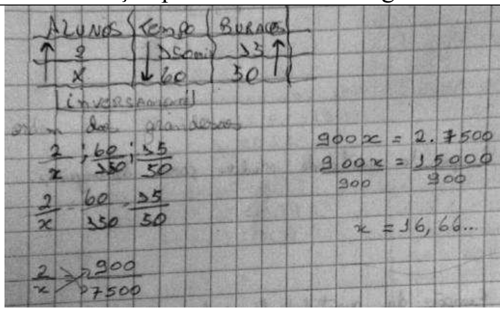


Fonte: Estudantes – 2016

PP: *Correto, mas percebam que a resolução apresentada pelo G3 considera apenas duas casas decimais, e o resultado encontrado é uma dizima periódica, (tem infinitas casas) então quanto mais casas vocês usarem ao calcular podem perceber que mais próximo será o resultado de 40, ou seja, 0,66... de uma hora é o mesmo que 2/3 e que corresponde a 40 minutos.*

Usando raciocínio análogo os estudantes resolveram o problema 4 para comparar com a solução encontrada por dedução.

Imagem 25. Resolução problema 4 com a regra de três composta.



E9: Encontramos o mesmo valor, ou seja, 16 estudantes fazem 48 buracos e 17 fazem 51, um a mais, então 16 estudantes fazem 3 buracos e 1 pode fazer 2 buracos.

Fonte: Estudantes – 2016

Análise crítica problemas 3 e 4: Ao finalizar as resoluções os estudantes consideraram a importância de se analisar a pertinência dos resultados encontrados e se na prática isso pode ser ou não verificado. Concluíram que os resultados encontrados eram apenas uma estimativa, pois, na prática, há lugares mais difíceis de serem cavados e que, consequentemente, demora mais tempo. E também, as pessoas não têm a mesma força para trabalhar todas de forma equivalente. Os cálculos estão matematicamente corretos, mas estas situações não se verificariam, verdadeiramente, na prática.

Outra situação proporcionada pela Modelagem diz respeito às tomadas de decisões relativamente às situações que surgem no tema em estudo. Trata-se de como viabilizar a aquisição das mudas e onde encontrar o tipo escolhido. Daí surgem as seguintes situações, em forma de problema a ser resolvido.

Problema 5: Como conseguir dinheiro para comprar as mudas? Onde comprar as mudas?

Para resolver este problema conversou-se, em sala, sobre as possibilidades de conseguir o dinheiro para a aquisição das mudas. Alguns estudantes se propuseram a doar mudas, mas outros ficaram constrangidos, pois não tinham condições, mas também queriam participar da aquisição das mudas. Com esse impasse procurou-se outras formas para a compra das mudas sem que fosse necessário os estudantes colocarem recursos próprios. A possibilidade de fazer uma rifa teve grande aceitação, mas ao ser levada a reivindicação ao conhecimento da direção, não foi aprovada, pois coincidiria com outras promoções realizadas pelo colégio e sobrecarregaria os estudantes. A direção se prontificou em realizar uma campanha entre os professores e funcionários: Plante suas raízes no CECC e colha os frutos, Divulgada a campanha, todos se manifestaram favoráveis e o dinheiro para a aquisição das mudas foi doado pelos funcionários. Em consenso com a turma e com a direção foram escolhidas as mudas que seriam plantadas (Quadro 7).

Quadro 7. Mudas frutíferas a serem plantadas.

Quantidade	Fruta
4	Ameixa
3	Amora
2	Caqui Café
5	Laranja Champanhe
3	Laranja Lima
5	Laranja Sanguínea
7	Laranja Umbigo
1	Limão Taiti
2	Nectarina
3	Pêra d Água
2	Pêssego Amarelo
2	Pêssego Branco
7	Ponkan
4	Tangerina

Fonte: O autor – 2016

Os estudantes determinaram onde seria mais viável adquirir as mudas. O estudante E8 se prontificou a verificar os preços em duas cidades, Cantagalo e Laranjeiras. Como o professor iria para Guarapuava, se propôs a consultar o preço das mudas em Guarapuava também para que, na semana seguinte, fosse resolvido onde seriam compradas as 50 mudas, em um montante, com preço único para todas as mudas.

A consulta dos preços mostrou os seguintes valores: em Cantagalo R$ 18,00; em Laranjeiras R$ 15,00; e em Guarapuava R$ 12,00. Os estudantes foram questionados – *Como em Guarapuava é mais barato é só comprar lá as mudas? Ou deve-se considerar outros fatores?*

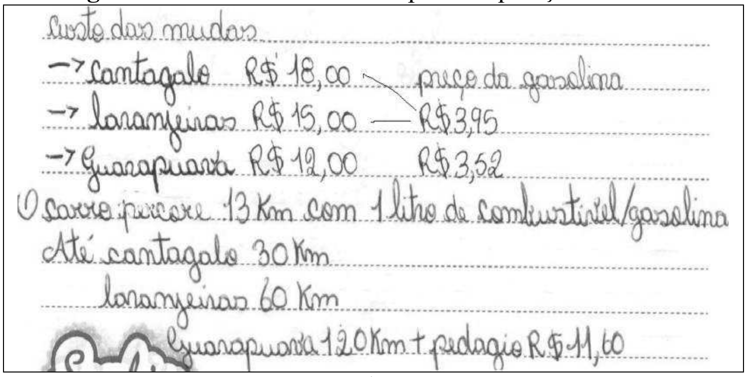
Es: *É mais barato mas é muito mais longe e se formos buscar, indo por Cantagalo, tem também mais o pedágio [sic]*.

PP: *O que avaliar para saber onde será mais viável comprar as mudas?*.

A troca de ideias estabelecida juntamente com os estudantes tratou do que levar em consideração, sendo, além do preço das mudas, o consumo do veículo que buscaria as mudas, uma *pickup* corsa que percorre 13 km com 1 litro de combustível; o preço do combustível, pois em Cantagalo e Laranjeiras pode-se abastecer no mesmo posto, mas buscando em

Guarapuava tem um posto próximo à Lagoa Seca, onde o combustível é mais barato; em contra partida tem também o valor do pedágio (Imagem 26).

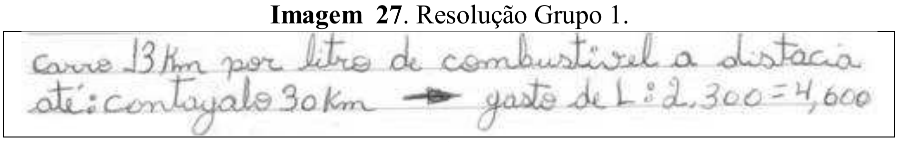
Imagem 26. Dados considerados para a aquisição das mudas.



Fonte: Estudantes – 2016

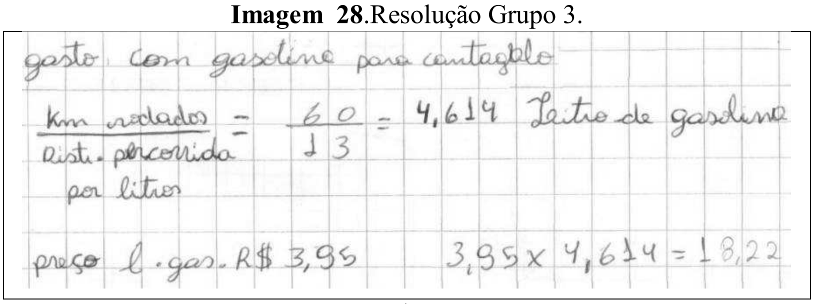
Coletadas as informações os grupos trabalharam para solucionar a situação-problema e determinar onde seria mais viável realizar a compra das mudas. O Grupo 1 e o Grupo 3 já no início chegaram a um impasse, que caberia na etapa da análise crítica. Foi discutido com a turma no momento da resolução, sendo uma característica da forma de trabalhar, não deixar as dúvidas para depois, mas solucionar quando surgem. Ao fazer os cálculos, o Grupo 1 destacou que, de combustível, seria necessário 2,300 litros para ir, e mais 2,300 litros para voltar, total 4,600 litros (Imagem 27) . O Grupo 3 destaca ser necessário 4,614 litros (Imagem 28).

Imagem 27. Resolução Grupo 1.



Fonte: Estudantes – 2016

Imagem 28.Resolução Grupo 3.



Fonte: Estudantes – 2016

G1: *Não faz diferença os 14 ml que o Grupo 3 utiliza.*

Em relação à indagação do G1

G3: *Se faltar 14 ml o carro não chega até o posto.*

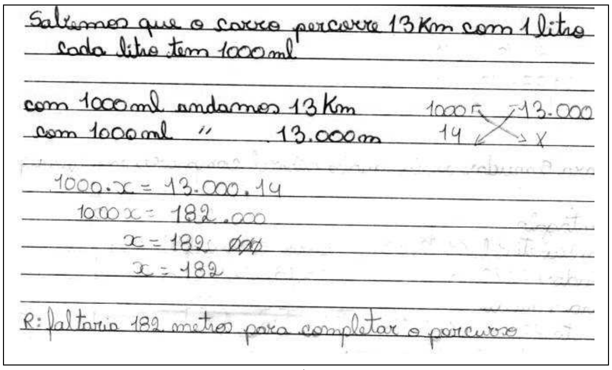
Com esses questionamentos o Professor propôs à turma – *Verifiquem a distância que um automóvel, que faz 13 km com 1 litro percorre com 14 ml de combustível, para confirmar se faz diferença considerar os 14 ml ou não.*

Para resolver este problema os estudantes foram questionados – *quantos ml possui 1 litro? – 1000 ml* – responderam os estudantes. – *Quantos metros tem 1 quilômetro*? – *1000 metros* – responderam os estudantes.

PP: *Com base nisso determinem a distância percorrida pelo automóvel.*

Os grupos usaram uma proporção e determinaram que a distância percorrida com 14 ml seria de 182 metros (Imagem 29), e o Grupo 1 entrou em consenso com o Grupo 3 e com o resto da turma que 14 ml fazem muita diferença. O estudante E16 destacou – *Faz muita diferença, 182 metros é uma grande distância para empurrar um carro até chegar à bomba de combustível [sic].*

Imagem 29. Cálculo para determinar a distância percorrida com 14 ml de combustível


Sabemos que o carro percorre 13Km com 1 litro
cada litro tem 1000ml
com 1000ml andamos 13Km   1000 — 13.000
com 1000ml " 13.000m   14 — x
1000.x = 13.000.14
1000x = 182.000
x = 182 ~~000~~
x = 182
R: faltaria 182 metros para completar o percurso

Fonte: Estudantes – 2016

Ao analisar a resposta apresentada pelo Grupo 3, o Grupo 2 percebe que havia algo errado e que o resultado apresentado de 4,614 litros não estava correto pois o resultado da divisão de 60/13 é 4,615 litros. Na interação, o estudante E3, do Grupo 3 destaca – *É que nós arredondamos, pois no resultado da calculadora o número que aparece depois do 5 é o 3 (4,6153846), e como 3 é menor que 5, devemos arredondar para baixo, ai fica 4,614 [sic].*

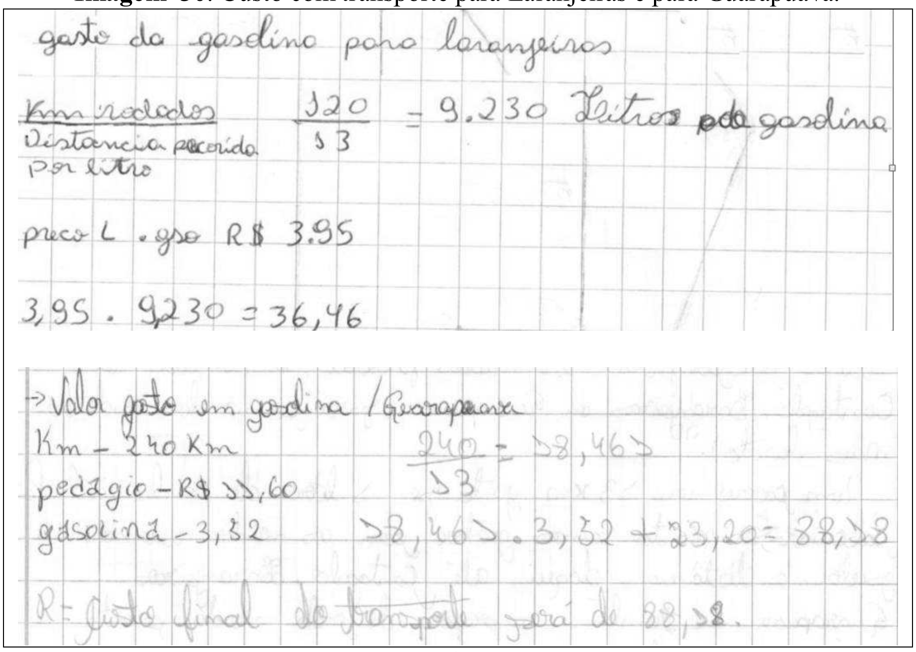
Os estudantes já estavam realizando, automaticamente, a análise crítica dos resultados. Cabia mediar os debates dos grupos e esclarecer que o Grupo 3 cometia um equívoco, pois quando se referem a arredondar para baixo não significa que o número deveria diminuir, mas sim manter o valor da terceira casa decimal, e caso a quarta casa decimal fosse um número maior que 5, ai sim, a terceira casa decimal deveria ser acrescida, pois o resultado estaria mais próximo de 4,616 do que 4,615.

Para finalizar as discussões quanto a essa parte do problema os estudantes foram questionados se, em alguma hipótese, eles colocariam somente a quantidade exata de combustível que precisariam. Aí compreenderam que debatiam um problema que, na prática, dificilmente se verifica, pois em geral ao abastecer são comuns as seguintes expressões: “coloca 10 litros, ou ainda põe R$ 20,00”.

No entanto, esse problema oportunizou o trabalho com os conteúdos matemáticos que envolveram regra de três e, também a questão do arredondamento. Esses conteúdos ganharam mais significado e entendimento.

Retomando o objetivo inicial os estudantes determinaram a variação do custo com o transporte para a cidade de Laranjeiras e de Guarapuava (Imagem 30).

Imagem 30. Custo com transporte para Laranjeiras e para Guarapuava.

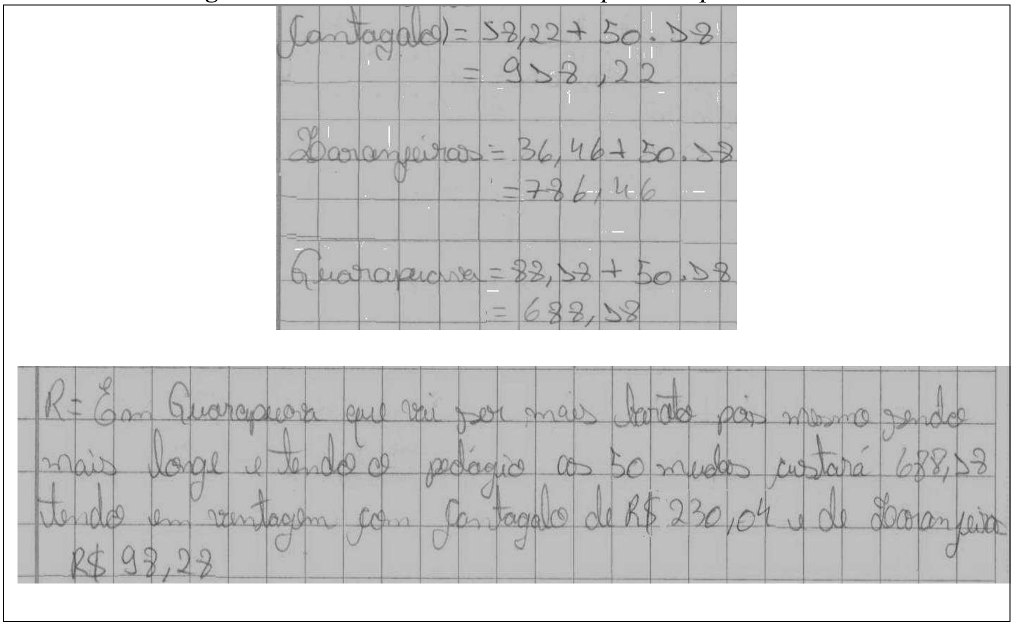

gasto da gasolina para Laranjeiras
Km rodados / Distância percorrida por litro $\frac{120}{13}$ = 9.230 litros de gasolina
preço L. gas R$ 3.95
3,95 . 9230 = 36,46

→ Valor gasto em gasolina / Guarapuava
Km – 240 Km $\frac{240}{13}$ = 18,461
pedágio – R$ 11,60
gasolina – 3,32 18,461 . 3,32 + 23,20 = 88,18
R = Custo final do transporte será de 88,18.

Fonte: Estudantes – 2016

Determinado o gasto com o transporte, foi trivial para todos os grupos multiplicar o preço de cada muda pela quantidade para cada cidade e adicionar com as despesas do transporte determinando, assim, onde seria mais viável comprar as 50 mudas a serem plantadas (Imagem 31).

Imagem 31. Custo final em cada cidade para comprar as mudas.



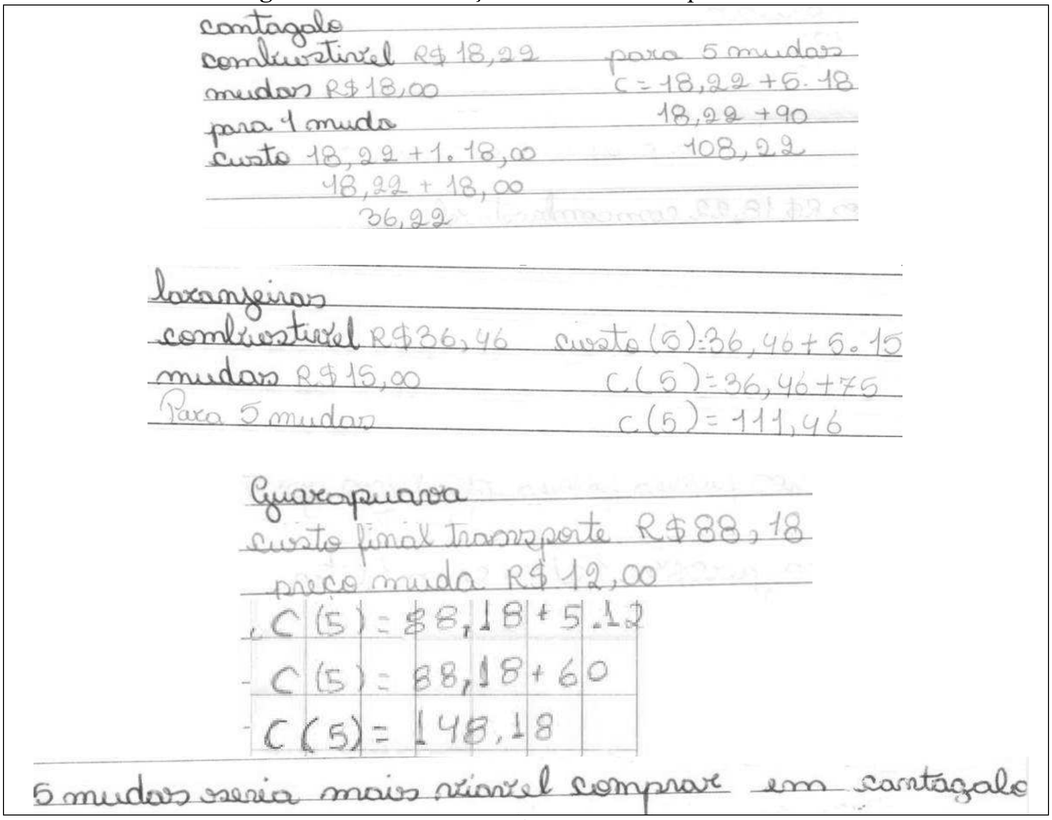
Fonte: Estudantes – 2016

Análise crítica: Finalizados os cálculos os estudantes foram arguidos a respeito dos resultados encontrados. Eles afirmaram que, mesmo sendo mais distante e ainda acrescido do pedágio, seria mais viável comprar as mudas em Guarapuava. Nas discussões o professor interferiu e perguntou – *Então se vocês forem comprar 5 mudas para plantar na propriedade de vocês irão comprar em Guarapuava, pois os cálculos mostraram que mesmo sendo mais longe em Guarapuava sai mais barato?*

Estudantes: *Temos que verificar, pois não é sempre que sai mais barato devido ao custo da viagem.*

Assim, os estudantes perceberam que para a aquisição das 50 mudas em questão é mais viável em Guarapuava, mas se a quantidade de muda diminuir isso se tornaria relativo, como foi a caso analisado pelos estudantes para 5 mudas (Imagem 32).

Imagem 32. Determinação do menor custo para 5 mudas.


contagalo
combustível R$ 18,22 — para 5 mudas
mudas R$ 18,00 — C = 18,22 + 5 . 18
para 1 muda — 18,22 + 90
custo 18,22 + 1 . 18,00 — 108,22
18,22 + 18,00
36,22

laranjeiras
combustível R$ 36,46 — custo (5): 36,46 + 5 . 15
mudas R$ 15,00 — C(5) = 36,46 + 75
Para 5 mudas — C(5) = 111,46

Guarapuava
custo final transporte R$ 88,18
preço muda R$ 12,00
C(5) = 88,18 + 5 . 12
C(5) = 88,18 + 60
C(5) = 148,18

5 mudas seria mais viável comprar em cantagalo

Fonte: Estudantes – 2016

4.3.6 Introdução ao conceito de Função a partir do problema das mudas frutíferas

No desenvolvimento, durante as várias situações que se apresentam surge a oportunidade de introduzir o conceito de Função. Para isso, foi solicitado que os estudantes verificassem o custo para uma quantidade variada de mudas, em cada cidade. E, na sequência, foram questionados a respeito do que estava mudando em cada cálculo. Perceberam ser apenas a quantidade de muda comprada em cada cidade, pois o preço e o gasto com transporte se mantinham. Encaminhamentos adotados para a construção da ideia de função podem ser examinados no Quadro a seguir.

Quadro 8. Encaminhamentos para construção do conceito de funções.

Quantidade de mudas (Cantagalo)	Valor a pagar	Observações
1	1 × 18	Uma muda = uma vezes 18 reais
2	2 × 18	Duas mudas = duas vezes 18 reais
3	3 × 18	Três mudas = três vezes 18 reais
...	...	...

i	i × 18	i mudas = i vezes 18 reais
...	...	...
n-1	(n-1) × 18	(n-1) mudas = (n-1) vezes 18 reais
n	n ×18	n mudas = n vezes 18reais

Podemos observar que quando o número de mudas aumenta, o valor aumenta. O importante nesse caso é a forma de crescimento das variáveis: quantidade de mudas e preço. Ou seja, é uma proporcionalidade direta, se a grandeza (quantidade de mudas) aumenta a outra grandeza (valor em reais) também aumenta.

Então, uma expressão matemática que fornece o valor de um número qualquer de mudas pode ser da forma:

Preço a ser pago = número de mudas vezes o valor de cada muda que é fixo.

Assim, P(n) = n vezes 18 ou preço a ser pago, chamado de P, é igual a um número x qualquer de mudas multiplicado pelo valor de cada muda (nesse caso 18).

P(x) = x × 18 – é uma expressão matemática que fornece o valor em função do número de mudas adquiridas em Cantagalo.

Seguindo o mesmo raciocínio pode-segeneralizar as expressões matemáticas para Laranjeiras **P(x) = x** × **15**, e para Guarapuava **P(x) = x** × **12.**

Essas expressões são denominadas expressão analítica da função linear.

Quando acrescentado o custo do transporte que também é fixo para cada uma das cidades tem-se uma função afim, do tipo:

Para Cantagalo – P(c) = custo transporte + x × 18.
Para Laranjeiras – P(l) = custo transporte + x × 15.
Para Guarapuava – P(g) = custo transporte + x ×12.

Chamando os custos com o transporte de custo fixo de C as expressões ficam, respectivamente, $P = C_1 + x \times 18$; $P = C_2 + x \times 15$; $P = C_3 + x \times 12$.

Essas funções afim são do tipo y = ax + b.

Fonte: O autor – 2016

Assim, os estudantes compreenderam a ideia de funções, que a cada quantidade de muda comprada corresponde um único valor a ser pago, ou seja, o valor a ser pago depende da quantidade de mudas compradas. Os estudantes generalizaram novas expressões matemáticas que correspondem à função custo para cada cidade (Quadro 9). Sendo: Quantidade de mudas compradas (Qm), gastos com transporte um valor fixo para cada cidade e, a expressão matemática que resulta no custo total das mudas F(Qm).

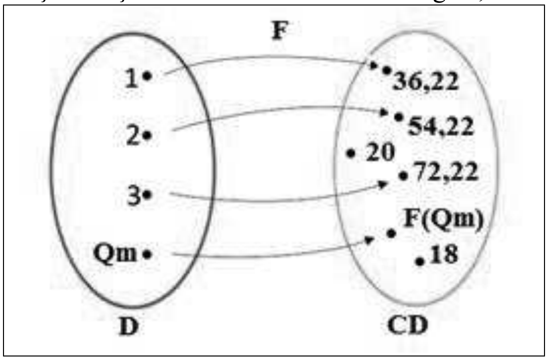
Quadro 9. Funções custo total para cada cidade.

Cantagalo	Laranjeiras	Guarapuava
$F(Qm)_C = 18{,}22 + 18 \times Qm$	$F(Qm)_L = 36{,}46 + 15 \times Qm$	$F(Qm)_G = 88{,}18 + 12 \times Qm$

Fonte: O autor – 2016

Há que esclarecer para os estudantes que uma função é uma relação (F) que associa elementos de dois conjuntos. No caso, são eles, quantidade de mudas e preço pago. Denomina-se a quantidade de mudas de domínio da função (D), e aos valores que podem ser pagos, contradomínio (CD), e ao valor correspondente a cada quantidade de mudas denomina imagem da função (Im). Exemplifica-se em forma de diagrama (Figura 8). Informa-se, para os estudantes, que de todos os elementos pertencentes ao (CD) apenas os que são correspondentes aos elementos do (D) são chamados de (Im).

Figura 8. Representação função custo de mudas em Cantagalo, em forma de diagrama.



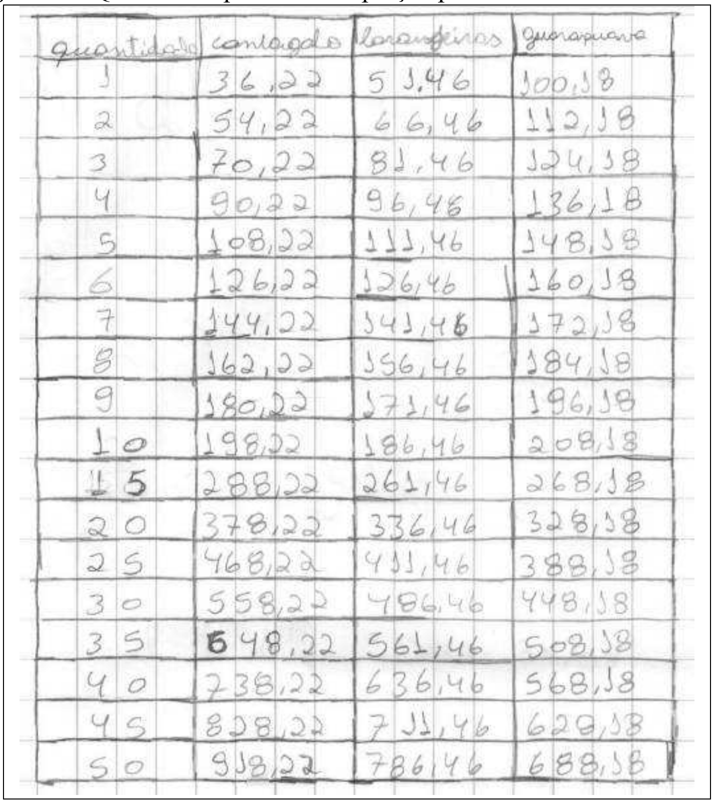
Fonte: O autor – 2016

Decorrente das discussões relacionadas ao problema 5 o professor propôs à turma o **problema 6:** Até quantas mudas torna-se mais viável comprar em cada cidade?

Na interação os estudantes destacam – *Temos que verificar, pois não é sempre que sai mais barato devido ao custo da viagem.*

Foi proposto, então, aos estudantes que construíssem um quadro com os resultados dos gastos com as mudas (Imagem 33).

Imagem 33. Quadro comparativo dos preços para as três cidades analisadas.



quantidade	cantagalo	laranjeiras	guarapuava
1	36,22	51,46	100,18
2	54,22	66,46	112,18
3	70,22	81,46	124,18
4	90,22	96,46	136,18
5	108,22	111,46	148,18
6	126,22	126,46	160,18
7	144,22	141,46	172,18
8	162,22	156,46	184,18
9	180,22	171,46	196,18
10	198,22	186,46	208,18
15	288,22	261,46	268,18
20	378,22	336,46	328,18
25	468,22	411,46	388,18
30	558,22	486,46	448,18
35	648,22	561,46	508,18
40	738,22	636,46	568,18
45	828,22	711,46	628,18
50	918,22	786,46	688,18

Fonte: Estudantes – 2016

Com o objetivo de verificar o entendimento dos estudantes dos dados contidos no quadro, foram questionados: *O que vocês podem considerar a partir do quadro construído?*

Os estudantes perceberam que até 6 mudas é mais econômico comprar em Cantagalo,7 mudas é mais econômico comprar em Laranjeiras, e a partir de 20 mudas é mais econômico em Guarapuava.

Após os estudantes concluírem todos os cálculos, levou-se, para a sala de aula, um computador para apresentar o *software* Excel, mostrando os comandos para introduzir uma função e que, depois de inserida a função com apenas um click é possível calcular todos os valores que os estudantes haviam demorado para determinar (Tabela 1).

Tabela 1. Custo em relação à quantidade de mudas compradas.

RELAÇÃO CUSTO POR QUANTIDADE MUDAS			
MUNICÍPIO	CANTAGALO	LARANJEIRAS	GUARAPUAVA
Função	f(Qm)=18,22+18*Qm	f(Qm)=36,46+15*Qm	f(Qm)=88,18+12*Qm
Quantidade			
1	36,22	51,46	100,18
2	54,22	66,46	112,18
3	72,22	81,46	124,18
4	90,22	96,46	136,18

5	108,22	111,46	148,18
6	126,22	126,46	160,18
7	144,22	141,46	172,18
8	162,22	156,46	184,18
9	180,22	171,46	196,18
10	198,22	186,46	208,18
11	216,22	201,46	220,18
12	234,22	216,46	232,18
13	252,22	231,46	244,18
14	270,22	246,46	256,18
15	288,22	261,46	268,18
16	306,22	276,46	280,18
17	324,22	291,46	292,18
18	342,22	306,46	304,18
19	360,22	321,46	316,18
20	378,22	336,46	328,18
21	396,22	351,46	340,18
22	414,22	366,46	352,18
23	432,22	381,46	364,18
24	450,22	396,46	376,18
25	468,22	411,46	388,18
26	486,22	426,46	400,18
27	504,22	441,46	412,18
28	522,22	456,46	424,18
29	540,22	471,46	436,18
30	558,22	486,46	448,18
31	576,22	501,46	460,18
32	594,22	516,46	472,18
33	612,22	531,46	484,18
34	630,22	546,46	496,18
35	648,22	561,46	508,18
36	666,22	576,46	520,18
37	684,22	591,46	532,18
38	702,22	606,46	544,18
39	720,22	621,46	556,18
40	738,22	636,46	568,18
41	756,22	651,46	580,18
42	774,22	666,46	592,18
43	792,22	681,46	604,18
44	810,22	696,46	616,18
45	828,22	711,46	628,18
46	846,22	726,46	640,18
47	864,22	741,46	652,18
48	882,22	756,46	664,18
49	900,22	771,46	676,18
50	918,22	786,46	688,18
Variação dos preços entre os municípios analisados no total das 50 mudas			
Guarapuava e Cantagalo			230,04
Laranjeiras e Cantagalo			131,76
Guarapuava e Laranjeiras			98,28

Fonte: O autor – 2016

Plantio das mudas frutíferas e considerações finais quanto à atividade desenvolvida

Depois de feitas e adubadas as covas para o plantio das mudas, arrecadadas as contribuições dos funcionários e, também passado o tempo de carência de 60 dias da adubação, coube ao professor se deslocar até Guarapuava e comprar as mudas. No dia 03 de agosto nos reunimos com os estudantes na parte da manhã e foram plantadas todas as mudas. O momento do plantio pode ser verificado na Figura 9.

Figura 9. Momento do plantio das mudas frutíferas

Ao finalizar as atividades, os estudantes foram interrogados quanto ao que esperavam quando iniciados os trabalhos com o tema pomar na escola, a respeito dos conteúdos matemáticos e o que podiam expressar ao finalizar. As manifestações impressionaram, pois afirmaram que não esperavam que no decorrer da atividade fossem aparecer tantos conteúdos matemáticos, como afirma o estudante E1 – *eu pensava que iríamos apenas comprar as mudas, fazer os buracos e plantar, eu não esperava trabalhar com tanta matemática, agora percebo que matemática está em tudo mesmo [sic].* E ainda, quando questionados quanto à preferência entre a forma tradicional de estudar e a mediada pela metodologia da Modelagem Matemática, afirmaram preferir a Modelagem, e destacam – *Com Modelagem sabemos o porquê estamos estudando os conteúdos matemáticos. O que aprendemos tem uma aplicação na prática. Não ficamos só trancados na sala de aula fazendo cálculos e mais cálculos, sem saber para o que é útil [sic].*

4.4 Análise dos dados coletados

A análise dos dados, nessa etapa da pesquisa, apresenta-se sob dois pontos de vista: do professor/pesquisador e dos estudantes participantes das experiências. Em relação ao professor que vivencia a prática da Modelagem e realiza reflexões sobre sua postura, diante de algumas atitudes como, por exemplo, compartilhar o processo de ensino e aprendizagem e desenvolver ações distintas daquelas praticadas quando promovia um ensino de matemática da forma mais usual. A reflexão está embasada nos dados coletados junto aos estudantes e consiste nas suas produções e manifestações individuais e dos grupos durante a realização das atividades descritas.

Em relação aos estudantes destacam-se aspectos relativos à conduta durante a realização das atividades, manifestações, as ações com os grupos, os diálogos entre estudantes, e, estudantes e professor a partir dos excertos contidos nas descrições, depoimentos escritos entre outros. Ainda, como ponto da análise estão consideradas as produções dos estudantes, em relação à matemática e outros conhecimentos envolvidos, bem como suas manifestações em relação à participação nas atividades desenvolvidas.

4.4.1 Das ações do professor pesquisador

A Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (1992) rompe com a forma mais tradicional de deflagrar o ensino. Quando se propõe compartilhar o ensino, o professor pode, em muitos momentos, sentir-se frágil, uma vez que intencionalmente deixa a forma usual de ensinar, em que o professor determina o assunto a ser estudado. É de sua decisão, de seu livre arbítrio. O professor centraliza as ações de ensino, tais como: determina o conteúdo a ser ensinado, bem como a forma de abordagem que, mais usualmente consiste em explicar o conteúdo, desenvolver alguns exercícios e solicitar aos estudantes uma lista de exercícios relativos ao assunto abordado, e analogamente procede a avaliação.

A concepção de Modelagem Matemática assumida nessa investigação parte de dois princípios: o primeiro é que o tema a ser estudado parte do interesse dos estudantes, assim a escolha dos temas das experiências vividas compete aos estudantes. Essa atitude do professor em compartilhar o tema a ser estudado evidencia uma postura diferenciada que comporta o ouvir os estudantes, incentivar as discussões entre eles e, na primeira experiência revela também a coragem para enfrentar o desafio, uma vez que não se tínha vivência com essa metodologia.

Os temas propostos para as atividades apresentaram um aspecto incomum no ensino de Matemática, o trabalho a partir de temas de escolhas dos estudantes: a produção de leite, os impostos e o pomar na escola. Esses temas tiveram como foco de interesse as situações vividas pelo cotidiano das famílias dos estudantes e dos próprios estudantes. O fato de se permitir abrir mão de uma forma de conduzir o ensino, depois de tantos anos introjetando e consolidando uma prática educativa distinta, denota uma mudança de atitude, pois que, mesmo causando no professor/pesquisador alguma insegurança, no início, mostra que na medida em que o trabalho se desenvolve, percebe-se a importância de dar liberdade aos estudantes e deixar que se manifestem, discutam, e se organizem.

Além das ações de explicar e elucidar, empregadas nas aulas usuais de matemática, com a Modelagem o professor estabelece a mediação entre o conhecimento dos estudantes nos grupos e o conhecimento já estabelecido, com ênfase nos saberes já assimilados pelos estudantes. Na dinâmica da sala de aula, muitas vezes o professor é um problematizador (Burak e Aragão 2012) como, por exemplo, quando propõe aos estudantes resolver uma situação-problema para explicar a questão de porcentagem, ou quando questiona no propósito de incentivar a discussão e a argumentação, conforme excerto: *então, com base no que vocês leram, se não tivesse imposto sobre os produtos, no caso do carrinho de bebê, o valor pago seria de R$ 752,53?[sic].* Quando desafia os estudantes a compararem preços de dois produtos. Ou, ainda quando propõe aos estudantes: *até quantas mudas torna-se mais viável comprar em cada cidade?* Problema este, proposto pelo professor mediante a afirmação dos estudantes durante a análise crítica da solução do problema que estabeleceu o local, entre as três cidades analisadas, que seria mais viável para a compra das mudas. Quando questionados se para comprar 5 mudas seria mais viável em Guarapuava, responderam: *Temos que verificar, pois não é sempre que sai mais barato devido ao custo da viagem.*

Dessa forma, as ações do professor de problematizar, relativizar, em muitas ocasiões, como mostra um excerto na discussão dos estudantes quando chama a atenção para o fato de que num governo as decisões, muitas vezes, contra os interesses da população são tomadas pelo órgão executivo, mas conforme a legislação vigente aprovada em órgão legislativo. Assim, as ações do professor, nessa prática educativa, passam a ter um caráter relevante na dinâmica do ensino, proporcionada pela Modelagem Matemática.

Outro ponto a destacar diz respeito ao preparo do professor para desenvolver o trabalho utilizando a Modelagem Matemática, como uma metodologia do ensino. Como foi apontado na revisão da literatura, quando referenciado Kaviatkovski (2012), embora esta metodologia possibilite romper com o ensino da forma tradicional, a maioria dos professores não tem segurança para aplicar em sala de aula. O professor somente vai buscar um melhor preparo a partir do momento em que decidir superar a forma tradicional de ensinar matemática em sala de aula e desenvolver as próprias experiências com Modelagem

Matemática. Cabe ao professor não desistir diante dos primeiros obstáculos que aparecem, mas persistir e comprovar o quão mais significativas se tornarão suas aulas.

Essas atitudes evidenciam uma mudança de postura, na forma de conceber a educação o ensino e a aprendizagem.

4.4.2 Das ações e envolvimento dos estudantes

Na concepção de Burak (1992) a Modelagem Matemática oportuniza a formação de estudantes autônomos com capacidade para pensar, refletir e encontrar a melhor solução para os problemas rotineiros com que se deparam na vivência diária. Nesse aspecto, as atividades desenvolvidas pelos estudantes, em sala de aula, potencializam suas ações, como indivíduos integrantes da sociedade, com pensamento crítico e com capacidade de decisão.

No trabalho com Modelagem Matemática, a partir dos primeiros esclarecimentos a respeito da metodologia, os estudantes, diante da possibilidade da escolha do tema, de imediato se sentem empolgados e partícipes do processo de ensino. Tal percepção pode ser creditada à possibilidade de opinarem e contribuírem para a decisão sobre o tema a trabalhar. Nessa primeira etapa observou-se estudantes exercitando a capacidade de argumentação para defender seus interesses, opinando sobre a escolha, o que se observa nos excertos a seguir:

E2: *Vamos estudar sobre produção de leite, pois podemos até ir visitar alguma propriedade para aprender mais [sic].*

E12: *Pelo menos, se estudarmos sobre produção de leite, vamos poder usar alguma coisa que aprender nas nossas propriedades [sic].*

E5: *Como lá na casa temos treze vacas e entregamos leite, eu sei bastante sobre isso, e se precisar de alguma coisa a mais posso até perguntar para o pai, ele sabe muito. Quando tem algum animal doente ele mesmo sabe que vacina aplicar, até eu já aprendi um pouco, só de ajudar, depois que a vaca cria ele sempre aplica uma vitamina ferro [sic].*

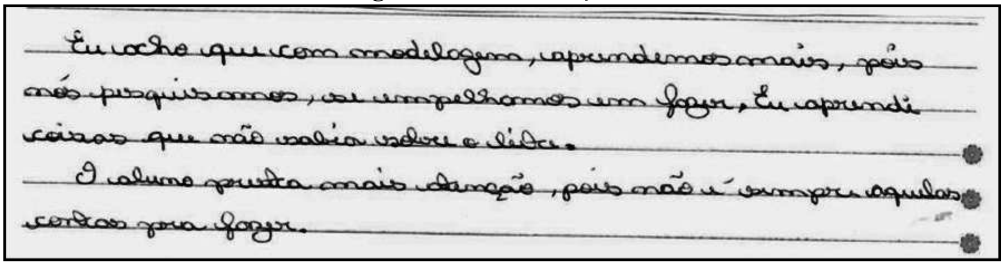
E14: *Vamos estudar alguma coisa mais útil, por exemplo, a horta orgânica que vamos construir com o projeto de ciências, uma coisa que é de interesse do colégio todo, pois com esse projeto iremos produzir verduras, sem agrotóxico, para a nossa merenda [sic].*

E8: *Como a horta já será construída, por que não trabalhamos em outra coisa que ainda não temos no colégio, eu estava aqui pensando, vamos fazer um pomar, pensem!!! Nós termos frutas produzidas no colégio [sic].*

Quando os estudantes percebem que seu ponto de vista é considerado e que são ouvidos, até os tímidos contribuem nos diálogos. Isso se apresenta como um diferencial da Modelagem, pois nas aulas em que predomina a forma tradicional de ensinar matemática dificilmente colaboram, porque esperam que o professor esclareça todas as indagações e determine o que devem executar.

A pesquisa exploratória constitui-se um momento rico para os estudantes que adquirem conhecimentos variados sobre o tema investigado, desenvolvem a autonomia e a capacidade de pesquisar o que lhes gera indagações. Como menciona o estudante 5 (Imagem 34):

Imagem 34. Considerações E 5.



Eu acho que com modelagem, aprendemos mais, pois nós pesquisamos, se empenhamos em fazer, Eu aprendi coisas que não sabia sobre o leite.

O aluno presta mais atenção, pois não é sempre aquelas contas para fazer.

Fonte: Estudantes – 2015

Em cada tema escolhido são vários os questionamentos sobre o que pesquisar e onde pesquisar. O conhecimento adquirido no cotidiano é comumente mencionado como, por exemplo: *meu pai falou que as melhores vacas para produzir leite são as holandesas, mas precisam de cuidados especiais, pois adoecem mais facilmente e devem ser mais medicadas.* Complementam, ainda *que embora produzam mais, dão maior despesa.* Mostram a importância da sua vivência quando expressam: *E tem também as Jérseis, produzem um pouco menos, em contrapartida são mais resistentes.* Afirmações desse tipo mostram que os estudantes disseminam seus objetivos para a família, os pais se sentem honrados em poder contribuir com os interesses dos filhos e, esses ao compartilhar com os colegas os conhecimentos dos pais podem discutir a visão de cada família, pontos concordantes e discordantes.

A possibilidade de sair do ambiente rotineiro de sala de aula, para uma pesquisa na biblioteca, na *internet* e até mesmo no material trazido de casa faz com que os estudantes interajam nos grupos e entre os grupos, comparando e compartilhando o material encontrado por cada um.

Nas experiências desenvolvidas constatou-se que, nos primeiros trabalhos com a metodologia da Modelagem, era comum o professor ser bastante solicitado, pois no sistema de ensino no qual os estudantes estão submetidos, ainda é o professor a fonte de todo o conhecimento, é aquele que lhes tira todas as dúvidas, determina o que vai ou não ser transmitido. De antemão está tudo previsto e determinado, até mesmo as interações e as dúvidas que surgirão são esperadas.

A falta de autonomia inicial dos estudantes no trabalho com a Modelagem reflete de forma cristalina os efeitos danosos da prática tradicional de ensino que faz com que os estudantes, nas primeiras pesquisas diante de um computador ou na biblioteca, sintam-se ineficazes e passivos e perguntem: *professor o que tenho que pesquisar?* Esperam que o professor lhes diga tudo. Indagações desse tipo foram respondidas com novos questionamentos: *Qual é o interesse de vocês? O que vocês querem saber sobre o tema? Quais são suas dúvidas?*

No trabalho com modelagem matemática a previsibilidade torna-se quase que impossível, pois no encaminhamento de cada atividade, os dados coletados e os problemas construídos pelos estudantes determinam e norteiam o caminho a ser seguido. Portanto, na Modelagem Matemática, inversamente ao ensino tradicional, os estudantes recebem do professor mais questionamentos, do que respostas prontas e acabadas. Esses questionamentos aliados ao interesse despertado pelo tema, o trabalho e a interação intra e intergrupos que possibilitam o desenvolvimento da capacidade de autonomia e formação crítica de estudantes são incentivados na metodologia da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Também as etapas do levantamento e da resolução dos problemas foram marcadas, no início, por um grande número de solicitações do professor, nos diversos grupos. Os estudantes esperavam que o professor lhes mostrasse o caminho a seguir e apontasse o conteúdo matemático necessário em cada resolução, antes mesmo de pensarem em alguma estratégia ou possibilidade. Essa característica percebida nos estudantes ao adotar a Modelagem, mostra os efeitos lesivos de uma prática anterior centrada no professor, quando conduz uma formação de estudantes habituados a receberem tudo pronto, restando a eles apenas seguir os modelos, apresentados pelo professor ou livro sem a necessidade de raciocinar sobre o que estão trabalhando e sem questionamentos.

No início do trabalho utilizando a Modelagem essas dificuldades se fizeram presentes, mas foram, passo a passo, superadas, a partir de intervenções feitas pelo professor/pesquisador quando era indagado pelos estudantes, como explicado no diálogo a seguir:

Es: *Professor, o que faremos agora? Como resolvemos esse problema?*

PP: *O que vocês acham que podem fazer? Encontrem no grupo um meio para a resolução. Caso não consigam busquem auxílio de colegas de outros grupos.*

De imediato não receberam respostas prontas, mas sugestões de encaminhar a questão feita. Dessa forma, por conta própria, os estudantes, iniciam as discussões no grupo e com os demais grupos em busca de uma forma para resolver os problemas levantados. Em alguns momentos,os problemas encontrados por um grupo específico foram levados ao conhecimento da sala toda para que, em conjunto, chegassem à solução almejada, conforme o excerto: *Quando o Grupo 4, tenta calcular a expressão,* e escreve no quadro, 3×84+2×85+95+91*, utilizando duas calculadoras diferentes, encontram dois resultados, alguém sabe o porquê dessa diferença?*

O G2 contribui: *Nós também estávamos utilizando uma calculadora simples e o resultado não fechava, dava muito alto, pois são sete parcelas somadas menores que 100, logo deveria dar menos que 700 e dava mais quando fazíamos a multiplicação junto com a adição. Resolvemos fazer primeiro as multiplicações, anotar o resultado. Depois somamos tudo. Ai sim fecha.*

Ainda, quando os estudantes realizavam as medições nos espaços destinados ao plantio do pomar, percebeu-se alguns estudantes com dificuldade de fazer medidas com a fita métrica, destacaram que nunca tinham utilizado, entretanto com a interação nos grupos fez com que conseguissem utilizar o instrumento. Muitas vezes, nas aulas de matemática de forma tradicional, quando se trata de medidas, deixa-se passar despercebida a necessidade de trazer para a sala de aula instrumentos de medições para que os estudantes manuseiem e realizem medições, pois há fixação apenas em falar sobre e mostrar exemplos nos livros textos. Esse fato evidencia que os estudantes que não possuem, de antemão, um conhecimento de instrumentos de medição, continuam tendo as mesmas dificuldades. Com a atividade de modelagem os estudantes desenvolveram ações e com instrumentos de medições compreenderam, na prática, como tirar medidas.

Após a interação entre os estudantes toca ao professor mediar e guiar as intervenções e os apontamentos, com atenção a todas as opiniões dos estudantes, para sistematizar os conhecimentos e oferecer esclarecimentos consistentes. Como é destacado por Klüber e Burak (2008, p.23) em nível de Educação Básica, com vistas à resolução dos problemas os "[...] conteúdos devem ser ministrados sob a forma de unidades de conteúdo, não simplesmente o conteúdo necessário à resolução.” Embasado neste posicionamento e ao finalizar o desenho dos espaços destinados ao pomar, os estudantes foram questionados quanto ao nome e à soma dos ângulos internos do polígono formado, recordaram que se o polígono tem 6 lados é um hexágono, mas quanto aos ângulos internos, de imediato, não souberam responder. Mas, os encaminhamentos e as ações adotadas pelo professor/pesquisador, enquanto mediador, oportunizaram aos estudantes generalizar uma forma para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

Ao finalizar as atividades os estudantes se sentiram mais seduzidos pela Matemática e pela Modelagem Matemática, o que é verificado em algumas considerações escritas pelos estudantes, que serão abordadas e discutidas a seguir.

Nos depoimentos percebe-se, claramente, o posicionamento da estudante E16, que destaca as atividades de modelagem matemática como motivadoras e que foi o trampolim que despertou seu interesse pela matemática, pois percebeu a matemática presente nas várias situações ao seu redor.

Estudante E16: *Eu não gosto muito de matemática, mas a partir desse ano comecei a me interessar um pouco mais. O trabalho de matemática com modelagem foi legal, pudemos aprender a correr atrás, pesquisamos e descobrimos que não é apenas através dos métodos tradicionais que podemos aprender* (Anexo 4).

A estudante E8, manifesta ter gostado muito das atividades que envolveram modelagem matemática e espera trabalhar novamente com a metodologia no próximo ano. “*Eu achei muito bom este trabalho de modelagem. Achei que deste modo é muito melhor de aprender matemática e muito mais fácil. Gostei muito e espero que ano que vem tenha mais trabalhos assim” [sic]* (Anexo 5).

Já o estudante E7, destaca que com a modelagem matemática foi possível aprender mais matemática que lhe será útil em trabalhos na propriedade dos pais. E também espera que no próximo ano de estudos, volte a trabalhar com atividades de modelagem. *“Achei bom trabalhar com modelagem, porque estudamos o que podemos aplicar em nossa propriedade. Foi mais fácil estudar e aprender com essa forma diferenciada. Espero que ano que vem tenhamos mais trabalho de modelagem”* (Anexo 6).

O estudante E14 deixa clara sua preferência em trabalhar com a modelagem, percebe maior empenho da turma na realização das atividades, e classifica as aulas de forma tradicional como enjoativas. Este aluno sente mais gosto em estudar matemática mediada pela modelagem. *"O trabalho com modelagem é bem melhor porque não é enjoativo como os outros trabalhos tradicionais. E a turma se empenha mais para estudar"* (Anexo 7).

A estudante E3 também se manifesta favorável às atividades de modelagem, por estudar a matemática a partir de sua realidade. Entende as aulas tradicionais como importantes, mas destaca que com a modelagem os estudos tornam-se mais fáceis e em consequência se aprende mais. Talvez não seja mais fácil, mas entende-se que com a modelagem a estudante vê sentido e significado no que estuda. "*O trabalho de Modelagem foi bom para os estudos, pois muitas pessoas pensam que, por exemplo, numa fazenda de produção de leite não há matemática, mas se estudar e se informar no assunto surgem muitos conteúdos matemáticos. Em relação à Modelagem Matemática: As aulas como a de modelagem matemática facilita os estudos e aprendemos mais"* (Anexo 8).

Por parte dos estudantes, as aulas de matemática, mediadas pela metodologia da Modelagem Matemática, tornam-se mais atrativas. Muitos afirmam que não gostavam da matemática, mas que com Modelagem Matemática passaram a se identificar mais com esta área do conhecimento.

Diante das manifestações dos estudantes, ao se finalizar um ciclo de atividades com a modelagem, fica-se motivado a iniciar novas atividades. Ainda, não se está bem preparado, mas esta preparação consolidar-se-á no decorrer de novas atividades. A cada atividade realizada, amplia-se a forma de conceber a metodologia e se compreende os resultados positivos trazidos pela Modelagem na Educação como uma metodologia de ensino e com vistas para a aprendizagem de Matemática na Educação Matemática.

Considerações gerais

Após muitas leituras sobre a metodologia da Modelagem Matemática na Educação Matemática considerávamo-nos prontos para desenvolver trabalhos em sala de aula. Quando decidimos iniciar o trabalho com a metodologia da Modelagem Matemática na Educação Matemática, compreendemos e tomamos consciência de que ainda não estávamos plenamente preparados, pois uma coisa é imaginar a prática a partir das leituras de artigos, dissertações e teses e conversas, outra é a vivência dessa metodologia. Assim, percorremos o caminho e compreendemos com clareza que somente se aprende fazer modelagem fazendo-a.

Com base nas experiências realizadas assegura-se que, o professor somente se prepara para trabalhar com essa nova metodologia, a partir do momento em que supera o posicionamento de seguir um roteiro estabelecido por um planejamento feito no início de cada ano letivo, no qual tudo está predeterminado, sequência de conteúdos e lista de problemas e tendo o livro didático como direcionador das ações. O trabalho com a Modelagem Matemática na Educação Matemática e na concepção assumida coloca por terra as tradições que a escola, ainda insiste em manter, tais como: o planejamento fictício e ilusório, baseado em um estudante ideal, que dificilmente se encontra em sala de aula.

O trabalho, com metodologias mais abertas, no caso a modelagem matemática, promove os estudantes de objetos a sujeitos da construção do conhecimento que imprime uma dinâmica diferente à aula e incentiva e estimula a busca de soluções próprias promovendo a mobilização do conhecimento construído.

Trabalhar com os estudantes a modelagem matemática, de forma efetiva exige do professor uma mudança de postura, exige leituras e fundamentações que embasem de forma consistente e coerente a sua prática. Se o professor insistir em realizar uma prática utilizando a modelagem e não tiver um preparo adequado sob o ponto de vista das teorias da aprendizagem, de uma epistemologia do conhecimento, de processos de ensino com vistas à aprendizagem, continuar-se-á, ainda por muitos anos, somente vendo a modelagem matemática como uma tendência, mas ela não será incorporada de fato na prática docente.

Quanto à questão dessa investigação: o que se mostra, em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, a partir de atividades de Modelagem na Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica? E quanto ao objetivo geral, pelo qual se apontou as implicações pedagógicas e científicas que decorrem da adoção da Modelagem Matemática na Educação Matemática, em relação ao ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental da Educação Básica: o trabalho com a Modelagem na perspectiva assumida apresentou-se também novo para o pesquisador, pois as leituras de dissertações e teses, bem como de artigos que falam sobre a prática com a modelagem mostram-se apenas descritivos com raros trabalhos em que se percebe o desenvolvimento, a apresentação e reflexão sobre o conteúdo matemático e outros presentes em um tema em estudo.

Outro ponto evidenciado nessa investigação foi que, de início, os estudantes se mostraram desconcertados uma vez que mesmo partindo de tema de seu interesse aparentavam-se apáticos, pois não sugeriam, não tinham convicções, mas esperavam que o professor lhes desse as coordenadas a seguir, sem mesmo ter conversado no grupo. Entretanto, é importante ressaltar que após a mediação do professor eles tomaram gosto pelas atividades. Tal constatação decorre dos debates nos grupos, nas questões individuais ou do grupo sobre o conteúdo, sobre os assuntos, ressaltando outros aspectos identificados no interior de cada grupo.

Evidencia-se a adoção de uma nova postura do professor, pois que, em muitas ocasiões, em vez de dar a respostas, formulava questões norteadoras de modo que fossem analisando as sugestões e os desafios do professor que age como mediador, entre o conhecimento já estabelecido e o conhecimento dos estudantes. Na investigação realizada ficou evidenciada uma mudança de postura tanto do professor ao deflagrar o processo de ensino, como dos estudantes no desenvolvimento das atividades. Outro ponto importante ao longo das atividades foi a qualidade dos questionamentos por parte dos estudantes, bem como uma efetividade na aprendizagem dos conteúdos matemáticos e nas relações desses conteúdos com aspectos sociais vividos pelas próprias famílias dos estudantes. É, nesse contexto que os estudantes tornam-se mais ativos, sujeitos da produção de seu conhecimento na medida em que se percebem participantes do processo de ensino que os torna corresponsáveis pela sua aprendizagem, a partir de suas ações e interações seja na oportunidade de escolha do tema, seja na interação com os participantes do seu grupo e depois na socialização com os outros grupos, quando suas estratégias são examinadas em conjunto com outros estudantes e professor.

Assim, constata-se também uma mudança na postura do professor não agindo mais como o centralizador do processo, mas como o mediador, como é apontado por Burak e

Aragão (2012) na perspectiva de Educação Matemática, enquanto educadores matemáticos devemos "[...] propor aos estudantes situações que os desafiem para usarem de imaginação e criatividade, bem como para desenvolverem capacidades de expressar e registrar ideias e procedimentos, além de conjecturar, especular, levantar hipóteses e (com) prová-las" (p.80).

Isso fica ratificado pelas ações e encaminhamentos identificados nos diálogos descritos durante a realização das atividades, quando são encontradas expressões como: *Professor quando resolvemos a adição 3×84+2×85+95+91, os resultados das duas calculadoras não fecham.* Então, ao problematizar com questões tais como: *Como procederam na utilização da calculadora? Será que da forma com que utilizaram a calculadora se incorre em algum tipo de erro? Se fizessem inicialmente um tipo de operação e depois outro, como quando resolvem ou resolviam expressões aritméticas será que o resultado seria o mesmo*? Ou ainda: *Quando o Grupo 4 tenta calcular a expressão, e escreve no quadro 3×84+2×85+95+91, utilizando duas calculadoras diferentes, encontram dois resultados, alguém sabe o porquê dessa diferença?*

Portanto, ao explicar, orientar, incentivar a reflexão dos estudantes sobre determinada situação, colocar desafios, refletir, e identificar dificuldades mostra a importância dessas ações do professor relativizando, problematizando e desafiando seus estudantes.

Outro ponto a ser destacado, que ficou evidente durante a realização dessa investigação, foi em relação à própria metodologia da Matemática na Educação Matemática, quando ao se posicionarem os estudantes se manifestam com expressões tais como do estudante E7*: Achei bom, porque a gente usa tudo o que a gente pode usar na nossa própria propriedade*. Ou também como o manifestado pelo estudante E16: *O trabalho de matemática com modelagem foi legal, pudemos aprender a correr atrás, pesquisamos e descobrimos que não é apenas através dos métodos tradicionais que podemos aprender.* Alguns desses depoimentos são reveladores de que os estudantes, muitas vezes, dizem não gostar de matemática, mas quando são colocados frente a frente com situações que valorizam o seu modo de pensar, respeitam suas estratégias de pensamento, permitem o diálogo e partem de seus interesses, mostram-se mais interessados como no excerto de E16: *Eu não gosto muito de matemática, mas a partir desse ano comecei a me interessar um pouco mais.* Em relação à Modelagem manifestações como da estudante E3 que afirma: *O trabalho de Modelagem foi bom para os estudos, pois muitas pessoas pensam que, por exemplo, numa fazenda de produção de leite não há matemática, mas se estudar e se informar no assunto surgem muitos* *conteúdos matemáticos*. Ou ainda*: As aulas como a de Modelagem matemática facilita os estudos e aprendemos mais [sic]*. Isso comprova o que é explicitado por Burak e Martins (2015), quando colocam que por meio da Modelagem o estudante vê sentido e significado nos conteúdos estudados com satisfação pessoal em suprir necessidades de seu interesse, formando atitudes positivas em relação à Matemática.

Entre outros excertos manifestados pelos estudantes, fica destacada a importância pedagógica e científica da Modelagem pedagógica enquanto uma forma diferenciada de ensinar matemática, que rompe com a forma usual, valoriza o ser do estudante, favorece as interações e torna o estudante também corresponsável pela aprendizagem, uma vez que trabalha com situações de interesse individual ou do grupo. Cientificamente a importância no campo do ensino de Matemática é que a Modelagem Matemática na Educação Matemática rompe com o paradigma usual no ensino de Matemática, tal ruptura é de natureza epistemológica, pois com a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática se assenta sob um novo paradigma o das Ciências Humanas e Sociais, que envolve além da Matemática outras áreas que dão sustentação à Educação quais sejam: a Filosofia, a Sociologia e a Psicologia, entre outras.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. Blumenau – SC, v. 1, n. 1, p. 28-42, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. O conceito de função em situações de Modelagem. ***Zetetiké***. Campinas: v. 13, n. 23, p. 63-83, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Revista Bolema**, UNESP de Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 19 –35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, UFSC. Florianópolis – SC, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.

ANDRÉ, M.E. D. A. de. **Etnografia da prática escolar.** Série Prática Pedagógica. Campinas: Papirus, 1995.

_____. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 2005.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**: **revista** da UCSal. Salvador: Universidade Católica do Salvador, n. 4, p. 73- 80, 2004. Disponível em < http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/142008-11-01-12-27-33.pdf > acessado em 05/10/2015.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. ***Anais...*** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

______. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

______. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2006.

______. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. 3.Reimpressão. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática e implicações no ensino aprendizagem de Matemática**. Blumenau: Furb. 1999.

______. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, UFSC.

Florianópolis – SC, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. **Investigação qualitativa em educação. Portugal: Porto Editora**, p. 15-80, 1994.

BRASIL, Mistério da Educação e do Desporto. **PCNs: Matemática. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

BRITO, D. dos S. **Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças:** uma experiência de ensino com atividades de modelagem Matemática. Londrina – PR, 2013. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional da Universidade Estadual de Londrina) – UEL, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BURAK, D. **Modelagem Matemática**: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. Rio Claro, SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho-UNESP.

______. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino aprendizagem. Tese (Doutorado em educação) – FE/UNICAMP, Campinas, 1992.

______. Uma experiência com a Modelagem Matemática. **PRÓ-MAT**, Curitiba, v.1, p.32-47.1998.

______. Modelagem Matemática e a sala de aula. Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática – I EPMEM, 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

______.Modelagem Matemática:experiências vividas. **ANALECTA** Guarapuava, Paraná v. 6 no 2 p. 33-48 jul/dez. 2005.

______.Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. Blumenau – SC. v. 1, n. 1, 10-27. 2010.

BURAK, D.; ARAGÃO, R.M.R. **Modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.** 1.ed. Curitiba:CRV,2012.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. In: **Educação Matemática e Pesquisa**., São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

BURAK, D; MARTINS, M. A. Modelagem Matemática nos anos iniciais da Educação Básica: uma discussão necessária. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta-Grossa, v. 8, n. 1, 2015.

CALDEIRA, A. D. A modelagem matemática e suas relações com o currículo. In: IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática – CNMEM. **Anais...** Feira de Santana: UEFS – 1CD-ROM, 2005.

________. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, UFSC. Florianópolis – SC, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. São Paulo: Editora Ática, 1999.

D`AMBRÓSIO, U. Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo, **SUMMUS/UNICAMP** 1986.

FEYH, C. R. N. Modelagem Matemática na Educação do Campo. Dissertação de mestrado. Blumenau- SC, 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - PPGECIM) Universidade Regional de Blumenau- SC.

FRANCO, M.L.P.B. **Análise de conteúdo**. 4 ed. Brasília: Liber Livro, 2012.

KACZMAREK, D. **Modelagem no ensino da Matemática:** um viés na ação e interação do processo de ensino e aprendizagem. Ponta Grossa, PR 2014. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - PPGE. Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG.

KAVIATKOVSKI, M. A. de C. **A Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Ponta Grossa-PR, 2012. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - PPGE. Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 3, 2006. p. 302-310, 2006.

LÜDKE, M e ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGNUS, M. C. M.**Modelagem matemática em sala de aula:** principais obstáculos e dificuldades em sua implementação. 2012. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Cientifica e Tecnológica) – PPECT. Universidade Federal de Santa Catarina. UFSC.

NESPOLO, R. F.. **Uma proposta de ensino de Matemática para a Educação Básica.** Pato Branco-PR. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *Campus* de Pato Branco. UTFPR – Pato Branco.

OLIVEIRA, A. Etnografia e pesquisa educacional: por uma descrição densa da educação. **Educação Unisinos**, v. 17, n. 3, p. 271-280, 2013.

OLIVEIRA, C. L. de. Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. **Revista Travessias**, Cascavel – PR, v. 2, n. 3, p. 1-16, 2008.

PENTEADO D.R. **As práticas de Modelagem Matemática na Educação Básica do Estado do Paraná.** Ponta Grossa-PR, 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - PPGE. Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG.

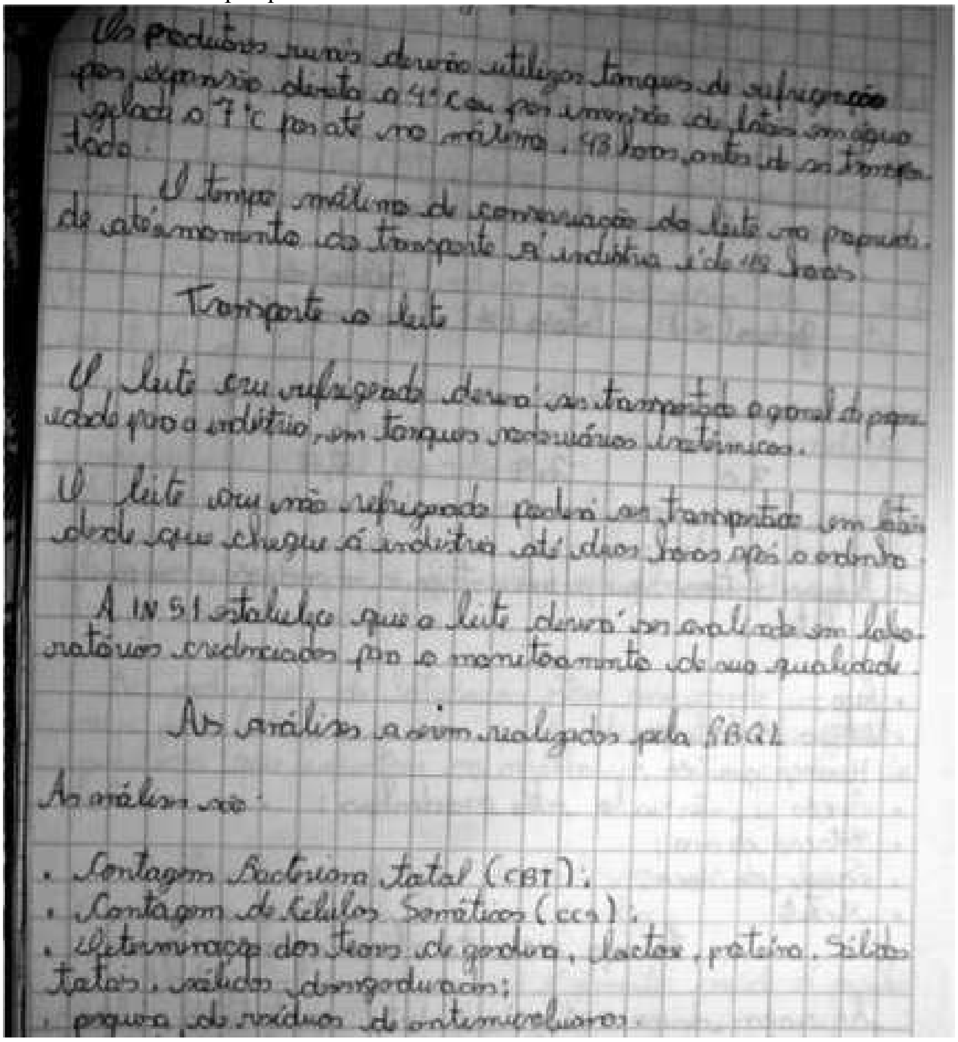
RODRIGUES. N. R. **Relações com o saber**: um estudo sobre o sentido da matemática em uma escola pública. São Paulo- SP, 2001, Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação Matemática) – PPEM. Pontifícia Universidade Católica – PUC.

SCHMITT. A. L. F. Modelagem Matemática no Ensino Fundamental: interesse em aprender matemática. Blumenau-SC, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - PPGECIM) Universidade Regional de Blumenau - SC.

SCHÖNARDIE, B. **Modelagem Matemática e introdução da função afim no ensino fundamental**. Porto Alegre – RS, 2011. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática). PPGEM. Universidade Federal do Rio Grande Do Sul. UFRGS.

Anexos

Anexo 1: Parte da pesquisa dos estudantes materializada em forma de texto.



Os produtores rurais deverão utilizar tanques de refrigeração por expansão direta a 4 °C ou por imersão de latões em água gelada a 7 °C por até no máximo 48 horas antes de ser transportado.

O tempo máximo de conservação do leite na propriedade até o momento do transporte à indústria é de 48 horas.

Transporte o leite

O leite cru refrigerado deverá ser transportado a granel da propriedade para a indústria, em tanques rodoviários isotérmicos.

O leite cru não refrigerado poderá ser transportado em latões desde que chegue à indústria até duas horas após a ordenha.

A IN 51 estabelece que o leite deverá ser avaliado em laboratórios credenciados para o monitoramento de sua qualidade.

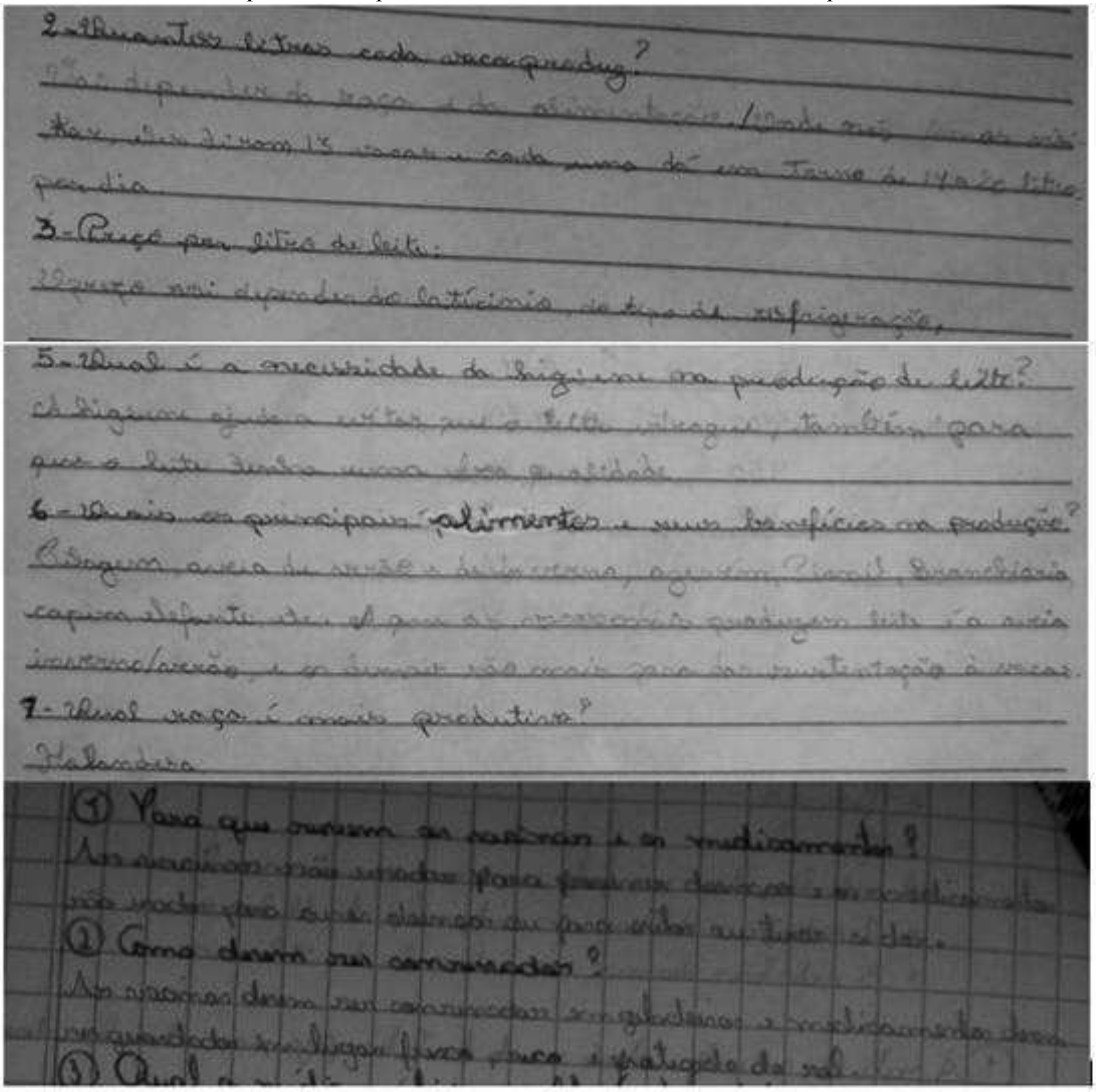
As análises são realizadas pela RBQL

As análises são:

- Contagem Bacteriana total (CBT);
- Contagem de Células Somáticas (CCS);
- Determinação dos teores de gordura, lactose, proteína, sólidos totais, sólidos desengordurados;
- pesquisa de resíduos de antimicrobianos.

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 2: parte da Pesquisa dos alunos materializada em forma de questionário.



2- Quantos litros cada vaca produz?

3- Preço por litro de leite:

O preço vai depender do laticínio, do tipo de refrigeração,

5- Qual é a necessidade da higiene na produção de leite?

A higiene ajuda a evitar que o leite estrague, também para que o leite tenha uma boa qualidade

6- Quais os principais alimentos e seus benefícios na produção?

7- Qual raça é mais produtiva?

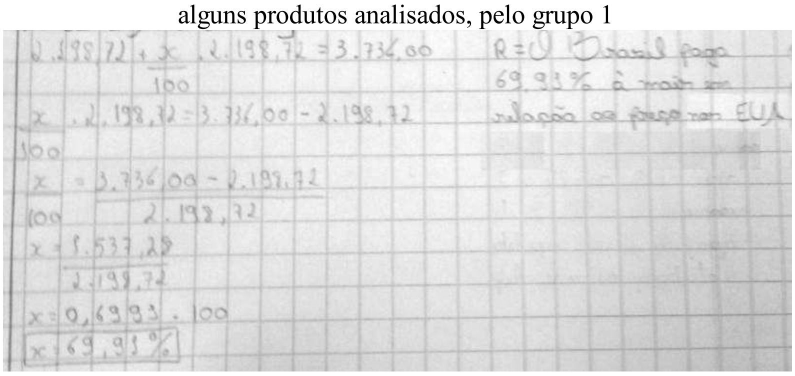
Holandesa

1) Para que servem as vacinas e os medicamentos?

2) Como devem ser armazenados?

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 3: Resolução do problema de quanto por cento é pago a mais, comparando Brasil e Estados Unidos, em alguns produtos analisados, pelo grupo 1



$2.198,72 + \frac{x}{100} \cdot 2.198,72 = 3.736,00$

$\frac{x}{100} \cdot 2.198,72 = 3.736,00 - 2.198,72$

$\frac{x}{100} = \frac{3.736,00 - 2.198,72}{2.198,72}$

$x = \frac{1.537,28}{2.198,72}$

$x = 0,6993 \cdot 100$

$\boxed{x = 69,93\%}$

R = O Brasil paga 69,93% à mais em relação ao preço nos EUA

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 4: Depoimento Estudante E16

O trabalho de matemática com modelagem foi legal, podemos aprender a correr atrás, pesquisarmos e descobrirmos que não é apenas através dos métodos tradicionais que podemos aprender.

Eu não gosto muito de matemática, mas apartir deste ano, comecei a me interessar um pouco mais.

VALEU, PROFESSOR SAMUEL

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 5: Depoimento Estudante E8

Eu achei muito bom este trabalho de modelagem. Achei que deste modo é muito melhor de aprender matemática e muito mais facil. Gostei muito e espero que ano que vem tenha mais trabalhos assim.

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 6: Depoimento Estudante E7

ACHEI BOM PORQUE AGENTE estuda tudo que a gente POSSA USAR no nossa Propria propriedade

É mais facil estudar e aprender de um jeito diferenciado, e espero que ano que vem te nenha mais trabalho como esses.

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 7: Depoimento estudante E14

O trabalho de modelage é bem melhor de trabalhar porque não é tam enjoativo como os outros trabalhos tradicionais. E a turma se espiram mais para fazer.

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 8: Depoimento Estudante E3

Eu achei que o trabalho de modelagem foi bom para os estudos pois muitas pessoas pensam que por escemplo numa fazenda de produção de leite não há matemática, mas se estudar e se informar no assunto surgem muitos conteúdos matemáticos.

As aulas com diferentes contas Também é importante para aprendermos cada vez mais, mas eu acho que aulas diferentes como a de modelagem matemática facilita os estudos e aprendemos mais.

Fonte: Estudantes – 2015

Anexo 9: Autorização direção escolar.

CARTA DE AUTORIZAÇÃO/ANUÊNCIA

Eu, Adelir Paupitz Diretor do Colégio Estadual do Campo de Cavaco município de Cantagalo-Pr, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL** sob responsabilidade do pesquisador Samuel Francisco Huf no Colégio Estadual do Campo de Cavaco município de Cantagalo-Pr. Para isto, serão disponibilizados ao pesquisador o espaço físico do colégio a biblioteca e a sala de informática.

Cantagalo-Pr 21de maio de 2015.

Adelir Paupitz

(nome completo do responsável e cargo ocupado no local onde a pesquisa será realizada)

ADELIR PAUPITZ
Dir... RG 7 950 134-4
... 771/14
DOE 9150 19/02/14

COLÉGIO ESTADUAL DO CAMPO DE CAVACO
ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
AV. PRINCIPAL, S/N - CAVACO - FONE (42) 9146-9687
E-mail: kglcavaco@seed.pr.gov.br
CEP 85160 - 000 - CANTAGALO - PARANÁ

ADELIR PAUPITZ
Diretor - RG 7 950 134-4
Res 771/14
DOE 9150 19/02/14

Anexo 10: Autorização Núcleo Regional de Educação de Laranjeiras do Sul.

Secretaria de Estado da Educação
Núcleo Regional de Educação de Laranjeiras do Sul
Chefia

CARTA DE AUTORIZAÇÃO/ANUÊNCIA

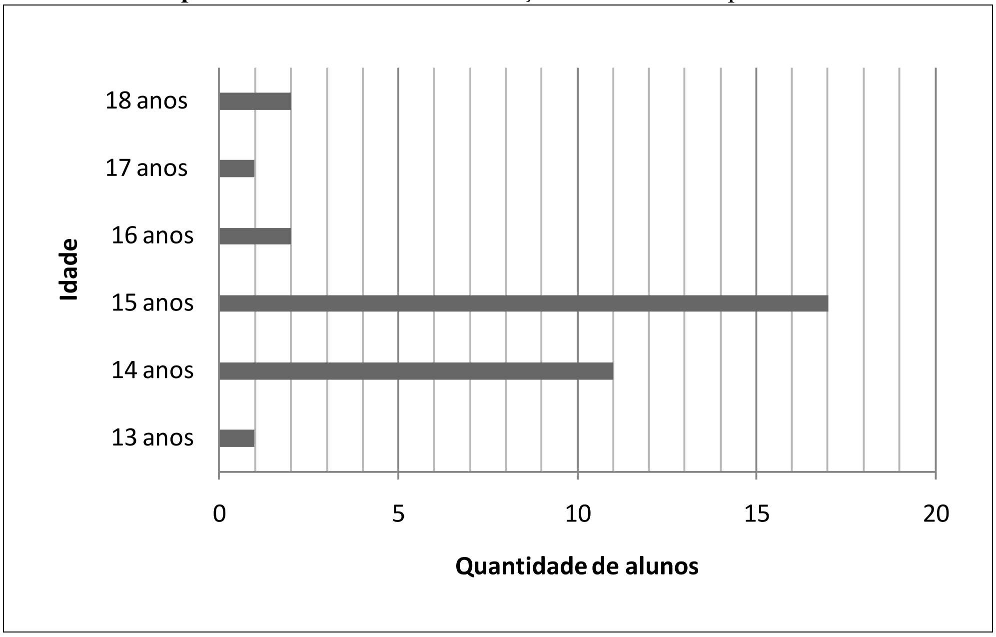
Eu, Eliza Regina Gemelli da Silva, Chefe do Núcleo Regional de Educação, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada Modelagem Matemática no Ensino Fundamental, Experiências Vividas sob responsabilidade do pesquisador Samuel Francisco Huf no Colégio Estadual do Campo deCavaco no município de Cantagalo. Para isto, serão disponibilizados ao pesquisador todo espaço físico do colégio.

Laranjeiras do Sul, 26 de junho de 2015.

Eliza Regina Gemelli da Silva/Chefe do NRE.

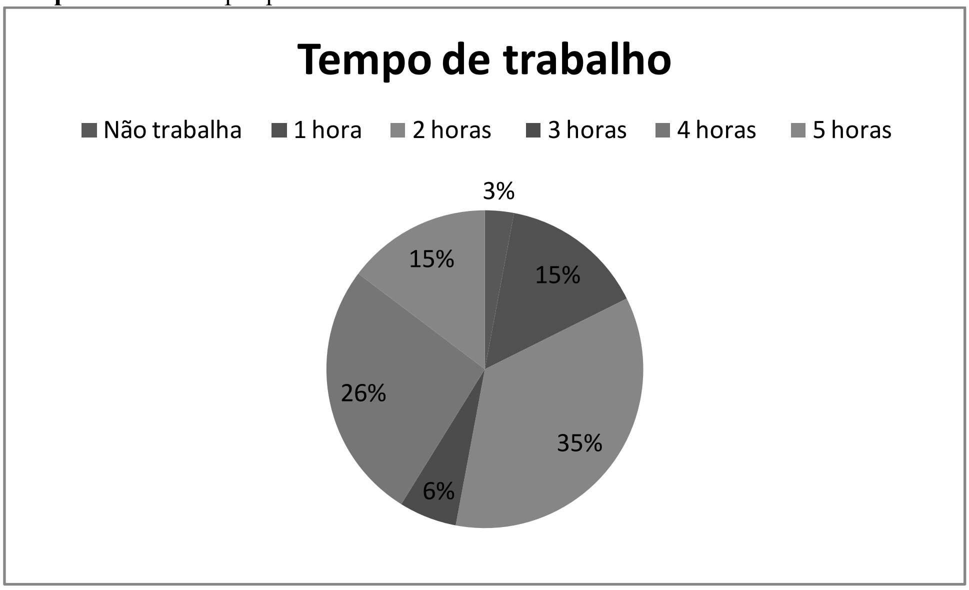
Apêndice

Apêndice 1: Gráfico da classificação dos estudantes por idade.



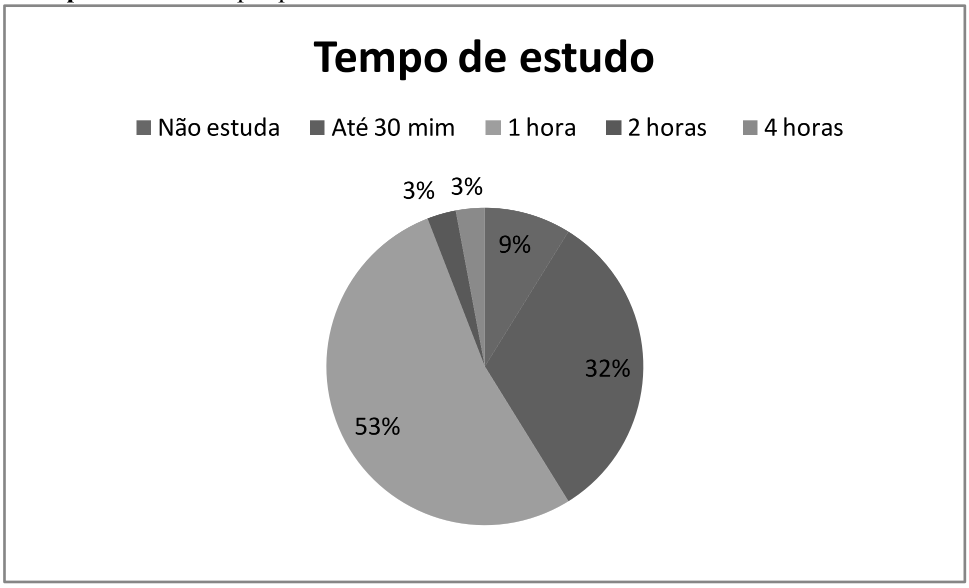
Fonte: O autor

Apêndice 2: Tempo que os estudantes destinam ao trabalho em contraturno escolar.



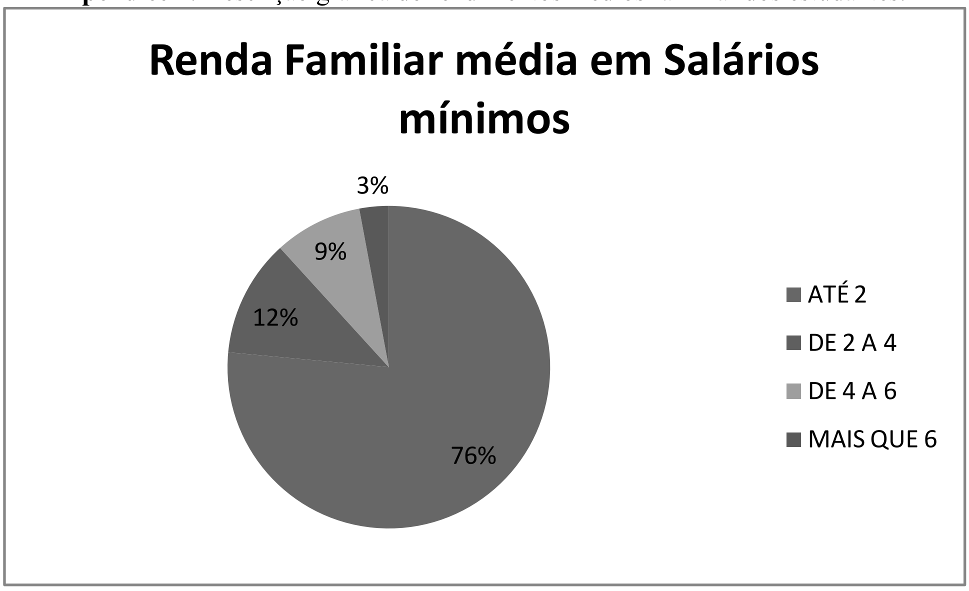
Fonte: O autor

Apêndice 3: Tempo que os estudantes destinam ao estudo em contraturno escolar



Fonte: O autor

Apêndice 4: Descrição gráfica do rendimentos médios familiar dos estudantes.



Fonte: O autor

Apêndice 5: Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) direcionado aos pais ou responsáveis.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE – UNICENTRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPESP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – COMEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) DIRECIONADO AOS PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezados pais ou responsáveis, ____

Você está sendo convidado(a) a autorizar seu filho(a) a participar da pesquisa MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL, sob a responsabilidade de Samuel Francisco Huf, que irá investigar as implicações que decorrem da adoção da Modelagem Matemática na Educação Matemática em relação ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental. A atividade com Modelagem Matemática parte do interesse dos estudantes e trabalha a partir de temas o que confere características interdisciplinar e transdisciplinar a essa metodologia. Busca tornar o ensino de Matemática mais dinâmico pelas ações dos estudantes, a partir das etapas propostas para os encaminhamentos das atividades. Possibilita aos estudantes o envolvimento através das experiências vivenciadas e da ligação com outras áreas do conhecimento.

1. PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA: Ao participar desta pesquisa seu filho(a) estará adquirido o conhecimento de como é desenvolvido e trabalhado uma atividade de Modelagem Matemática, seguindo as etapas do desenvolvimento da atividade proposta que são: Escolha do Tema; Pesquisa Exploratória; Levantamento do(s) Problema(s); A Resolução do(s) Problema(s) e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; Análise crítica da(s) solução(ões).

Lembramos que a participação de seu filho(a) é voluntária, você tem a liberdade de não querer que o mesmo participe, e que ele(a) pode desistir, em qualquer momento, mesmo após ter iniciado o desenvolvimento das atividades, sem nenhum prejuízo para o próprio .

2. RISCOS E DESCONFORTOS: Poderá trazer algum desconforto como o ausentar-se da sala de aula para a pesquisa exploratória. O tipo de procedimento apresenta um risco de seu filho(a) estar fora do ambiente familiar de sala de aula que será reduzido pela presença do professor que não se ausentará do processo. Se seu filho(a) precisar de alguma orientação por se sentir prejudicado por causa da pesquisa, ou sofrer algum dano decorrente da pesquisa, o pesquisador se responsabiliza pela assistência integral, imediata e gratuita possibilitando o retorno para a sala de aula.

3. BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados com o estudo são no sentido de possibilitar o desenvolvimento do gosto e do interesse em estudar conteúdos matemáticos, partindo da vivencia diária, adquirindo conhecimentos úteis para o desenvolvimento de seu/sua filho(a) na sociedade.

4. CONFIDENCIALIDADE: Todas as informações que o(a) Sr.(a) e seu/sua Filho(a) nos fornecerem ou que sejam conseguidas por observações e avaliações serão utilizadas somente para esta pesquisa. As respostas, dados pessoais e de imagem ficarão em segredo e o seu nome e nome de seu/sua Filho(a) não aparecerá em lugar nenhum dos questionários, vídeos gravados, arquivo de áudio e fichas de avaliação, nem quando os resultados forem apresentados.

5. ESCLARECIMENTOS: Se tiver alguma dúvida a respeito da pesquisa e/ou dos métodos utilizados na mesma, pode procurar a qualquer momento o pesquisador responsável.

Nome do pesquisador responsável: Samuel Francisco Huf.
Endereço: Vila Rural São Francisco,145 Cantagalo-Pr Cep: 85160-000
Telefone para contato: (42) 98807-9630
Horário de atendimento: Das 8 às 18 horas

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso o(a) Sr.(a) aceita que seu/sua filho(a) participem da pesquisa,tendo clareza não receberá nenhuma compensação financeira.

7. CONCORDÂNCIA NA PARTICIPAÇÃO: Se o(a) Sr.(a) estiver de acordo com a participação de seu filho(a) deverá preencher e assinar o Termo de Consentimento Pós-esclarecido que se segue, em duas vias, sendo que uma via ficará com o(a) senhor(a).
==

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a)___________________________, portador(a) da cédula de identidade___________________________, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelos pesquisadores, ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito do lido e explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO que seu/sua filho(a) _________________________________ participe voluntariamente desta pesquisa.

E, por estar de acordo, assina o presente termo.

Cantagalo, 25 de Agosto de 2015

____
Assinatura dos pais/ Ou Responsáveis

____
Assinatura do Pesquisador

Apêndice 6: Termo de assentimento para criança e adolescente (maiores de 6 anos e menores de 18 anos)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE – UNICENTRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPESP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – COMEP

Termo de assentimento para criança e adolescente (maiores de 6 anos e menores de 18 anos)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL** Seus pais permitiram que você participe.

Queremos saber como se mostra o ensino de Matemática, a partir das atividades realizadas com Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Fundamental da Educação Básica.

As crianças que irão participar desta pesquisa têm de 13 a 15 anos de idade.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será desenvolvida no Colégio estadual do Campo de Cavaco Município de Cantagalo-Pr onde as crianças estarão adquirido o conhecimento de como é desenvolvido e trabalhado, uma atividade, de Modelagem Matemática, seguindo as etapas do desenvolvimento da atividade proposta que são: Escolha do Tema; Pesquisa Exploratória; Levantamento do(s) Problema(s); A Resolução do(s) Problema(s) e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; Análise crítica da(s) solução(ões). Para isso, será desenvolvido pesquisas de campo, consultas no acervo da biblioteca e pesquisas online. O uso desses meios são considerados seguros, mas é possível ocorrer riscos devido estar fora da sala de aula. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones (42) 8807-9630 do pesquisador Samuel Francisco Huf.

Mas há coisas boas esperadas que aconteçam como possibilitar o desenvolvimento do gosto e do interesse em estudar conteúdos matemáticos, partindo de sua vivencia diária, adquirindo conhecimentos úteis para seu desenvolvimento na sociedade.

Se você morar longe do local, nós disponibilizaremos os seus pais o transporte, para também acompanhar a pesquisa caso seja necessário.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as crianças que participaram.

Quando terminarmos a pesquisa com os dados levantados e observados no desenvolvimento das atividades será apresentado uma dissertação ao curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO).

Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. Eu escrevi os telefones na parte de cima deste texto.

==

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Eu ____________________________________ aceito participar da pesquisa **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e que ninguém vai ficar furioso.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Cantagalo, ____de _________de __________.

_____________________________ Assinatura do menor

_____________________________ Assinatura do(a) pesquisador(a)