UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE, UNICENTRO-PR

MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR A PARTIR DE TRIÂNGULOS EPISTEMOLÓGICOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LIANE MARIA DA SILVA

GUARAPUAVA, PR

2022

LIANE MARIA DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR A PARTIR DE TRIÂNGULOS EPISTEMOLÓGICOS

Material apresentado para defesa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, vinculado à Universidade Estadual do Centro-Oeste.

Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez

Orientadora

GUARAPUAVA, PR

2022

Catalogação na Publicação
Rede de Bibliotecas da Unicentro

S586m

Silva, Liane Maria da

Modelagem Matemática: um olhar a partir de triângulos epistemológicos / Liane Maria da Silva. – – Guarapuava, 2022.

xiii, 90 f. : il. ; 28 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Área de concentração: Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, 2022.

Inclui Produto Educacional Aplicado intitulado: Modelagem Matemática: possibilidades para a sala de aula. 23 p.

Orientadora: Michele Regiane Dias Veronez

Banca Examinadora: Lourdes Maria Werle de Almeida, Joyce Jaqueline Caetano

Bibliografia

1. Modelagem Matemática. 2. Semiótica. 3. Triângulo epistemológico. I. Título. II. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

CDD 510

LIANE MARIA DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR A PARTIR DE TRIÂNGULOS EPISTEMOLÓGICOS

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 12 de setembro de 2022.

____
Prof.ª Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Centro-Oeste -Unicentro
Orientadora

____
Prof.ª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL
Membro titular externo

____
Prof. Dr. Joyce Jaqueline Caetano
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro
Membro Titular Interno

Guarapuava, PR.
2022

Dedicatória:

Honro aqui a Liane, pequenina, que aos 8 anos brincava de escolinha em meio a uma plantação de fumo. Seus sonhos se mantiveram vivos e me motivaram. Dedico este trabalho a ela.

AGRADECIMENTOS

A minha orientadora, profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez que se dispôs a me orientar e acompanhar com extrema paciência durante esta jornada. Obrigada por talvez mesmo sem saber, ter dado sentido a minha vida profissional.

às professoras Dra. Joyce Jaquelinne Caetano e Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida pelo tempo despendido a analisar e contribuir com a pesquisa. A vocês minha gratidão e admiração.

à minha família, pais e irmã, meus apoiadores durante todo momento. Foram tantos finais de semana que estive ausente não é mesmo? Mesmo quando estava de corpo presente muitas vezes não desfrutei verdadeiramente da companhia de vocês. Amo vocês! Obrigada por toda compreensão.

à todos os professores do PPGEN, pelos ensinamentos.

aos colegas do mestrado, em especial a Maricleusa, que acompanhou de perto todas minhas angústias no decorrer da pesquisa.

aos membros do GEPMEM, pelas valiosas contribuições, em especial a Thainá, com quem foram longas as conversas sobre Semiótica.

à todos que com um olhar, um gesto ou sorriso me deram forças e apoio para a realização deste trabalho.

Resumo

No estudo por nós empreendido entendemos que a Modelagem Matemática pode ser descrita como um conjunto de procedimentos e conceitos necessários à solução de um problema e que nesses procedimentos os alunos utilizam ou produzem signos. Assumimos que os signos, como instrumentos de comunicação, carregam informações relativas aos conhecimentos, daqueles que os produzem, acerca daquilo que o signo referencia. Além disso, pautadas nos pressupostos de Heinz Steinbring, consideramos os signos em associação com outros dois elementos: objeto/contexto de referência e conceito. Essa tríade é discutida nesta investigação a partir da denominação triângulo epistemológico. Com o propósito de discutir acerca da Modelagem Matemática a partir de triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, construímos triângulos epistemológicos de três atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de um 4° ano de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, na disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. A metodologia de pesquisa que embasa nossas opções metodológicas é a abordagem qualitativa. As conexões estabelecidas entre signos, contexto de referência e conceito elucidam que os signos produzidos pelos alunos fazem alterar e modificar os contextos de referência, ao passo que os alunos avançam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, e provocam a emergência de conceitos diversos. Esse movimento retratado nos triângulos epistemológicos traz à tona o caráter dinâmico da Modelagem Matemática. Além disso, o olhar para os signos em associação com os outros dois vértices do triângulo epistemológico: contexto de referência e conceito, sugere que a leitura semiótica de uma atividade de modelagem matemática se constitui em uma junção de triângulos epistemológicos. Ponderamos que esses triângulos revelam que conceitos matemáticos, em atividades de modelagem matemática, se apresentam de forma articulada com o fenômeno estudado; que a interação entre professor e alunos favorece com que eles produzam signos mais elaborados e, dessa forma, ampliem o modo de ver e, de tratar, o fenômeno analisado; que é possível a abordagem e discussão de uma variedade de conceitos matemáticos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem; que a Modelagem Matemática se mostra como um veículo para se ensinar e aprender matemática com significado, uma vez que conceitos matemáticos evocados vêm associados com o fenômeno em estudo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Semiótica. Triângulo epistemológico.

Abstract

In our previous study, we came to the conclusion that Mathematical Modeling can be described as a set of concepts and procedures that are necessary for the solution of a problem, and that in these procedures, the students use or produce signs. We had assumed that the signs – being instruments of communication – bear information relating to the knowledge of those who produce them about what the sign signifies. In addition, based on Heinz Steinbring's presumptions, we regarded the signs in association with two other elements: object/context of reference and concept. In our investigations, we discuss this trinity under the name of epistemological triangle. With the goal of discussing Mathematical Modeling based on epistemological triangles, while taking into account the signs produced/manifested by the students as they performed Mathematical Modeling activities, we constructed epistemological triangles for three Mathematical Modeling assignments completed by undergraduates enrolled in the fourth term of a Mathematics Teaching Degree in a public university in the state of Paraná, Brazil, as part of a Mathematical Modeling class with a focus on Mathematics Education. We follow a qualitative approach for the methodological choices of our research. The conections that we establish between signs, concept and context of reference illustrate that, as the students progress with the Mathematical Modeling activities, the signs they produce cause the contexts of reference to be altered and modified, leading to the emergence of a variety of contexts. Such movement displayed in the epistomological triangles highlights the dynamic character of Mathematical Modeling. Furthermore, the act of observing the associations between the signs and the other two vertices of the epistomological triangle (context of reference and concept) suggests that the semiotic reading of a Mathematical Modeling activity comprises a junction of epistemological triangles. We speculate that the triangles show that mathematical concepts in mathematical modeling activities present themselves in unison with the phenomenon being studied; that the interaction between teachers and students aids them in producing more elaborate signs and as such expands how they see and treat the phenomenon; that it is possible to approach and discuss a variety of mathematical concepts throughout modeling activities; that Mathematical Modeling proves to be a valid medium for teaching and learning meaningful mathematics, once the mathematical concepts being elicited are connected to the phenomenon being studied.

Keywords: Mathematical Modeling. Semiotics. Epistemological triangle.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

*“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real”
(LOBACHEVSKY).*

Dentre as diversas possibilidades, na perspectiva da Educação Matemática, de abordagem metodológica na promoção dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática localiza-se a Modelagem Matemática. Nosso entendimento de Modelagem de Matemática está alinhado ao pensamento de Almeida, Silva e Vertuan (2012), quando pontuam que ela pode ser descrita como um conjunto de procedimentos e conceitos necessários à solução de um problema que pode ter origem no cotidiano ou contexto cultural e social que cercam o indivíduo.

Essa visão muito se aproxima ao que já vinha escrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (2000) quando se destaca que é importante o aluno perceber que a Matemática, como um sistema de códigos e regras, se torna uma linguagem de comunicação de ideias que permite modelar a realidade e interpretá-la.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2000, p. 111).

Sendo a Modelagem Matemática associada à resolução de um problema com vista a encontrar uma solução adequada a ele, ela vem contrapor ao que a maioria dos estudantes entendem: que resolver um problema consiste apenas em fazer cálculos com os dados apresentados no enunciado, aplicando alguma fórmula ou algoritmo que aprenderam na sala de aula (ARAUJO, 2008, apud MATULLE, 2017).

Este pensamento mecanicista reforça a ideia de uma matemática pronta e acabada, uma herança platônica que, de acordo com Caldeira (2011), caracteriza como bom professor aquele que consegue fazer com que seus alunos “vejam” os objetos matemáticos ao invés de manipulá-los, o que torna a matemática verdadeira, mas inútil, já que a maioria das pessoas não consegue relacioná-la nem mesmo com situações triviais de seus cotidianos.

Se temos o interesse de que os alunos saibam resolver problemas se faz necessária uma mudança no panorama educacional do país no sentido de que nossas ações (ações dos professores) em sala de aula devem considerar a implementação das tendências em Educação Matemática. No nosso estudo, aludimos à Modelagem Matemática com fins educacionais, que emergiu no Brasil por volta da década de 1980 e nos últimos anos tem despertado interesse entre os professores, sobretudo, da Educação Básica.

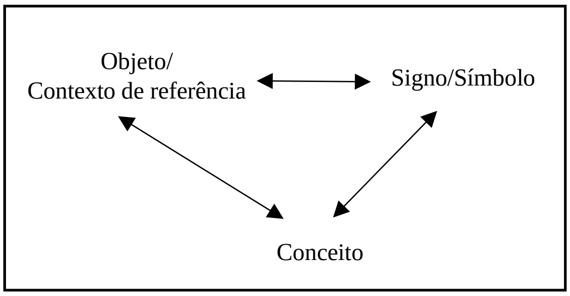
Pode-se dizer que meu primeiro contato com a Modelagem Matemática se deu há alguns anos quando ainda na graduação; não nos dá orgulho admitir que este contato não perdurou mais do que o curto período de duração da disciplina e passou longe de ser uma prática consistente e recorrente no desempenho da docência. De qualquer forma, o desafio proposto pela orientadora, de redescobrir a Modelagem Matemática foi aceito prontamente, e junto com a Modelagem Matemática, veio o convite ao estudo da Semiótica, que são nosso "óculos teórico".

Qualquer coisa pode ser analisada semioticamente (SANTAELLA, 2003). O uso de símbolos como forma de leitura e interpretação é uma característica inerente a todas as culturas. Wilder (1996) afirma que o ser humano pode ser diferenciado dos animais pela sua maneira como se comunica por meio de símbolos e códigos. Assim, a Semiótica funciona como um mapa lógico que traça as linhas dos diferentes aspectos através dos quais uma análise pode ser conduzida. Este pensamento nos cativou e motivou a refletir e aprofundar nossos estudos sobre uma interlocução entre Modelagem Matemática e Semiótica.

É notório que a Matemática requer o uso de símbolos e códigos para a codificação e operação do conhecimento. Como nos lembra Duval (2000), não temos nenhuma percepção ou acesso instrumental aos objetos matemáticos sem a presença de signos. Na Semiótica peirceana signo é aquilo que ocupa o lugar de outra coisa e a representa, assim, os signos, como instrumentos de comunicação, podem revelar informações relativas ao objeto que o signo referencia e trazer à tona compreensões acerca dos modos de pensar e agir do intérprete (aquele que gera ou produz o signo).

Steinbring (2005) ao discutir sobre o papel comunicação do signo traz também para o debate o seu caráter epistemológico. Nesse seu modo de assumir que o conhecimento matemático é construído por meio de atividades sociais e interpretações individuais, pontua que os signos, também nominado por ele, símbolos, não têm significado por si só. De acordo com o autor, no contexto de sala de aula, o significado dos signos é produzido/manifesto por alunos ou professor por meio de uma mediação entre signos/símbolos e contexto de referência a eles atrelados. Além desses dois elementos, Steinbring (2005, 2006), a fim de caracterizar a particularidade epistemológica do conhecimento matemático, elege um terceiro elemento: o conceito, para completar a tríade que ele denomina triângulo epistemológico (Figura 1).

Figura 1 - Triângulo Epistemológico proposto por Steinbring (2005)



Fonte: Steinbring (2005 p. 22) (Tradução nossa).

Pautada nos trabalhos de Steinbring (2005/2006), Veronez (2013) discute o papel dos signos em atividades de Modelagem matemática e propõem um triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática. No triângulo epistemológico proposto por Veronez (2013) o contexto de referência está associado aos elementos característicos da Modelagem Matemática; o signo/símbolo corresponde aos signos produzidos e/ou manifestos pelos alunos em associação com suas ações cognitivas e o conceito, se relaciona aos objetos matemáticos evocados ao longo da atividade de modelagem matemática.

Ancoramos nossa investigação nos trabalhos desses dois autores e nos propomos a revelar aspectos da Modelagem Matemática nos triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática[1]. Vislumbrando nosso objetivo, organizamos este relatório de pesquisa em três capítulos, além da Introdução e Considerações Finais.

No Capítulo 1 fazemos o delineamento da pesquisa e apresentamos as opções metodológicas adotadas, traçamos os caminhos percorridos e descrevemos o cenário de investigação, bem como os instrumentos de coleta de dados utilizados.

[1] No decorrer do texto, por vezes, utilizaremos o termo atividade para nos referirmos à atividade de modelagem matemática a fim de evitarmos repetições.

No Capítulo 2 trazemos os pressupostos teóricos que nos deram embasamento. Discutimos sobre interlocuções entre Modelagem Matemática e a Semiótica na perspectiva de Charles Sanders Peirce, com destaque para o triângulo epistemológico de Heinz Steinbring. Abordamos, também, nesse capítulo, as diversas concepções e perspectivas de Modelagem Matemática e sobre a inserção da Modelagem Matemática na sala de aula.

O Capítulo 3 é dedicado à análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas e à construção de triângulos epistemológicos dessas atividades, com vistas a revelar aspectos da Modelagem Matemática nesses triângulos.

Nas Considerações finais trazemos reflexões que nos acompanharam no trilhar do desenvolvimento de nosso estudo.

Por fim, apresentamos as Referências e os Anexos.

CAPÍTULO 1

1. Nossas opções metodológicas

“Os fatos são sonoros, mas entre os fatos há um sussurro.
É o sussurro que me impressiona’
(CLARICE LISPECTOR).

Toda pesquisa começa com uma pergunta. Bicudo (1993 p. 18) usa das palavras do professor Joel Martins para explicar o sentido de pesquisar: “ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e, andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez”.

Começamos então apresentando neste capítulo como foi o no nosso “andar”, nossos passos, nossas escolhas e procedimentos.

1.1. Delineamentos da pesquisa

A revisão de literatura é o ponto de partida para a definição de um problema de investigação científica (TRENTINI e PAIM 1999); é a partir dela que se pode contextualizar o problema dentro da área de estudo e tomar decisões acerca das bases intelectuais da pesquisa.

De acordo com Alves (1992) existem dois tipos de revisão de literatura: aquela que o autor utiliza para seu próprio consumo, para enriquecimento de seu conhecimento e aquela que efetivamente integra sua pesquisa. Embora não possamos condensar toda revisão de literatura em uma seção, achamos pertinente aqui apresentarmos os principais trabalhos que nos serviram de inspiração e que, de certo modo, nos ajudaram a delimitar nossa questão de investigação.

As leituras iniciais se concentraram nos trabalhos e autores que utilizam uma abordagem semiótica para investigações acerca dos signos como meios de comunicação de conhecimentos. Radford, Schubring e Seeger (2008, apud Almeida e Silva, 2018) reconhecem que a Educação Matemática é uma das áreas em que, sem dúvida, aplicações e repercussões da semiótica têm grande relevância.

Embora a Semiótica e a Matemática tenham nascido juntas e quase que invisivelmente por muito tempo se ajudado mutuamente (D´AMORE, PINILLA E IORI, 2015), é na década de 1990 que se percebe a semiótica associada à Educação Matemática (ALMEIDA e SILVA, 2018).

Ao examinar as publicações que tematizam a Semiótica em um periódico específico da área de Educação Matemática, Almeida e Silva (2018) identificaram três enfoques semióticos: (a) fundamentados nos pressupostos de Charles S. Peirce; (b) fundamentados na teoria de Raymond Duval e (c) os que utilizam de um enfoque, denominado ontosemiótica, cujo mentor é Juan D. Godino.

Nesta investigação, ao discutirmos acerca dos signos em atividades de modelagem matemática nos apoiamos na semiótica peirceana, primeiro enfoque identificado por Almeida e Silva (2018) e em alguns estudos que tratam de articulações entre semiótica e Modelagem Matemática (KEHLE E CUNNINGHAM (2000), CARREIRA (2001), ALMEIDA (2010), SILVA (2013), ALMEIDA E SILVA (2017), VERONEZ (2013)).

Em Kehle e Cunningham (2000), os autores estabelecem relações entre os tipos de raciocínios categorizados por Pierce (abdução, indução e dedução) e as etapas das atividades de modelagem matemática.

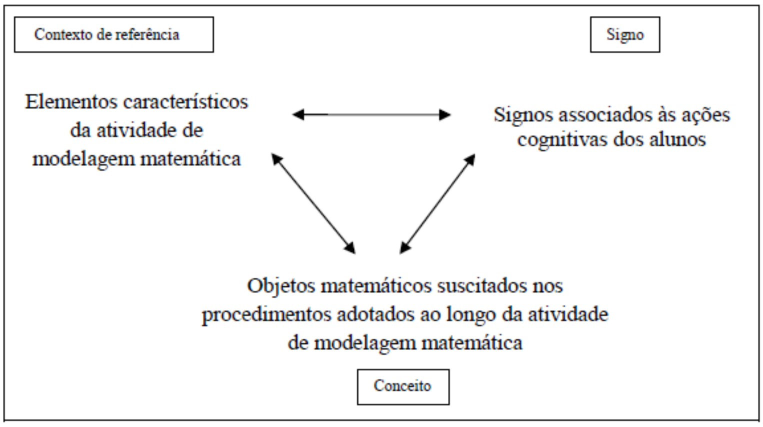
Carreira (2001) e Almeida (2010) se dedicaram a investigar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas. Carreira (2001) argumenta que a metáfora é necessária para a construção do modelo, que, de certo modo, é o resultado da construção de metáforas e, Almeida (2010), assevera que aproximações entre esses três elementos podem ser importantes para a significação de objetos associados ao que a autora chama de "domínio base" e ao "domínio alvo" relacionados à situação em estudo.

A produção de signos interpretantes em atividades de modelagem matemática foi o foco da investigação de Silva (2013). Por meio da tríade peirceana: signo-objeto-interpretante, a autora analisa a atribuição de significado ao objeto. Seu trabalho sinaliza que o significado para o problema e para o objeto matemático se intensifica com a familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática.

Almeida e Silva (2017) discutem a relação entre a ação e a produção de signos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. As autoras apontam que os signos se configuram como meios pelos quais os alunos manifestam e articulam seus conhecimentos enquanto buscam encontrar uma solução para o problema advindo da situação e que a semiose, não é limitada, ao contrário, constitui uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento e também geram novo conhecimento.

Veronez (2013), investigou como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos. A autora identificou os signos produzidos/utilizados por alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e por meio do modelo – triângulo epistemológico – sugerido por Steinbring (2005, 2006), discutiu o papel desempenhado por esses signos ao longo dessas atividades. O trabalho de Veronez (2013) traz como resultado que os signos utilizados ou produzidos pelos alunos no decorrer de uma atividade de modelagem matemática se complementam. A alternância entre contexto de referência, signo e conceito, favorecida pelos papéis desempenhados pelos signos, exalta, por um lado, o caráter dinâmico do triângulo epistemológico e, por outro, o processo dinâmico inerente à Modelagem Matemática. Reconhecendo as conexões entre signos e o que eles referenciam, Veronez (2013) apresenta um triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática (Figura 2), que nos inspira a tê-lo como um modelo basilar no estudo que realizamos.

Figura 2 - Triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática



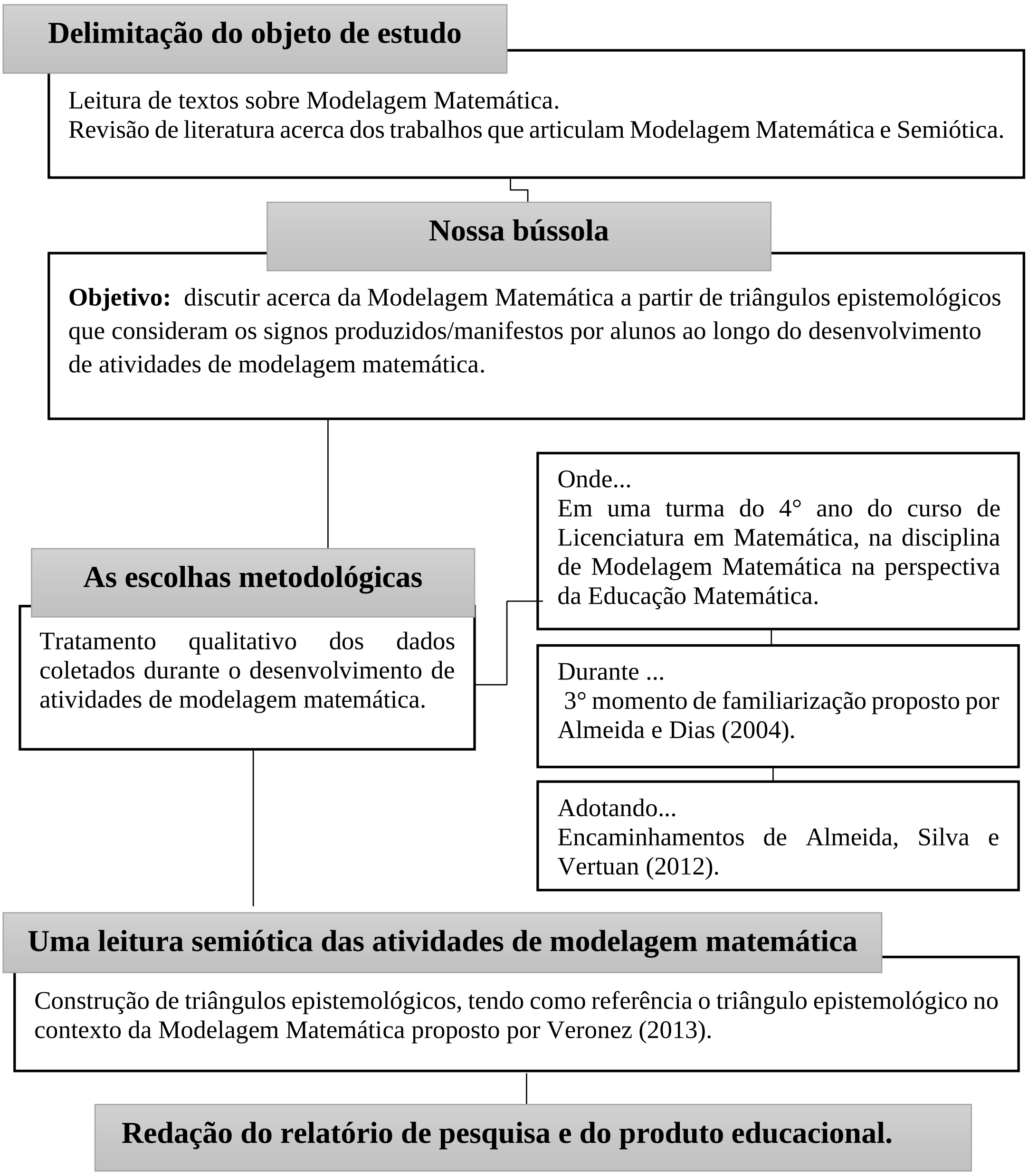
Fonte: Veronez (2013, p. 151).

Esse triângulo epistemológico proposto por Veronez (2013), que se alinha às ideias de Steinbring (2005), considera tanto o caráter dinâmico do triângulo epistemológico enunciado por Heinz Steinbring como o próprio processo de Modelagem Matemática, já que novos signos e novos contextos de referência emergem e se alteram ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Atentando a esta dinamicidade dos triângulos epistemológicos, elegemos como objetivo geral desta pesquisa: discutir acerca da Modelagem Matemática a partir de triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática

Com vistas a elucidar os percursos desta investigação apresentamos na Figura 3 as etapas por nós assumidas. Como nosso estudo insere-se em um programa de mestrado profissional, além deste relatório de pesquisa, está atrelado a ele um produto educacional[2], cuja finalidade está na associação da pesquisa com a prática em sala de aula, sendo elaborado paralelamente à dissertação.

Figura 3 - Caminho metodológico adotado durante a investigação



Fonte: Os autores.

[2] Modelagem Matemática – Possibilidades para a sala de aula.

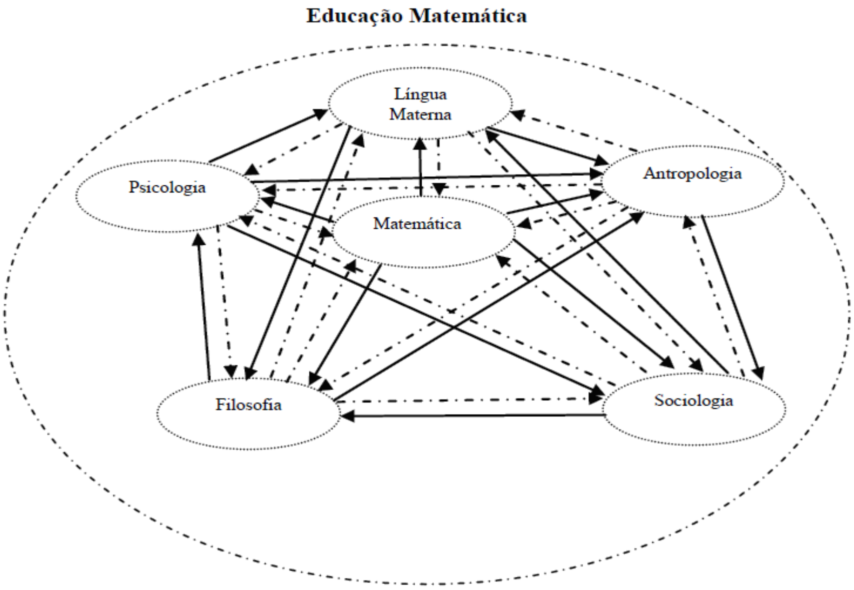
1.2. Caracterização da pesquisa

Ao adentrarmos ao campo de investigação da Educação Matemática, que segundo Godino, Batanero e Font (2008) tem por finalidade específica o estudo dos fatores que condicionam os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, é necessário considerar a possibilidade de interações do conhecimento matemático com outras áreas.

A Educação Matemática se articula, além da própria Matemática, com áreas como a Psicologia, a Pedagogia, a Filosofia e a Sociologia e está baseada tanto na análise da natureza dos conteúdos matemáticos, como no desenvolvimento cultural e pessoal do indivíduo e a forma como ele constrói o mundo.

Burak e Kluber (2008), ao considerarem a Educação Matemática como uma Ciência Humana e Social, retomam as contribuições de Higginson (apud RIUS, 1989a) e configuram um modelo, aberto e dinâmico, que sintetiza e pressupõe a interatividade da Educação Matemática com as áreas que a compõem.

Figura 4 - Modelo proposto por Burak e Kluber (2008)



Fonte: Burak e Kluber (2008).

Com esta configuração, os autores indicam que

> no ato de se ensinar Matemática faz-se necessário considerar os componentes indicados no modelo, para que se possa oportunizar uma aprendizagem mais efetiva por meio de um ensino mais consciente e crítico pelo professor, em relação ao complexo ato de ensinar, especificamente, Matemática (BURAK e KLUBER, 2013, p. 35).

Assim, a pesquisa em Educação Matemática não é pesquisa em Matemática; nem é pesquisa em Educação (BICUDO, 1993). Ela se preocupa com assuntos dessas duas áreas de forma associada e tem preocupações que extrapolam a abrangência desses dois domínios, olhando-os em separado. Logo, a escolha metodológica para investigações no campo da Educação Matemática pode não se configurar uma tarefa fácil.

Nesta investigação, optamos por uma abordagem qualitativa em virtude do contexto em investigação, das características desse contexto e do que pretendemos investigar. De acordo com Minayo (2002), a pesquisa qualitativa "trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis" (p. 22).

A condução de uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre o pesquisador e os sujeitos investigados, "o *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (Bicudo, 2004, p.104), desse modo, o investigador qualitativo continuamente os questiona com a intenção de "captar" suas experiências e o modo como estruturam suas realidades.

Nos interessa aspectos que estão nas entrelinhas do fazer modelagem matemática e, assim, temos na pesquisa qualitativa respaldo para inferir sobre tais aspectos, já que eles podem emergir do contato direto do pesquisador com o ambiente investigado. Convém destacar que esse contato direto, devido ao cenário epidemiológico provocado pelo coronavírus[3] - SARS-CoV-2, se deu a partir de aulas ocorridas via ensino remoto e do uso da plataforma *Moodle*. Assim, interações entre a pesquisadora e os acadêmicos participantes do estudo aconteceram por meio de videoconferências.

Na pesquisa qualitativa, embora os procedimentos metodológicos sejam demarcados, eles não são rígidos e em nada impedem a criatividade e a flexibilidade dos procedimentos. Essa flexibilidade, como aponta Azanha (2011), é de grande valor e pode permitir a captação de elementos essenciais da realidade que não se mostrariam dentro de um determinado processo metodológico rígido, ainda mais que a pesquisa muitas vezes está relacionada à vivência de um problema que transcende a complexidade da sala de aula.

---

[3] A COVID-19 (termo em inglês que significa Corona Virus Disease 2019) é uma doença infecciosa respiratória causada pelo vírus SARS-CoV-2. Por meio da Deliberação CEE/CP nº 01/20 o Conselho Estadual de Educação autorizou o regime de ensino remoto no âmbito do Sistema Estadual de Ensino do Paraná, durante o período da pandemia Covid 19.

1.3. O cenário de investigação e as atividades desenvolvidas

Em uma investigação qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) destacam que “a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47). No nosso caso, a pesquisadora coletou os dados por meio de observação participativa em uma turma de 4° ano de um curso de licenciatura em Matemática, composta por 19 alunos, de uma universidade pública do estado do Paraná, ao longo do segundo semestre da disciplina intitulada Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. A professora dessa turma era a orientadora desta pesquisa.

Por se tratar de um curso de licenciatura, o objetivo primordial da disciplina era propiciar aos acadêmicos, futuros professores, contato e reflexões acerca da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Assim, as atividades desenvolvidas não se concentraram no “ensinar matemática”, mas, em discutir e vivenciar fases e características inerentes às atividades de modelagem matemática, fomentar discussões sobre Modelagem Matemática e, de algum modo, fornecer suporte para a adesão de práticas de modelagem matemática na sala de aula dos futuros docentes.

O processo de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática foi proporcionado pela professora por meio do que as autoras Almeida e Dias (2004) denotam *momentos.*

Como atividades de 1° e 2° momento de familiarização a professora da disciplina propôs atividades que já se encontravam na literatura. Para a realização das atividades do 3° momento a turma se organizou em 6 grupos, conforme escolha e interesse dos próprios estudantes e ao longo do mês de maio a professora solicitou a eles que pensassem em temas de seus interesses para estudo. Para organização e acompanhamento das atividades de modelagem matemática a ser desenvolvida por cada grupo foi proposto o seguinte cronograma:

Quadro 1 - Cronograma para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com temas proposto pelos alunos

1ª etapa: Definição de um problema a resolver	Final de julho
2ª etapa: Resolução do problema em foco	Final de setembro
3ª etapa: Análise da resposta obtida	Final de novembro

Fonte: Os autores.

Por considerarmos que as atividades desenvolvidas no 3º momento se mostram mais ricas em relação a elementos que se aproximam do nosso interesse de estudo nesta investigação, é sobre elas que tecemos nossas inferências e considerações. Contudo, elegemos três atividades de modelagem matemática para apoiar nosso estudo, devido à participação ativa dos alunos que as desenvolveram. Nessa conduta, as falas e ações de 11 alunos, que compõem os grupos 1, 2 e 3, são evidenciadas nas análises.

Os temas de interesse dos estudantes eleitos para estudo são ilustrados no Quadro 2, bem como o modo como nos referimos aos integrantes de cada um dos grupos de estudantes.

Quadro 2 - Atividades eleitas para estudo

Grupo	**Atividade**	**Participantes**
GRUPO 1	Lavagem de roupas	L1, L2, L3 e L4
GRUPO 2	Fritadeira elétrica	F1, F1, F3 e F4
GRUPO 3	Estacionamento no campus da Universidade	E1, E2 e E3

Fonte: Os autores.

Os estudantes foram orientados a fazer o registro de todas as ideias e ações na ferramenta wiki criada, por grupo, no *Moodle*. Tais registros fazem parte do escopo de dados a serem analisados nesta investigação.

No decorrer do desenvolvimento dessas atividades de modelagem matemática a pesquisadora e a professora da disciplina realizaram encontros de orientação online, além dos momentos síncronos de aulas remotas. Tais encontros foram gravados e também constituem material de análise, juntamente com o texto escrito pelos grupos de alunos que, de certo modo, retratam o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática deles. Acrescenta-se aos materiais analisados a gravação do momento de socialização da atividade com toda turma que ocorreram, nas datas de 30/11 e 07/12 do ano de 2020.

Esses materiais: registros dos alunos no Moodle, transcrição das gravações e texto escrito, possibilitaram a identificação de signos matemáticos e não matemáticos utilizados/produzidos pelos estudantes no desenvolvimento de cada uma das atividades de modelagem matemática. Foi olhando para estes signos que construímos os triângulos epistemológicos que nos permitiram avançar em direção ao nosso objetivo.

Vale mencionar que a pesquisa passou por aprovação do comitê de ética da Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO) e que o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) encontra-se nos anexos (Anexo A).

CAPÍTULO 2

2. Aspectos teóricos que fundamentam nossa investigação

“*Uma pedra, uma figura, um signo,*
uma palavra que nos cheguem isolados de seu contexto
são apenas aquela pedra, aquela figura, aquele
signo ou palavra: podemos tentar defini-los,
descrevê-los como tais, só isto; se além da face
que nos apresentam possuem também uma outra
face, a nós não é dado sabê-lo. A recusa em
compreender mais do que aquilo que estas pedras
mostram é talvez o único modo possível de
demonstrar respeito por seu segredo; tentar
adivinhar é presunção, traição do verdadeiro
significado perdido.
... Contudo, sabe que não poderia jamais
sufocar em si a necessidade de traduzir, de passar
de uma linguagem a outra, de uma figura concreta
a palavras abstratas, de símbolos abstratos às
experiências concretas, de tecer e tornar a tecer
uma rede de analogias. Não interpretar é impossível,
como é impossível abster-se de pensar”
(ITALO CALVINO).

Iniciamos este Capítulo apresentando o modo de fazer modelagem adotado nesta investigação. Em seguida abordamos sobre a implementação da Modelagem Matemática em sala de aula. Na Seção 2.3, trazemos à discussão autores que trataram de aspectos da Modelagem Matemática por meio da Semiótica e que trazem contribuições significativas à temática investigada. Por fim, na seção 2.4, discorremos acerca dos triângulos epistemológicos.

2.1. Diferentes perspectivas de Modelagem Matemática

Oriunda da Matemática Aplicada, a Modelagem Matemática com fins educacionais emergiu no Brasil por volta da década de 1980. Segundo Burak (2004), na perspectiva da Educação Matemática, “a Modelagem Matemática teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava - FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO” (BURAK, 2004, p.1).

Desde então, essa área de estudos se consolidou e, na última década, têm sido mais recorrentes investigações que propõem olhar para as práticas de sala de aula que incorporam o desenvolvimento de atividades de modelagem ALMEIDA (2010),

ALMEIDA E DIAS (2004), BARBOSA (2001, 2003), BASSANEZI (2011), BIEMBENGUT (1999), BORSSOI (2013), BURAK (1992, 2004) E CALDEIRA (2009).

Para o desenvolvimento desta investigação assumimos, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), que a Modelagem Matemática se constitui “uma alternativa pedagógica em que se aborda por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático” (p. 9).

Como os encaminhamentos em atividades de modelagem matemática dependem dos objetivos dos envolvidos, Kaiser e Sriraman (2006) elencam seis perspectivas de Modelagem Matemática: realística ou aplicada, epistemológica ou teórica, educacional, sócio-crítica, contextual e cognitivista. Tais perspectivas se caracterizam por meio de elementos vinculados aos objetivos que dão o direcionamento das atividades de modelagem. No Quadro 3 trazemos algumas características dessas perspectivas.

Quadro 3 - Perspectivas de Modelagem Matemática segundo Kaiser e Sriraman (2006)

Realística ou aplicada	- Situações problemas geralmente autênticas e extraídas da indústria ou da ciência. - Estimula o estudante a desenvolver habilidades para a resolução desses problemas.
Epistemológica ou teórica	- Situações problemas pensadas de modo a gerarem o desenvolvimento de conceitos matemáticos.
Educacional	- Preocupa-se tanto em explorar a interpretação da situação real quanto em estimular a aprendizagem de conceitos matemáticos.
Sócio-crítica	- Deve propiciar o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos acerca da natureza, das influências e dos usos dos modelos matemáticos na sociedade.
Contextual	- Tem a finalidade de gerar a contextualização de situações reais ou a aplicação de conteúdos matemáticos. - Busca motivar os alunos e promover aprendizagem.
Cognitivista	A meta-perspectiva não está ligada aos objetivos da modelagem na sala de aula. Pesquisas com esta abordagem objetivam a análise e a compreensão dos processos cognitivos dos envolvidos em atividades de modelagem matemática com o intuito de favorecer que os alunos mobilizem conhecimentos, da situação, de matemática e de ambos, de forma articulada.

Fonte: Os autores.

Convém destacar que uma mesma atividade de modelagem matemática pode contemplar diversas perspectivas. Nesse sentido, Almeida e Vertuan (2010) pontuam que ao se trabalhar a partir de diversas perspectivas o professor consegue explorar aspectos relevantes de cada uma delas.

Em nossa investigação assumimos as perspectivas educacional e cognitivista, uma vez que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em um contexto no qual os alunos se preocupavam tanto com a interpretação real da situação-problema quanto com a discussão dos conhecimentos mobilizados. Sobre essas perspectivas, Almeida e Vertuan (2010) destacam que:

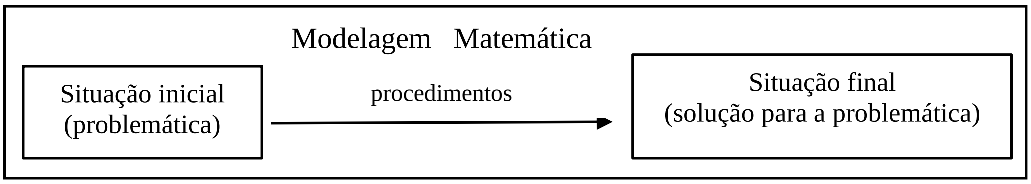
> a perspectiva cognitivista está relacionada à perspectiva educacional, especialmente se considerarmos que o interesse, nessa perspectiva, reside na investigação dos processos cognitivos individuais dos alunos envolvidos nas atividades bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas ou cognitivas relacionadas com a aprendizagem quando os alunos desenvolvem atividades de Modelagem Matemática (ALMEIDA e VERTUAN, 2010, p. 31).

Por atividade de modelagem matemática consideramos a caracterização de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

> Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2012, p. 12).

Essa caracterização, ilustrada na Figura 5, além de sintetizar a forma como os autores compreendem uma atividade de modelagem matemática, sugere que há um trânsito de uma problemática inicial para uma situação final e que a esse processo se associa uma representação matemática, um *modelo matemático*, definido como: "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p.13). Modelo então, segundo os autores, é uma representação simplificada da situação problema sob a ótica dos investigadores.

Figura 5 - Esquema de caracterização de uma atividade de modelagem matemática

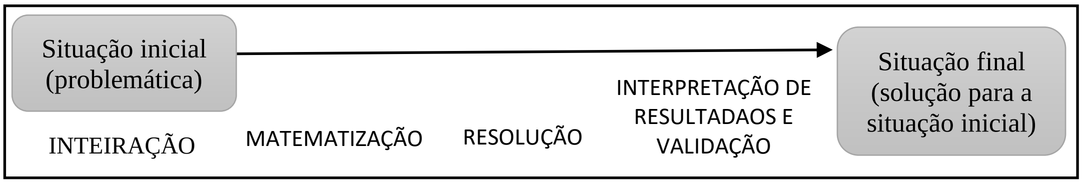


Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12).

É na passagem da situação inicial para a final que conhecimentos matemáticos e não matemáticos são produzidos/integrados. É também no decorrer desse caminho que se requer diversas habilidades relacionadas ao domínio da linguagem matemática, pois a problemática que inicialmente fora apresentada na linguagem natural necessita agora de uma outra representação que evidencie o problema matemático a ser resolvido.

Embora não existam condutas pré-definidas que levem à solução do problema inicial, muitos autores, em seus estudos, procuram estruturar e caracterizar o conjunto de procedimentos e estratégias adotadas no decorrer do percurso. Almeida, Silva e Vertuan (2012) consideram que esse conjunto de procedimentos aparece no que eles denotam por fases da Modelagem Matemática, sendo elas: inteiração; matematização; resolução; e, interpretação de resultados e validação (Figura 6).

Figura 6 - Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15).

A *Inteiração* é o primeiro contato com a situação problema a qual se deseja estudar. É nela que o "inteirar-se" sobre o assunto acontece. É quando se coleta informações, quantitativas e qualitativas, que conduz à formulação do problema, bem como à definição de estratégias para sua resolução. Convém destacar que no decorrer da atividade podem ser necessárias novas informações, assim a inteiração pode permear toda a atividade de modelagem.

A transformação da situação-problema identificada na fase inteiração para uma linguagem matemática se dá na fase *matematização.* A situação-problema que possivelmente foi apresentada em linguagem natural, passa a ser descrita por meio de símbolos e regras matemáticas. Compõem essa fase a formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações. Na matematização entendemos o significado matemático da situação problema é levantada.

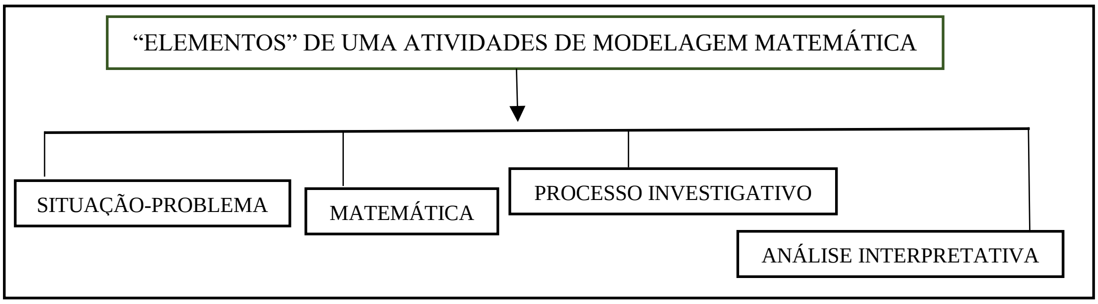
Durante a fase *resolução* todo o ferramental matemático é utilizado de modo a se construir um modelo matemático que permita a análise e solução do problema em estudo.

A capacidade de interpretar resultados e analisar respostas é requerida durante a fase *interpretação e validação dos resultados*. É o momento de avaliar o processo de construção do modelo e verificar se os procedimentos adotados na fase *resolução* foram adequados e satisfazem a situação em estudo. Caso a resposta obtida não seja considerada representativa, todo o processo deve ser revisto, e as fases retomadas. Se houver a validação da solução, Vertuan (2013) sugere que o aluno socialize a atividade com os demais colegas de modo a argumentar que a solução e os procedimentos são pertinentes à situação problema estudada.

> Ainda que essas fases constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de "ida e vinda" entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (Almeida, Silva e Vertuan, 2012, p. 17).

Já que as fases não precisam acontecer de forma "engessada", a sua identificação permite que sejam evidenciados alguns elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática (Figura 7). De modo geral, iniciamos com uma situação-problema, definimos e transformamos o problema em estudo em linguagem matemática, o investigamos e o resolvemos e, por fim, analisamos a solução obtida.

Figura 7 - Elementos que caracterizam uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17).

Do mesmo modo que as fases não ocorrem de forma linear, estes elementos "*situação-problema*", "*matemática*", "*processo investigativo*" e "*análise interpretativa*" não devem ser compreendidos linearmente; eles compõem a atividade de modelagem matemática e se articulam a partir das estratégias adotadas na busca por uma solução para o problema em foco.

Do contato com a *situação-problema* define-se uma investigação a ser realizada. Assim, matemática e processo investigativo se cruzam e se entrecruzam a todo o momento até que uma solução seja obtida e que aconteça uma análise interpretativa acerca dela com olhar atento aos objetos matemáticos usados para obter tal solução e às características da situação da qual o problema é oriundo.

Cabe destacar que tanto o *processo investigativo* pode suscitar a *matemática* ou criar um ambiente em que os que desenvolvem a atividade de modelagem matemática necessitem buscar um novo ferramental matemático para que a solução possa ser encontrada, como a *matemática* pode requerer um *processo investigativo* na intenção de se obter uma solução para o problema investigado.

Ao encontrar uma solução para o problema, a *análise interpretativa* é que irá mostrar se as estratégias adotadas foram satisfatórias e se a solução condiz com a situação-problema levantada.

Analisar situações reais em sala de aula a partir de lentes da matemática nem sempre é considerada uma tarefa trivial. Isso ainda se intensifica quando se tem como propósito ensinar matemática a partir de fenômenos da realidade, como nos é proposto na Modelagem Matemática. Na seção a seguir trazemos alguns apontamentos sobre a inserção da Modelagem Matemática na sala de aula.

2.2. Alguns apontamentos sobre a Modelagem na sala de aula

De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), a Modelagem Matemática é um meio de confrontarmos o mundo real com o universo da Matemática, e o primeiro passo a ser dado ao se trabalhar com Modelagem Matemática é reconhecer a existência de um problema real e que seja significativo para os alunos e suas comunidades (p.27). Ainda segundo os autores, "o aluno tem direito de ver o problema na importância que ele tem para a sociedade".

Nesse sentido, a Modelagem Matemática rompe com o chamado "ensino tradicional", em que os problemas muito pouco têm a ver com a realidade e aos alunos cabe unicamente ouvir, aceitar e reproduzir as verdades que o professor transmite. Na Modelagem Matemática temos um ambiente dialógico em que aprendemos não apenas sobre matemática, mas podemos ir além e discutir sobre a importância dela na sociedade.

Logicamente, quando trazemos problemas reais para a sala de aula, o conteúdo ministrado sempre de forma linear pode se misturar, Kluber (2012, p. 149) destaca que ao "assumir a Modelagem Matemática na Educação Matemática, mudanças curriculares se impõem", e temos aí um dos principais "enroscos" apontados pelos professores no que se refere à implementação de práticas de Modelagem Matemática.

Além da existência de um programa a ser cumprido pelos professores e um currículo que não respalda a adoção da Modelagem na Educação Básica (HUF, BURAK, PINHEIRO, 2020), a falta de um roteiro para as aulas tira o professor da sua zona de conforto e o desestabiliza, conforme aponta Oliveira e Barbosa (2011).

> A presença da modelagem na escola representa desafios para os professores, pois as aulas de Matemática apresentam uma dinâmica diferente, já que acontecerão diversos caminhos propostos pelos alunos para a resolução do problema. Com isso, não há previsibilidade do que ocorrerá nas aulas na utilização deste ambiente de aprendizagem movendo os professores para uma zona de risco (OLIVEIRA E BARBOSA, 2011, p. 267-268).

Se por um lado, para o professor desenvolver atividades de modelagem matemática é algo desafiador, para o aluno possivelmente o desafio e a insegurança também se faça presente. Já me habituei a ouvir comentários de meus alunos após a conclusão de atividades de modelagem ao relatarem ter gostado da atividade, mas que acharam-na mais difícil e trabalhoso que resolver listas de exercícios; isso porque o que é produzido em sala de aula depende primordialmente da participação deles, não basta copiar e reproduzir; é necessário pensar.

Mayer, Caldeira e Malheiros (2013) criticam o ensino tradicional ao afirmarem que a forma de organização escolar produziu pessoas “mudas”, que quanto mais avançam na seriação escolar menor é a participação em sala de aula. Nas palavras dos autores, “a escola ensina aos alunos que quem não fala não erra, mas se esquecem de ensinar que quem não tenta, não progride” (p. 53). Assim, o fazer modelagem matemática requer mudanças nas atitudes tanto do professor quanto do aluno, que precisa ser mais atuante.

E é justamente pensando neste processo de familiarização do aluno com modelagem matemática, que Almeida e Dias (2004), propõem que a introdução da Modelagem Matemática em sala de aula aconteça a partir do que denominam por *momentos* (Figura 8).

Figura 8 - Implementação da Modelagem Matemática na sala de aula

1° Momento

O professor coloca todos os alunos da turma em contato com uma situação problema que pode já ter sido desenvolvida por outro grupo ou então planejada pelo professor.

O "convite" a pensar sobre esta situação deve vir acompanhado de estímulos que os conduzam a reflexão sobre o problema e consequentemente sobre os conteúdos matemáticos necessário à solução.

Neste momento o professor fornece todas as informações necessárias e percorre todas as fases do processo de modelagem junto com os estudantes

2° Momento

O professor pode organizar a turma em grupos e sugerir uma situação problema acompanhada de algumas informações inicias.

Os estudantes podem complementar a coleta de informações e são eles também que, orientados pelo professor, definem o problema e procedimentos matemáticos e extramatemáticos que acharem necessáios e adequados à solução.

3° Momento

Os alunos, organizados em grupos e incentivados pelo professor, definem uma situação de interesse para a investigação.

Todas as fases do processo de modelagem são de responsabilidade dos estudantes.

Ao professor cabe o acompanhamento e interferências oportunas a fim de incentivar e otimizar o aprendizado.

Fonte: Adaptado de Almeida e Dias (2004).

Essa proposta, além de propiciar a compreensão do processo de modelagem por parte do aluno, pode ser uma alternativa para que o professor adquira confiança para a adoção da Modelagem Matemática em sua prática docente, já que nos primeiros momentos ele tem maior controle sobre o processo, podendo sentir-se mais confortável para implementar Modelagem Matemática em suas aulas.

Almeida e Dias (2004, p. 7) expõem que "na medida em que o aluno vai realizando as atividades nos "diferentes momentos", sua compreensão acerca do processo de Modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando. Da mesma forma acontece com o professor. Ao passo que ele vai dando mais liberdade e autonomia para o aluno desenvolver atividades de modelagem matemática, ele vai percebendo a importância de seu papel de orientador da aprendizagem dos alunos. Essa forma de fazer modelagem matemática em sala de aula (os *momento*s de familiarização) foi a adotada nas aulas que subsidiam esta investigação.

Além de considerar o fazer modelagem matemática em sala de aula, os signos produzidos nesse fazer também nos importa. Assim, na seção seguinte, trazemos à discussão, autores que discutem sobre Modelagem Matemática utilizando lentes da Semiótica Peirceana e que, de algum modo, se aproximam da nossa investigação.

2.3. Sobre interlocuções entre Modelagem Matemática e Semiótica Peirceana

De acordo com Nöth (2008) a utilização da Semiótica é tão antiga quanto a existência humana, já que desde os tempos primórdios nos utilizamos de símbolos e gestos, ou seja, signos como meio de comunicação. Também ressaltando a remota existência da Semiótica, D´Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 27) escrevem que “a semiótica e a matemática nasceram juntas, uma ao lado da outra, ajudando-se e sustentando-se mutuamente, sem ninguém saber, durante muito tempo”. Logicamente, assim como outras ciências, a Semiótica como conhecemos hoje é constituída de elementos e características dos pensadores de diversas épocas e áreas de conhecimentos que se dedicaram ao estudo da linguagem e, assim como na Modelagem Matemática, encontramos uma pluralidade de definições e vertentes.

De acordo com D´Amore, Pinilla e Iori (2015), o próprio termo semeiotiké, do qual deriva a palavra Semiótica, não foi utilizado inicialmente em menção à teoria dos signos, mas a um ramo específico da medicina que tratava do estudo dos sintomas de enfermidades. Outro ponto em que a diversidade de ideias se manifesta é a conceituação de signo, do latim signum.

Desde os filósofos gregos e romanos até o século XIX, quando Peirce e Saussure dão à Semiótica o contorno de ciência, a noção de signo vem sendo modificada e co-criada juntamente com o desenvolvimento das ciências. Almeida e Silva (2018, p. 697), destacam que “a estruturação de uma consciência semiótica emergiu sistematicamente da influência e repercussão que o uso dos signos tem nas diferentes áreas de conhecimento”. No que tange à aproximação da Semiótica com a Educação Matemática, de acordo com Almeida e Silva (2018), os primeiros trabalhos surgem na década de 1990.

A Semiótica tem muito a contribuir com a Educação Matemática, visto que a comunicação em ambientes educacionais é feita por meio de escritas, gestos, falas e códigos que se configuram como signos. De acordo com Steinbring (2005), na sala de aula, assim como no dia a dia, a comunicação acontece por meio da linguagem natural, no entanto, durante a aula de matemática os meios de comunicação servem, em primeiro lugar, ao propósito de troca e registro de ideias matemáticas. “A comunicação em sala de aula usa mais assuntos específicos da matéria, sinais matemáticos, como expressões técnicas, notações escritas, sinais de codificação matemática, variáveis, símbolos matemáticos especiais, diagramas etc.” (Steinbring, 2005, p. 184, tradução nossa).

A caracterização de Modelagem Matemática já referida na seção anterior sugere que no processo de busca por uma solução para o problema em estudo se tenha oportunidade de utilizar/produzir uma multiplicidade de signos. De acordo com Almeida e Veronez (2017):

> o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer dos alunos processos investigativos e interpretativos a partir de conceitos matemáticos e de conhecimentos acerca da situação em estudo e é nesses processos que signos são por eles manifestados. Seja de forma implícita (por meio de procedimentos) ou explícita (por meio de representações, de modo geral, simbólicas), esses signos retratam as intenções e conhecimentos dos alunos nas escolhas que fazem ao longo da atividade de modelagem matemática (ALMEIDA E VERONEZ, 2017, p. 143).

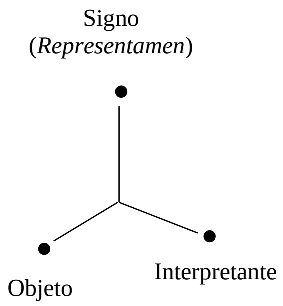
Cabe destacar que na semiótica peirceana a noção de signo é muito genérica e abrangente. Isso deve-se ao fato de que Peirce (2005, p. 46) denota signo como “aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém”. Assim, sob o termo signo, inclui-se qualquer pintura, diagrama, grito, gesto, piscadela, memória, gráfico, indicação, sintoma, suspiro, letra, número, palavra, sentença etc. - qualquer coisa que esteja ocupando o lugar de outra.

Dentre as diversas definições apresentadas por Peirce, a que apresentamos a seguir traz à tona um dos fundamentos mais importantes da semiótica peirceana: a relação triádica do signo.

> Um signo, ou representamen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o fundamento do representamem (PEIRCE, 1972, p. 94).

Segundo Santaella (2007) a tríade pode ser entendida como: o signo é primeiro o *representamen* - algo que se apresenta à mente, e está ocupando o lugar ou ligado a um segundo: o objeto, que é aquilo que o signo indica, se refere ou representa, associado então a um terceiro, o interpretante, que corresponde ao efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete. A Figura 9 ilustra a relação triádica do signo.

Figura 9 - Tríade Peirceana



Fonte: Adaptado de Otte (2006, p. 22) (Tradução nossa).

Para entendermos a funcionalidade do signo tomemos como exemplo de signo a palavra “caneta”, que nos remete ao objeto real, o artefato utilizado para a escrita; a imagem gerada na mente do intérprete fornece a ideia que o indivíduo tem desse objeto – o interpretante, que é outro signo, depende das convenções já estabelecidas pelo sujeito a respeito de tal objeto. Essa tríade de signo também sugere que o ‘objeto real’ é inatingível pela percepção, já que tudo é signo.

Ao discutir sobre signos em atividades de modelagem matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2011), destacam que o interpretante produzido por quem desenvolve a atividade resulta da relação do signo com o objeto e “substitui o objeto real na mente do intérprete. Ou seja, o signo funciona como mediador entre objeto e interpretante (SANTAELLA, 2009).

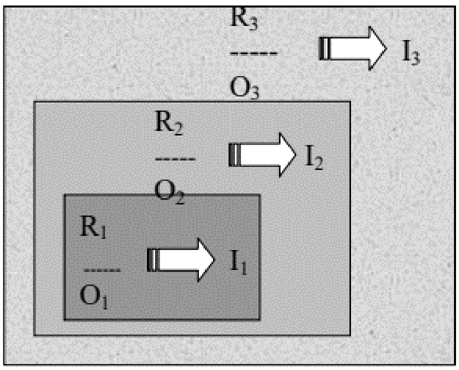
Silva (2013) se dedicou a investigar como emergem os signos interpretantes nas diferentes etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Por meio da tríade pierceana, a autora fez uma análise semiótica, a fim de identificar a atribuição de significado ao objeto. Para Silva (2013), a tríade peirceana pode estar associada a ações que caracterizam o “trilhar” caminhos em atividades de modelagem matemática. A autora configura a tríade perceber/agir/significar durante o envolvimento dos alunos nas atividades de modelagem e aponta que as tríades de ações são diferentes em cada atividade e se entrelaçam mais intensamente com a familiarização dos alunos. A autora conclui que “de forma geral, é no 3° momento de familiarização que a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações perceber, agir e significar” (SILVA, 2013, p. 256).

Chulek (2020) também se ocupou da análise dos signos interpretantes. A autora investigou os signos (interpretantes) que emergem em atividades de modelagem matemática que são desenvolvidas a partir de imagens associadas ao uso do software GeoGebra. Tais signos revelaram conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, bem como provocaram nos alunos reflexões sobre os conhecimentos emergidos e por eles construídos ou mobilizados e favorecem geração de novos signos.

Gregório (2019), ao investigar o que revelam os signos associados às fases *matematização* e *resolução*, propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), também observa que as atividades de modelagem matemática possibilitaram a geração de novos signos. Contudo, ressalta que nessas fases há predominância de signos com referência a objetos matemáticos, e que para a produção de tais signos os alunos se distanciaram, de certo modo, da situação na qual o problema em estudo estava assentado.

A Figura 10 indica uma representação peirceana do processo semiótico proposto por Presmeg (2002). Esse processo semiótico, denominado semiose, corresponde à ação do signo de gerar ou produzir e se desenvolver num outro signo, este chamado de "interpretante do primeiro", e assim infinitamente (SANTAELLA, 2009). Presmeg (2002) sugere ao modelo de semiose a partir da tríade (objeto – O, representamem – R, interpretante – I) a qualidade de aninhamento, similar ao de bonecas russas, já que cada novo significante (representamen) e significado (interpretante) permanecem por todas as iterações. "O significante anterior, bem como tudo o que ele representa é agora o novo significado. Assim, o novo signo, constituído do novo significante e significado, compreende tudo em toda a cadeia até aquele ponto" (PRESMEG, 2002, p. 272, Tradução nossa).

Figura 10 - Uma representação peirceana de um encadeamento aninhado de três significantes



Fonte: Presmeg (2002,p. 273) (Tradução nossa).

Diferentemente de Presmeg (2002), Seeger (2004) associa a semiose a uma trama, constituída a partir de redes em que um signo gera um interpretante, que sendo signo configura uma nova tríade, que pode provocar uma nova semiose.

Essa ideia de semiose como uma trama apresentada por Seeger (2004) é assumida em Almeida e Silva (2017) ao discutir acerca da ação e produção de signos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. Ao analisar uma atividade de modelagem matemática mediada pelo uso da tecnologia as autoras ponderam que as "tramas associadas a atividades de modelagem matemática também contemplam uma reestruturação que articula conhecimentos matemáticos e não matemáticos" (p. 217) e ainda ressaltam "que atividades de modelagem matemática desencadeiam semiose e, semiose realiza construção de conhecimento" (p. 218).

A inter-relação entre conhecimento e as experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática foi discutida à luz da semiótica por Ramos (2020). De acordo com a autora "a constituição do conhecimento sobre modelagem matemática é mediada pela construção, transformação e intepretação de signos que são constituídos e refinados mediante as experiências vivenciadas em situações de modelagem matemática" (RAMOS, 2020, p. 93).

Nesses trabalhos a raiz do signo se assenta nas ideias definidas por Peirce (2005) e em um modo completo, porém complexo, de se conceber o signo como um elemento da tríade peirceana e como a própria tríade (SEEGER, 2004).

Heinz Steinbring, um seguidor de Charles Peirce, também se ocupa de discutir acerca do signo, mas o faz no contexto da Matemática. Em sua teoria, Steinbring (2005), para discutir sobre a relação entre signo e objeto utiliza-se de um modelo por ele denominado triângulo epistemológico. Nesse modelo, além desses dois elementos, emerge um terceiro denotado conceito. Essa tríade sugerida por Steinbring (2005, 2006) se difere da tríade peirceana porque considera o contexto educacional em sua composição.

Na próxima seção, trazemos considerações acerca do triângulo epistemológico propostos por Steinbring (2005) e por alguns dos autores que o consideraram em suas investigações e que, de certo modo, inspiram e fundamentam nossa investigação.

2.4. Sobre o triângulo epistemológico

De acordo com Steinbring (2005) todo conhecimento matemático requer sinal ou símbolo e que "por si só esses sinais não têm significado algum" (p. 32). Para esse autor, o significado dos sinais e símbolos matemáticos deve ser produzido por aluno e/ou professor por meio de uma mediação entre signos/símbolos e contexto de referência a ele atrelados.

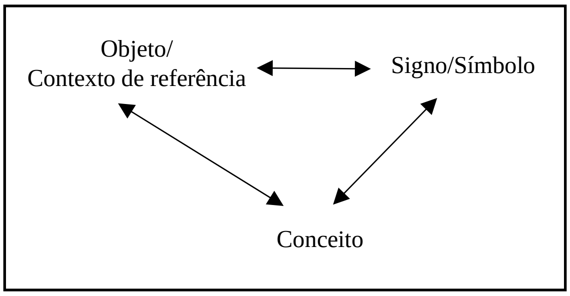
> Todo conhecimento matemático, seja ele científico ou escolar, necessita do contexto de referência, e, neste sentido, todo conhecimento é um contexto específico. Sobre esta base, a diferença entre matemática científica e escolar encontra-se nos diferentes tipos de contextos de referências usados nestes diferentes contextos de desenvolvimentos sociais. Uma diferença importante diz respeito ao contexto de referência na matemática escolar, a qual deve ser ajustada para a necessidade da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo dos estudantes (STEINBRING, 2005, p.13, tradução nossa).

De acordo com Steinbring (2005), a coerência do conhecimento matemático está associada ao tipo de comunicação formal que os pesquisadores matemáticos utilizam ao longo da história, no entanto, não se pode esperar que alunos em processo de aprendizagem[4] apresentem uma argumentação matemática sólida, pois este conhecimento "não é acessível na mesma forma abstrata que é para matemáticos" (p.10).

De modo particular, na sala de aula, a comunicação e inter-relação entre alunos e professor tem papel fundamental na atribuição de significado aos objetos matemáticos. Assim, os sinais e símbolos matemáticos têm função dupla nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, pois além de serem os elementos centrais da comunicação eles "carregam" conhecimento matemático e só adquirem real significado por meio de uma relação com seu contexto de referência.

Partindo do pressuposto de que o conhecimento matemático não pode ser acessado sensorialmente, Steinbring (2005) propõem o triângulo epistemológico (Figura 11) como modelo teórico para entender como esse conhecimento se associa à comunicação inerente aos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

Figura 11 - Triângulo Epistemológico - Steinbring (2005)



Fonte: Steinbring (2005 p. 22) (Tradução nossa).

[4] Entendemos por aprendizagem o processo pelo qual habilidades e conhecimentos são construídos ou modificados.

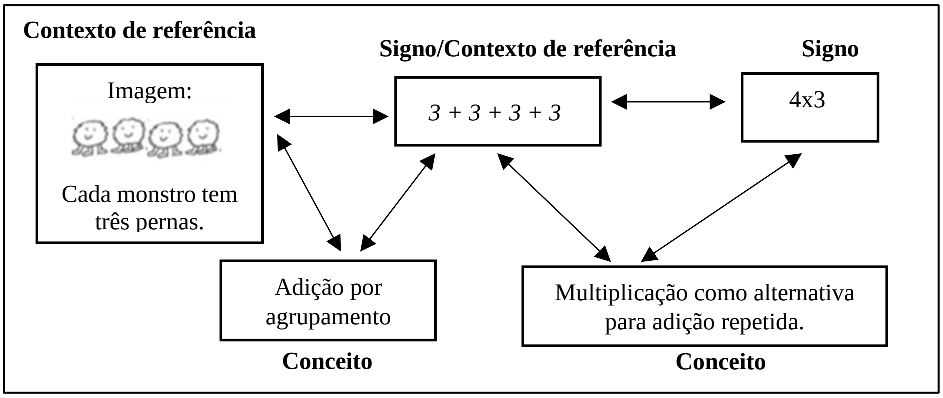
No triângulo epistemológico, Steinbring (2005) considera a função específica dos signos matemáticos de se relacionar com contextos de referência. Esta mediação, segundo o autor, é guiada por condições epistemológicas que requerem uma interpretação da relação entre os "sinais/símbolos" e "objeto/contexto de referência". Para o autor, no triângulo epistemológico "sinais/símbolos matemáticos, bem como objetos/contexto de referência, são as incorporações de estruturas não diretamente visíveis" (p. 30). Desse modo, os conceitos matemáticos se constituem a partir da relação equilibrada entre os três vértices do triângulo epistemológico.

Steinbring (2005) também assevera que nenhum dos elementos do triângulo epistemológico pode ser determinado individualmente, pois eles fazem parte de um sistema equilibrado e flexível.

> Nenhum dos vértices deste triângulo é explicitamente dado ou definitivamente fixado a priori, de forma que um deles pudesse ser ponto de partida para a determinação do triângulo. Os três elementos "Objeto/contexto de referência", "signo/símbolo matemático" e "objeto/conceito" constituem um sistema equilibrado e de suporte recíproco. Além disso, não é visto de forma independente do aluno ou professor (STEINBRING, 2005, p.34, tradução nossa).

Farrugia (2007) ao considerar o modelo semiótico proposto por Steinbring (2005) discute acerca do significado de multiplicação e divisão atribuído por crianças da educação infantil. A autora apresenta um encadeamento de triângulos em que se evidencia a alternância de contexto de referência e signos à medida que novas interpretações sobre tais conceitos matemáticos foram realizadas pelas crianças. Na Figura 12 ilustramos uma adaptação do trabalho de Farrugia (2007), considerando uma sequência de triângulos epistemológicos, que elucidam interpretações das crianças acerca do conceito de multiplicação.

Figura 12 - Exemplo de triângulo epistemológico



Fonte: Adaptado de Farrugia (2007)

Pautada em Steinbring (2005, 2006), e no modelo por ele proposto (Figura 11) , que considera que na sala de aula é recíproca a inter-relação entre conhecimento (manifesto por meio de signos), o contexto no qual emerge (contexto de referência) e o que eles denotam (conceito evocado), Veronez (2013) investiga como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos, denotadas, respectivamente, por Steinbring (2005) como associada ao papel do signo em representar algo e, relacionada ao papel do signo no contexto da interpretação epistemológica do que representa.

Veronez (2013) observou que as conexões entre os vértices de cada um dos triângulos epistemológicos que construiu em sua investigação expõem as interpretações dos alunos acerca dos conhecimentos por eles mobilizados ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Como resultado, apresenta um triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática e infere que à medida que os alunos desenvolvem a atividade de modelagem matemática, os signos utilizados e/ou produzidos por eles se modificam e ganham novas interpretações, assim como o contexto de referência e o conceito. Isso sugere que os elementos deste triângulo não podem ser vistos separadamente, pois eles integram-se um ao outro (VERONEZ, 2013, p. 152).

A autora também conclui que

> as funções semiótica e epistemológica dos signos são as responsáveis pela complementaridade dos signos que os alunos utilizam e/ou produzem e, consequentemente, pela dinamicidade dos elementos desses triângulos. Isso porque se por um lado os signos relacionam-se a outra coisa, devido a seu caráter representacional, por outro, carregam conhecimentos dos alunos sobre aquilo que o signo representa (VERONEZ, 2013, p. 156).

Tendo como pressuposto teórico o triângulo epistemológico proposto por Veronez (2013) (Figura 2), construímos triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos por alunos durante o desenvolvimento de cada uma das três atividades de modelagem matemática consideradas nesta investigação, com vistas a revelar aspectos da Modelagem Matemática presentes neles.

CAPÍTULO 3

3. Análise semiótica de três atividades de modelagem matemática

"O meu olhar é nítido como um girassol.
Tenho o costume de andar pelas estradas
Olhando para a direita e para a esquerda,
E de vez em quando olhando para trás...
E o que vejo a cada momento
É aquilo que nunca antes eu tinha visto"
(FERNANDO PESSOA).

Neste capítulo nos dedicamos à descrição e análise das atividades de modelagem matemática intituladas *Lavagem de roupas, Fritadeira elétrica* e *Estacionamento da universidade,* desenvolvidas, respectivamente pelos grupos 1, 2 e 3.

No início de cada seção apresentamos uma figura síntese da atividade de modelagem matemática. Em seguida, ao descrever as atividades identificamos os signos produzidos pelos alunos e construímos triângulos epistemológicos associando tais signos aos outros dois elementos do triângulo: contexto de referência e conceito.

3.1. Uma leitura semiótica da atividade do Grupo 1: Lavagem de roupas

A atividade de modelagem matemática a ser analisada nesta seção foi desenvolvida por um grupo de 4 alunas, aqui denominadas, L1, L2, L3 e L4. Além das interações no grupo wiki, criado para o desenvolvimento da atividade, as alunas realizaram encontro online com a professora da disciplina, acompanhas da pesquisadora, de modo que os fragmentos presentes nas análises são em sua maioria provenientes deste encontro, ou então, do momento de socialização da atividade com a turma. A Figura 13, apresenta os principais elementos da atividade.

Figura 13 - Síntese da atividade de modelagem matemática nominada Lavagem de roupas

Tema: Lavagem de roupas

Problema: Quantas peças de roupas colocar na máquina de lavar, respeitando sua capacidade de 10 kg?

Emergem do cotidiano das alunas do grupo, que rotineiramente realizavam o processo de lavagem de roupas em suas casas.

A busca por solução para esse problema:

- Pesquisa sobre o processo de lavagem de roupas e a capacidade da máquina de lavar:

De acordo com o INMETRO, para a determinação da capacidade da máquina de lavar a massa da roupa deve ser considerada seca e não molhada.

Massa das roupas (secas)

Bermuda jeans	400g	**Edredom de casal**	2000g
Blusa de moletom	850g	**Fronha**	100g
Camiseta	200g	**Jaqueta jeans**	400g
Camisa	300g	**Lençol de casal**	800g
Calça jeans	700g	**Toalha de banho**	500g

Fonte: Site da empresa Consul

- Definição de hipóteses:
  - É possível lavar apenas um tipo de roupa, ou combinar os vários tipos para serem lavadas juntas;
  - Nem todos os tipos de roupas podem ser lavados juntos.

- Definição do conjunto de tipos de roupas que poderiam ser lavadas juntas:

G1 = {bermuda jeans, blusa de moletom, calça jeans e jaqueta jeans},
G2 = {edredom, fronha, lençol de casal e toalha de banho}
G3 = {camisa e camiseta}.

- Processo de resolução do problema:

Para o caso de lavar apenas um tipo de peça:

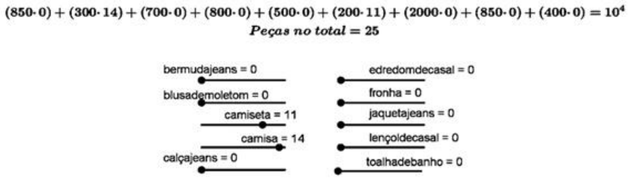
Bermuda jeans	*400x=10000, portanto, 25 peças.*
Blusa	*850x=10000, portanto, 11 peças.*
Camiseta	*200x=10000, portanto, 50 peças.*
Camisa	*300x=10000, portanto, 33 peças.*
Calça jeans	*700x=10000, portanto, 14 peças.*
Edredom	*2000x=10000, portanto, 5 peças.*
Fronha	*100x=10000, portanto, 100 peças.*
Jaqueta jeans	*400x=10000, portanto, 25 peças.*
Lençol (casal)	*800x=10000, portanto, 12 peças.*
Toalha (banho)	*500x=10000, portanto, 20 peças.*

<u>Modelo:</u>
$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000,$
tal que a, b, c, d, …, m, são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *a quantidade de cada peça.*
Para esta equação ser válida para todas as opções de lavagem basta considerar como zero as peças que não serão lavadas.

Para o caso de lavagem de mais de um tipo de roupa:

Opção de lavagem	**Generalização dos alunos**
Dois tipos de peças	*"13 combinações", "$ax_1 + bx_2 = 10000$ tal que a e b são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1 e x_2 a quantidade de cada peça."*
Três tipos de peças	*"teremos 8 combinações"," $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 10000$, tal que a, b, c são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2 e x_3 a quantidade de cada peça."*
Quatro tipos de peças	*"teremos apenas duas combinações", " $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 10000$, tal que a, b, c, d são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2, x_3 e x_4 a quantidade de cada peça."*

- Realização de simulações no software GeoGebra



A quantidade de peças que satisfaz a questão investigada está entre 5 e 50 peças, já que dificilmente tenham 100 fronhas para lavagem.

Fonte: Os autores.

Além de estudantes, as alunas que compunham o Grupo 1, dedicavam boa parte do dia aos afazeres domésticos, assim, o tema "lavagem de roupas", bem como o problema investigado por essas alunas, surgem de dúvidas e interesses comuns entre elas.

> *"Nosso tema é lavagem de roupa e nosso problema é quantas peças de roupa colocar na máquina de lavar, respeitando sua capacidade de 10kg. [...] esse problema teve origem em dúvidas mesmo, discussões, questionamentos como "será que quando eu lavo roupa eu coloco mais peças do que eu deveria colocar ou eu teria que colocar mais". (*L2 durante socialização da atividade com a turma)

Com o problema delineado o grupo se envolve na coleta de informações acerca da capacidade da máquina de lavar. O signo *"a gente viu que no Instituto Nacional de Metrologia, eles têm que a massa de material têxtil é seca! [...] E eu também liguei na lavanderia e isso nos causou um espanto, porque 10kg seriam bastante peças.*" (L2 durante diálogo com o grupo e com a professora) revela não conhecer a forma como as roupas devem ser consideradas para a determinação da capacidade das máquinas de lavar.

A informação coletada, associada ao interesse das alunas de considerarem aspectos reais, faz com que o grupo incorpore à atividade de modelagem esse novo conhecimento que é revelado pelo signo manifesto por L3: "*Por isso que a gente fez a experiência com a roupa seca. A gente não considerou a roupa molhada".*

Esse novo conhecimento, bem como o de que "dentre os tipos de roupas que escolhemos, a pessoa pode lavar só a blusa, só a camisa, ou pode lavar juntos" (L2 durante diálogo com o grupo e com a professora) conduzem à criação da seguinte hipótese inicial: *é possível lavar apenas um tipo de roupa, ou combinar vários tipos*.

As roupas selecionadas pelas alunas, segundo a justificativa de que *"seriam as roupas que mais usam no dia a dia*" (L1 durante socialização da atividade com a turma) são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Tipos e massa das roupas (secas)

Bermuda jeans	400g	**Edredom de casal**	2000g
Blusa de moletom	850g	**Fronha**	100g
Camiseta	200g	**Jaqueta jeans**	400g
Camisa	300g	**Lençol de casal**	800g
Calça jeans	700g	**Toalha de banho**	500g

Fonte: Relatório final.

Embora os encaminhamentos parecessem estar alinhados à hipótese inicial, uma interferência da professora faz com que o grupo repense as estratégias adotadas para a solução do problema.

> Professora: *Eu tenho uma restrição, muito embora matematicamente esteja correto, isso na situação que vocês têm não faz muito sentido, porque eu não posso combinar quaisquer dois tipos de roupa.*
> L3: *é verdade*
> L2: *Tem que ver quais tipos de roupa dá pra lavar junto.*

A interferência da professora faz com que L4 se lembre que "*roupas que soltam pelo eu não posso lavar com camisas e também tem roupas que soltam tinta"*. Ou seja, o diálogo com a professora traz à tona conhecimentos empíricos sobre o processo de lavagem que até então estavam sendo desconsiderados na atividade de modelagem matemática.

As experiências cotidianas das alunas, como a de "*aqui em casa pela quantidade de pessoas cada uma lava sua roupa, como o lençol é só o nosso eu já coloco com as toalhas porque eu acho que senão fica uma quantidade muito pequena na máquina*" relatada por L3, passam então a ser discutidas. Isso acarreta na reestruturação da hipótese inicial e a criação de uma nova hipótese contida no Quadro 4.

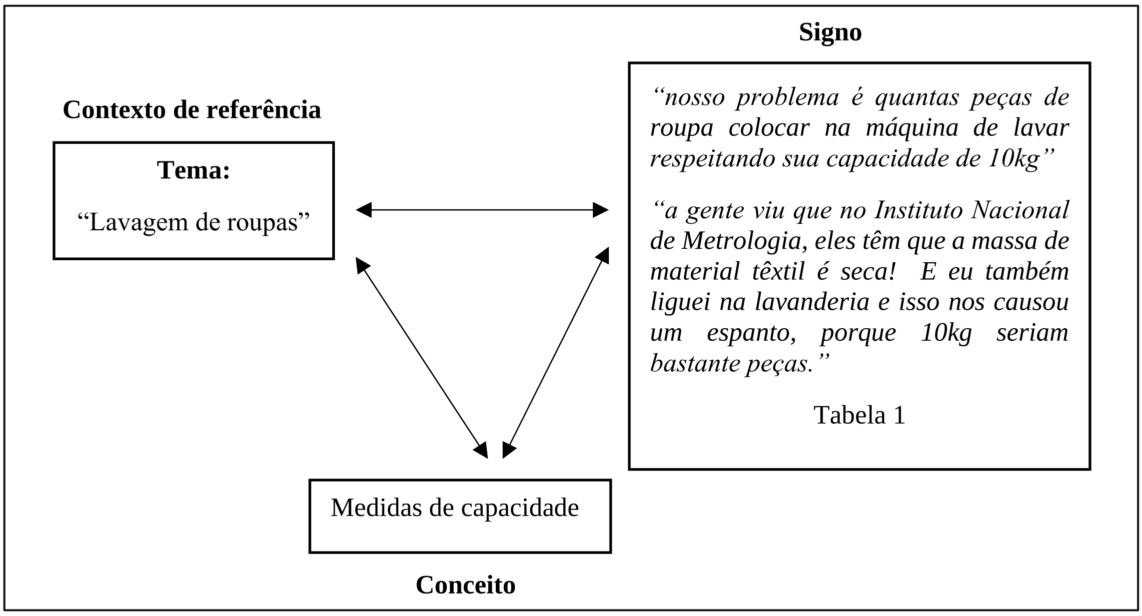
Quadro 4 - Hipóteses consideradas na resolução do problema

Hipótese 1: é possível lavar apenas um tipo de roupa, ou combinar os vários tipos para serem lavadas juntas; *Hipótese 2*: nem todos os tipos de roupas podem ser lavados juntos.

Fonte: Relatório final.

Como os signos produzidos/manifestos até aqui, de certo modo, se associam à temática investigada, construímos um triângulo epistemológico (Figura 14) que tem como contexto de referência o tema "lavagem de roupas".

Figura 14 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência o tema em estudo da atividade Lavagem de roupas.



Fonte: Os autores.

Com as hipóteses definidas e as informações coletadas, as alunas, então, concentram-se no estudo das possibilidades de combinações de lavagem. A primeira opção considerada foi a lavagem de um único tipo de peça. Assumindo que *x* representa a quantidade de peças, o grupo resolveu a situação por meio de equações de 1° grau, conforme Quadro 5.

Quadro 5 - Quantidades de peças (secas) no caso da lavagem de apenas um tipo de roupa.

Bermuda jeans	*400x=10000, portanto, 25 peças.*	**Edredom**	*2000x=10000, portanto, 5 peças.*
Blusa	*850x=10000, portanto, 11 peças.*	**Fronha**	*100x=10000, portanto, 100 peças.*
Camiseta	*200x=10000, portanto, 50 peças.*	**Jaqueta *jeans***	*400x=10000, portanto, 25 peças.*
Camisa	*300x=10000, portanto, 33 peças.*	**Lençol de casal**	*800x=10000, portanto, 12 peças.*
Calça jeans	*700x=10000, portanto, 14 peças.*	**Toalha de banho**	*500x=10000, portanto, 20 peças.*

Fonte: Os autores.

Nesse Quadro 5 consta que as alunas obtêm o número de peças para o caso da lavagem de um único tipo de roupa. O fato de as quantidades serem apresentadas em números inteiros indica que houve um arredondamento no valor da solução de cada equação. Isso revela, por um lado, a percepção dos alunos de que a situação-problema estudada não admite como solução números decimais e que o arredondamento para mais, extrapola a capacidade da máquina de lavar. Porém, por outro, denota que as alunas não se atentaram ao fato de que, por exemplo, é impossível colocar 5 edredons para lavar na máquina, de uma só vez.

Embora os valores encontrados no Quadro 5 não sejam a solução final do problema, o signo "*Desse modo, se desejarmos lavar apenas um tipo de roupa temos ax = 10000, onde a é a massa da roupa escolhida e x a quantidade de peças.*" (B2 durante socialização da atividade com a turma), sinaliza a intenção das alunas de expressar algebricamente a situação analisada, considerando um tipo de roupa, sem levar em conta se o número que resulta dessa equação é viável no contexto do problema que investigam.

Para os demais casos expressos na hipótese 1(Quadro 4) a estratégia que as alunas adotam é a criação de conjuntos em que os elementos correspondem às peças que poderiam ser lavadas juntas:

> *"Temos que analisar quais roupas podem ser lavadas juntas, para tanto iremos considerar, dos tipos de peças citados na tabela, três conjuntos, sendo eles: G_1 = {bermuda jeans, blusa de moletom, calça jeans e jaqueta jeans}, G_2 = {edredom, fronha, lençol de casal e toalha de banho} e G_3 = {camisa e camiseta}. Suponhamos que as peças que podem ser lavadas juntas pertencem ao mesmo conjunto."* (Relatório final).

A partir desses conjuntos as alunas enunciam uma nova hipótese (*Suponhamos que as peças que podem ser lavadas juntas pertencem ao mesmo conjunto),* um signo associado à busca por solução para o problema em estudo, e prosseguem com a resolução do problema para o caso da lavagem de dois, três e quatro tipos de peças diferentes. O Quadro 6 ilustra os signos produzidos nesse processo.

Quadro 6 - Signos produzidos durante a resolução do problema

Opção de lavagem	**Generalização dos alunos**
Dois tipos de peças	*"teremos 13 combinações possíveis de tipos de roupas, pois, para o conjunto G_1 e G_2 temos $C_4^2 = 6$, e para o conjunto G_3 temos 1 combinação, desse modo 6+6+1= 13." "Sendo assim, segue que: $ax_1 + bx_2 = 10000$ tal que a e b são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1 e x_2 a quantidade de cada peça."*
Três tipos de peças	*"teremos 8 combinações, como por exemplo lavar calça jeans, bermuda jeans e jaqueta jeans, ou lavar calça jeans, bermuda jeans e blusa de moletom, e assim com as demais peças." "Sendo assim segue que: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 10000$, tal que a, b, c são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2 e x_3 a quantidade de cada peça."*
Quatro tipos de peças	*"teremos apenas duas combinações" "Que pode ser representado por: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 10000$, tal que a, b, c, d são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2, x_3 e x_4 a quantidade de cada peça."*

Fonte: Os autores.

Muito embora as equações *ax = 10000*, $ax_1 + bx_2 = 10000$, $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 10000$ e $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 10000$ pareçam sintetizar em linguagem matemática a situação-problema para as diversas possibilidades de lavagem consideradas, e são assim consideradas pelas alunas, as respostas obtidas por meio dessas equações precisariam ser analisadas a fim de que possam ser assumidas como respostas satisfatórias ao problema investigado.

A possibilidade de obter uma única equação para representar todas as possibilidades é discutida pelas alunas quando enunciam: *"E a gente pode fazer uma equação, eu acho que daria certo pois essa parte de o que lava com o que a gente poderia fazer as combinações e considerar zero para o que a gente não faria combinação, né?"* (L1 em diálogo com o grupo e com a professora). A equação a qual L1 se refere, ilustrada no Quadro 7, foi considerada como uma solução para o problema investigado nessa atividade de modelagem matemática.

Quadro 7 - Solução apresentada pelas alunas

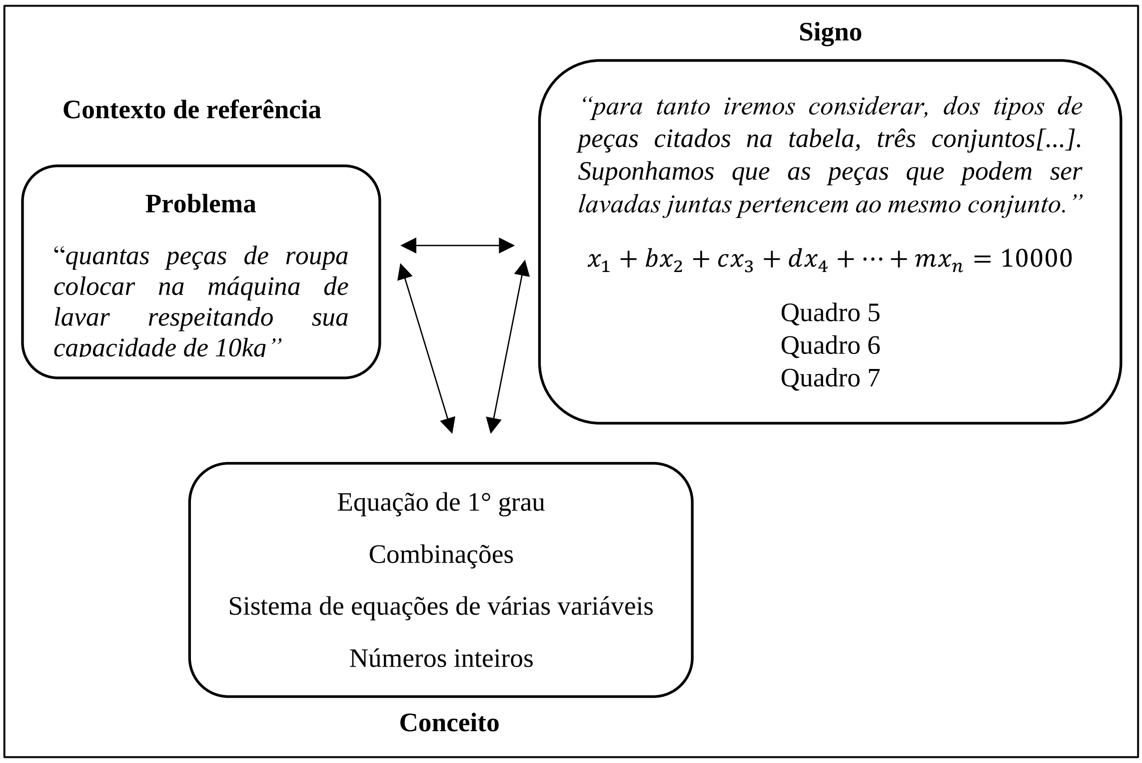
Cada opção de lavagem apresenta uma equação, porém de modo geral podemos representar por: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000$, tal que *a, b, c, d, ..., m,* são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ a quantidade de cada peça. Sendo esta equação válida para todas as opções de lavagem, basta considerar como zero as peças que não serão lavadas.

Fonte: Relatório final.

Essa equação também pode ser reconhecida como um modelo matemático para a situação analisada. Embora a criação de modelos matemáticos não seja o objetivo das atividades de modelagem matemática, este modelo matemático representa uma solução geral para o problema e possibilita com que as alunas visualizem as diversas soluções que o problema pode assumir.

Na Figura 15, o triângulo epistemológico que construímos considera como contexto de referência o problema estudado, os signos produzidos/manifestos pelos estudantes durante a busca por sua solução correspondem ao outro vértice e, atrelados a esses dois elementos temos os conceitos manipulados e evidenciados.

Figura 15 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência o problema da atividade Lavagem de roupas

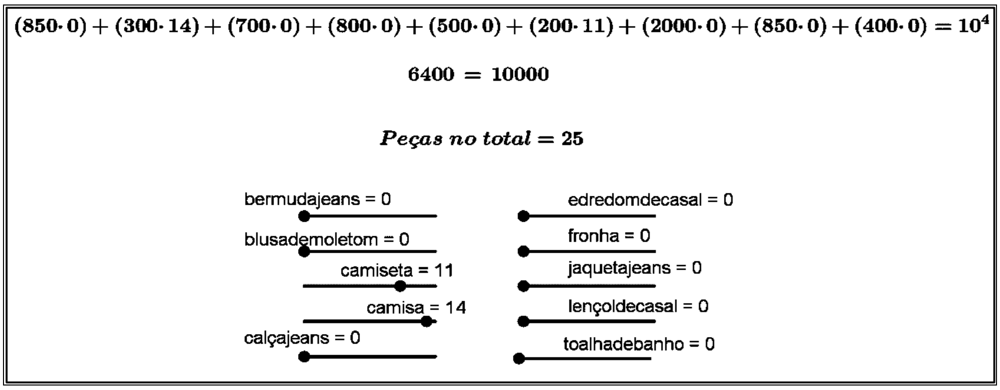


Fonte: Os autores.

A equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000$, signo associado às diversas soluções do problema, juntamente com a declaração de L3 de que "*não é possível dizer qual a quantidade exata colocar na máquina para lavar"* provoca as alunas a buscarem ferramentas que possibilitasse explorar as múltiplas possibilidades de soluções. A opção das alunas foi pelo software GeoGebra. Essa escolha, embora denote certa afinidade delas com os recursos computacionais, indica que elas não tem muita familiaridade como o uso dos métodos de resolução de problemas de otimização.

A Figura 16, que ilustra a tela do software GeoGebra, exemplifica uma das possíveis soluções para o caso da lavagem de dois tipos de peças: 11 camisetas e 14 camisas. Nela identificamos que a estratégia adotada pelas alunas foi a criação de controles deslizantes, de modo que para as peças não consideradas na lavagem é atribuído o valor zero.

Figura 16 - Uma das soluções encontradas no GeoGebra



Fonte: Relatório final.

A busca por soluções para o problema tendo como base essa construção no Geogebra não foi suficiente para as alunas perceberem que a escrita matemática no software tinha equívocos, já que, por exemplo $6400 \neq 10000$, apesar delas expressarem acerca disso: "*o INMETRO recomenda não atingir o volume máximo da máquina, pois pode causar danos a ela, encontramos que a quantidade de peças deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50"* (L2 durante socialização da atividade com os colegas).

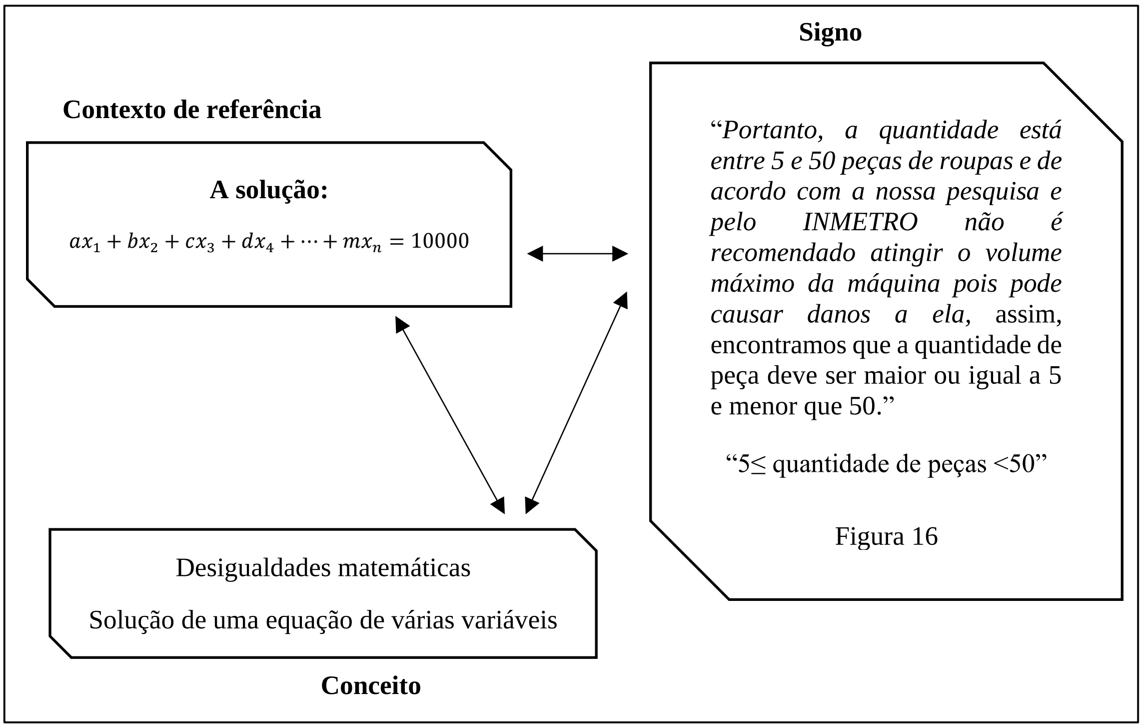
Devido à ausência de reflexão acerca da expressão matemática, ilustrada na Figura 16, em associação com a informação do INMETRO, as alunas não reescrevem o modelo matemático, considerando que a quantidade total de roupas deve ser igual ou menor à capacidade da máquina, ou seja, $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n \leq 10000$.

O depoimento "*analisando as opções, temos que a quantidade está entre 5 (para o caso de se lavar apenas edredom) e 100 peças (para o caso de se lavar apenas fronhas, mas esta é uma roupa de cama, que não se troca todos os dias, dificilmente teremos 100 peças de fronhas para lavar [...] encontramos que a quantidade de peças deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50",* indica que as alunas refletiram sobre o valor encontrado e foram capazes de fazer inferências, descartando alguns valores que não eram condizentes com o problema em estudo. Porém, elas desconsideram outros, como no caso de parecerem assumir que na máquina caberiam 5 edredons.

O signo *"encontramos que a quantidade de peça deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50"*, denota um conhecimento sobre desigualdades matemáticas, que também é evidenciado na produção do signo "5≤ quantidade de peças <50" presente no relatório entregue pelas alunas, mas sugere que elas se distanciaram da situação em estudo quando assumem esse intervalo. Elas encontram uma resposta para o problema matemático, mas essa resposta não é solução para a situação investigada.

Tomando a equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000$ como contexto de referência do triângulo epistemológico da Figura 17, associamos a esse contexto os signos e conceitos mobilizados durante este processo de averiguação da solução.

Figura 17 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência a solução para o problema da atividade Lavagem de roupas



Fonte: Os autores.

Sendo a solução obtida pelos alunos considerada uma resposta ao problema, reconhecemos que eles compreendem que uma atividade de modelagem matemática não precisa de uma resposta única e que o modelo matemático pode se comportar como solução para um problema, já que ele viabiliza a obtenção de um conjunto de resposta.

Na Figura 18 ilustramos o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática a partir da junção dos triângulos epistemológicos das Figuras 14, 15 e 17. As formas geométricas utilizadas na construção de cada um desses triângulos é aqui considerada como forma de evidenciar que os três elementos dos vértices de cada um dos triângulos epistemológicos por nós construídos ao longo dessa atividade de modelagem matemática de modificam ao passo que a atividade é desenvolvida.

Figura 18 - Junção dos triângulos epistemológicos da atividade Lavagem de roupas

Contexto de referência

Tema:
"Lavagem de roupas"

Problema
"*quantas peças de roupa colocar na máquina de lavar respeitando sua capacidade de 10kg*"

A solução:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000$$

Signo

"nosso problema é quantas peças de roupa colocar na máquina de lavar respeitando sua capacidade de 10kg"

"a gente viu que no Instituto Nacional de Metrologia, eles têm que a massa de material têxtil é seca! E eu também liguei na lavanderia e isso nos causou um espanto, porque 10kg seriam bastante peças."

Tabela 1

para tanto iremos considerar, dos tipos de peças citados na tabela, três conjuntos[...]. Suponhamos que as peças que podem ser lavadas juntas pertencem ao mesmo conjunto."

$$x_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \cdots + mx_n = 10000$$

Quadro 5
Quadro 6
Quadro 7

"*Portanto, a quantidade está entre 5 e 50 peças de roupas e de acordo com a nossa pesquisa e pelo INMETRO não é recomendado atingir o volume máximo da máquina pois pode causar danos a ela,* assim, encontramos que a quantidade de peça deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50"

"$5 \leq$ quantidade de peças <50"

Figura 16

Conceito

Medidas de capacidade

Equação de 1° grau

Combinações

Sistema de equações de várias variáveis

Números inteiros

Desigualdades matemáticas

Solução de uma equação de várias

Fonte: Os autores.

3.2. Uma leitura semiótica da atividade do Grupo 2: Fritadeira elétrica

Composto por três alunas e um aluno, aqui simplesmente nominados F1, F2, F3 e F4, o Grupo 2 se dedicou à temática “Fritadeira elétrica”. Sem ainda terem bem definido o que iriam investigar, os alunos “testam” o tempreo de preparo de quatro alimentos em suas fritadeiras.

Como as atividades se desenvolviam sem o contato presencial entre os alunos e entre eles e a professora, devido ao momento pandêmico, eles foram instruídos a registrar suas ações na Wiki criada no *Moodle* e fazer encontros online quando necessário. Com esse grupo foram realizados dois encontros online com a presença da professora da disciplina e da pesquisadora. As transcrições das gravações desses encontros, bem como da apresentação final dessa atividade para a turma, os registros escritos na Wiki e o trabalho final, subsidiaram a análise dessa atividade de modelagem matemática.

Embora todos tenham colaborado com o desenvolvimento da atividade de modelagem, os alunos F3 e F4, não estiveram presentes nos encontros de orientação com a professora e a pesquisadora. Desse modo, a análise se concentra principalmente nos signos produzidos por F1 e F2. A Figura 19 apresenta uma síntese da atividade.

Figura 19 - Síntese da atividade Fritadeira elétrica

Tema: Fritadeira elétrica

Problema: Qual o tempo exato de preparo dos alimentos na fritadeira elétrica?

Surge a partir da curiosidade e questionamentos dos alunos acerca do tempo exato de preparo dos alimentos na fritadeira elétrica.

A busca por solução para esse problema:

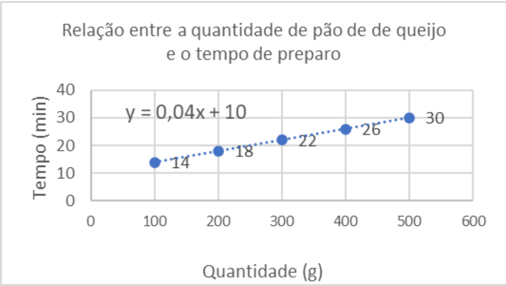
- Pesquisa em sites de receita e manuais de instrução sobre o tempo de preparo de certos alimentos na fritadeira elétrica.
- Seleção dos alimentos a serem analisados.
- Definição de hipóteses para o processo de coleta de dados:
  - a fritadeira elétrica deverá ser pré-aquecida conforme instruções contidas no manual;
  - a temperatura da fritadeira permanecerá constante durante todo o procedimento;
  - a temperatura do alimento será considerada igual em todas as repetições;

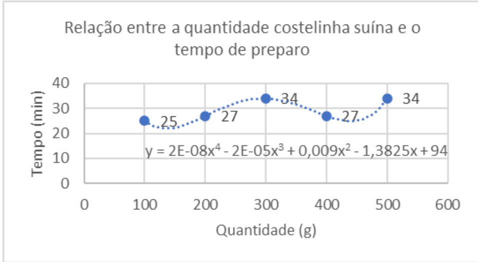
Batata frita
Costelinha suína
Pão de queijo
Coxinha da asa de frango

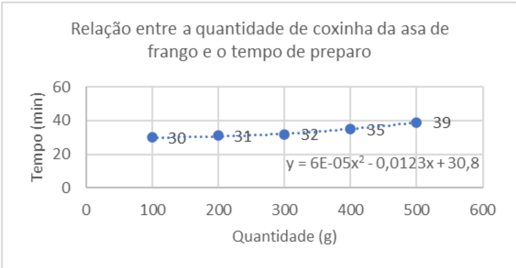
Os alunos coletam os dados relativos ao tempo de preparo de quatro tipos de alimentos e os organizam em uma tabela.

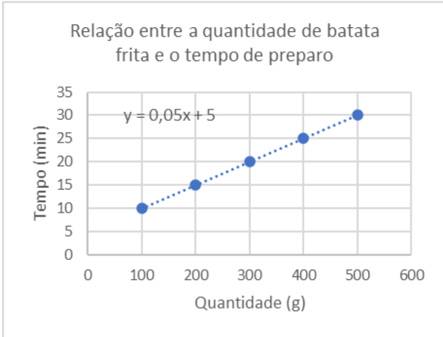
Temperatura (°C)	200	200	180	200
Alimento / **Quantidade (g)**	**Batata frita**	**Costelinha Suína**	**Pão de queijo**	**Coxinha da asa de frango**
100	10 min	25 min	14 min	30 min
200	15 min	27 min	18 min	31 min
300	20 min	34 min	22 min	32 min
400	25 min	27 min	26 min	35 min
500	30 min	34 min	30 min	39 min

Após a coleta dos dados, os valores foram plotados na planilha do Excel e obtidas as curvas que se ajustam aos dados. As expressões algébricas que retratam o comportamento do preparo desses alimentos foram geradas por meio da ferramenta de regressão.









Confecção de um quadro comparativo contendo o tempo de preparo obtido na coleta de dados e o tempo indicado pelo manual da fritadeira.

Alimento	Informações contidas no manual da fritadeira	O que foi verificado/concluído pelos alunos
Batata frita	Para 300 a 700g o tempo de preparo é de 16 a 18 min a uma temperatura de 200°C.	Para 100 a 600g o tempo de preparo foi de 10 a 35 min a uma temperatura de 200°C.
Pão de queijo	O tempo de preparo é de 8 a 15 min a uma temperatura de 180°C.	Para 100 a 600g o tempo de preparo foi de 14 a 30 min a uma temperatura de 180°C.
Costelinha suína	Para o preparo de 2 a 4 peças o tempo de preparo é de 20 a 30 min a uma temperatura de 200°C	Para 100 a 500g o tempo de preparo é foi de 25 a 34 min a uma temperatura de 200°C.
Coxinha da asa de frango	Para o preparo de duas peças o tempo de preparo é de 20 min a uma temperatura de 200°C.	Para 100 a 500g o tempo de preparo foi de 30 a 39 min a uma temperatura de 200°C.

Fonte: Os autores

A definição do tema dessa atividade de modelagem matemática se deu a partir do relato da dificuldade de uma das alunas em utilizar de forma satisfatória a fritadeira elétrica: *"eu comprei uma fritadeira elétrica recentemente, então eu comecei a experimentá-la, eu até conversei com F1 sobre isso, porque o que vem escrito no manual não funciona! O que está escrito ali nem sempre dá certo, a gente tem que ficar testando... ou queima ou fica cru* (F2 durante diálogo com o grupo e a professora). Contudo, a dificuldade de delimitar um problema a partir da temática escolhida foi relatada por F1: "*Nós estávamos tendo muita dificuldade, a gente sabia que o tema fritadeira elétrica* *seria um tema muito interessante, mas no grupo a gente ficava pensando: mas e que problema? E aí começava a surgir várias coisas".*

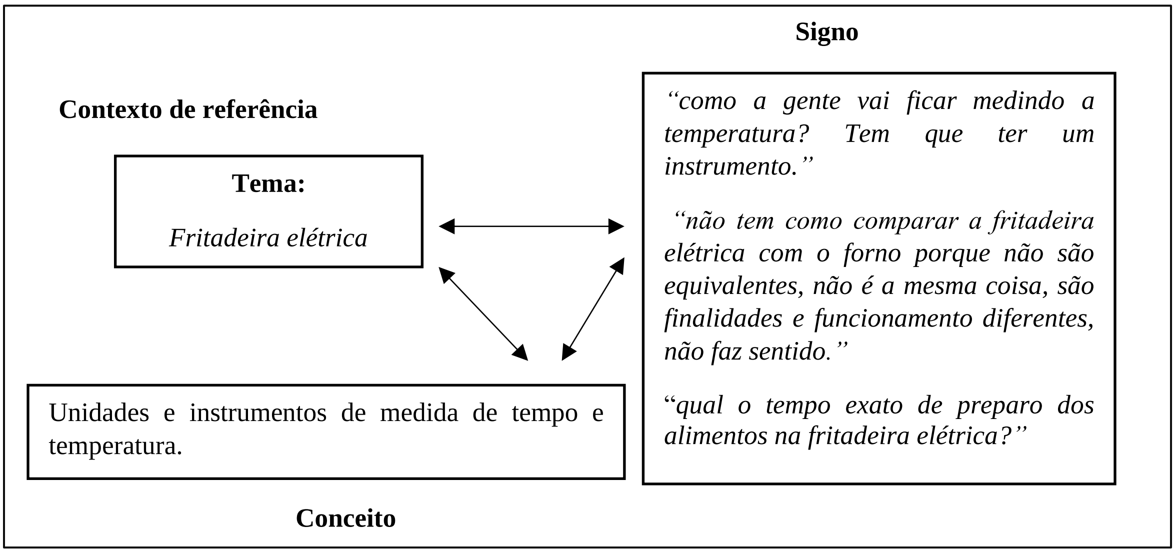
Ainda sem a delimitação do problema eles decidem de antemão coletar os dados de forma experimental. Assim, problemas relacionados à variação de temperatura são descartados após F1 questionar "*como a gente vai ficar medindo a temperatura? Tem que ter um instrumento".*

Essa afirmação de F1 sobre a inviabilidade de se trabalhar com a variação de temperatura está associada a conhecimentos da estudante sobre a aferição de temperatura e direciona o olhar dos demais para outra possibilidade de investigação: fazer um comparativo entre o tempo de preparo dos alimentos em forno convencional e na fritadeira elétrica. Essa ideia, no entanto, é abandonada quando F2 argumenta que "*não tem como comparar a fritadeira elétrica com o forno porque não são equivalentes, não é a mesma coisa, são finalidades e funcionamento diferentes, não faz sentido".* Esse signo que F2 manifesta sobre o funcionamento do forno convencional e da fritadeira elétrica, faz com que a ação de comparar as formas de cozimento dos alimentos nesses dois eletro doméstico seja descartada.

Diante de várias possibilidades consideradas inviáveis pelo grupo, F2 sugere que *"seria legal direcionar nosso olhar para o tempo de preparo de alguns alimentos específicos".* Desse modo o grupo assume encaminhamentos para a obtenção de um modelo matemático que os permita saber "*qual o tempo exato de preparo dos alimentos na fritadeira elétrica"* (F2 durante socialização da atividade com a turma).

Os signos manifestos/produzidos pelos alunos durante esse processo de definição do problema estão associados à "fritadeira elétrica". Assim, o triângulo epistemológico da Figura 20 ilustra a relação desses signos ao contexto de referência, tema investigado, e também aos conceitos que os alunos evocam nessa fase inicial do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Figura 20 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência o tema da atividade: Fritadeira elétrica.



Fonte: Os autores.

A fim de encontrar respostas para o problema que elegeram para estudo, os alunos se dedicam à coleta de informações, considerando os seguintes alimentos: pão de queijo, batata frita, costelinha suína e coxinha da asa de frango. As hipóteses consideradas para o processo de coleta dos dados são apresentadas na Figura 21.

Figura 21 - Hipóteses iniciais

<u>Hipótese 1:</u> A fritadeira deve ser pré-aquecida para a produção dos alimentos conforme indicação presente no manual.

<u>Hipótese 2:</u> A transferência de calor quando se realiza as "olhadinhas" no alimento para ver se está no "ponto" é considerada nula.

Fonte: Relatório final

Em momentos de orientação com a professora da disciplina e a pesquisadora os alunos apresentam a Tabela 2, que contém os dados coletados por F2 relativo ao tempo de preparo da costelinha suína.

Tabela 2 - Informações obtidas na primeira coleta sobre o tempo de preparo da costelinha suína

Quantidade	100g	200g	250g	400g
Temperatura	160°C	200°C	180°C	200°C
Tempo	8min35s	24min34s	28min19s	23min36s

Fonte: Relatório final

Ao apresentar essa tabela à professora e à pesquisadora e discutir sobre o procedimento de coleta dados F1 relata que a intenção de variar a temperatura foi no sentido de "*analisar se por dentro a carne ficaria mais saborosa".* Esse signo sinaliza que a aluna estava preocupada com o tempo de preparo, mas também com a qualidade dos alimentos. No entanto, a não padronização na coleta dos dados é indicada pela professora como uma impossibilidade de realizar uma análise comparativa entre eles nos moldes como os alunos pretendiam inicialmente.

Outro aspecto aventado pela professora em relação à coleta dos dados, que se refere ao uso ininterrupto da fritadeira, sugerindo que esse uso poderia acarretar numa redução do tempo de preparo devido a fritadeira já estar superaquecida, provoca os alunos a produzirem o seguinte signo: "*é nítido que cada um fez diferente e aí não dá para generalizar*". Tal signo embora revele que eles desconhecem como deveriam proceder para realizar uma coleta de dados empírica, traz à tona que F2 reconhece que há necessidade de padronização na coleta de dados. Assim, eles fixam a temperatura de modo a trabalhar apenas com a variação de tempo. Embora os alunos percebam o erro cometido nessa primeira coleta de dados, é somente a partir de um novo diálogo com a professora que eles traçam uma nova estratégia para a resolução do problema.

Ao refazerem os experimentos de modo a gerar novos dados, incorporam duas novas hipóteses à atividade de modelagem matemática, enunciadas na Figura 22.

Figura 22 - Hipóteses adicionadas à resolução da atividade Fritadeira elétrica

<u>Hipótese 3:</u> são consideradas temperaturas iguais no preparo de um mesmo tipo de alimento.
<u>Hipótese 4:</u> a temperatura inicial da fritadeira é a mesma para cada experimento.

Fonte: Relatório final.

A aluna F1 ao se responsabilizar pela coleta do tempo de preparo da batata frita considera sua experiência com a fritadeira para determinar a quantidade de batatas a serem preparadas. Assim, decide prepará-la de 100 em 100 gramas, já que "*o manual só fala que tem um tempo de preparo de 25min, mas não fala a quantidade de batata para esses 25 min*".

> "*Como eu já sei que com uma quantidade muito baixa de batatas não dá para colocar muitos minutos senão ninguém vai conseguir comer a batata. Então eu imaginei que esses 25 min teriam que ser analisados de 100 em 100, que foi o que eu fiz*" (F1 durante diálogo com o grupo e com a professora).

A Tabela 3 contém todos os dados coletados a partir dos experimentos realizados pelos alunos. Essa tabela corresponde a um signo que revela o conhecimento dos alunos no que diz respeito à organização e apresentação de dados estatísticos.

Tabela 3 - Dados obtidos sobre o tempo de preparo dos alimentos

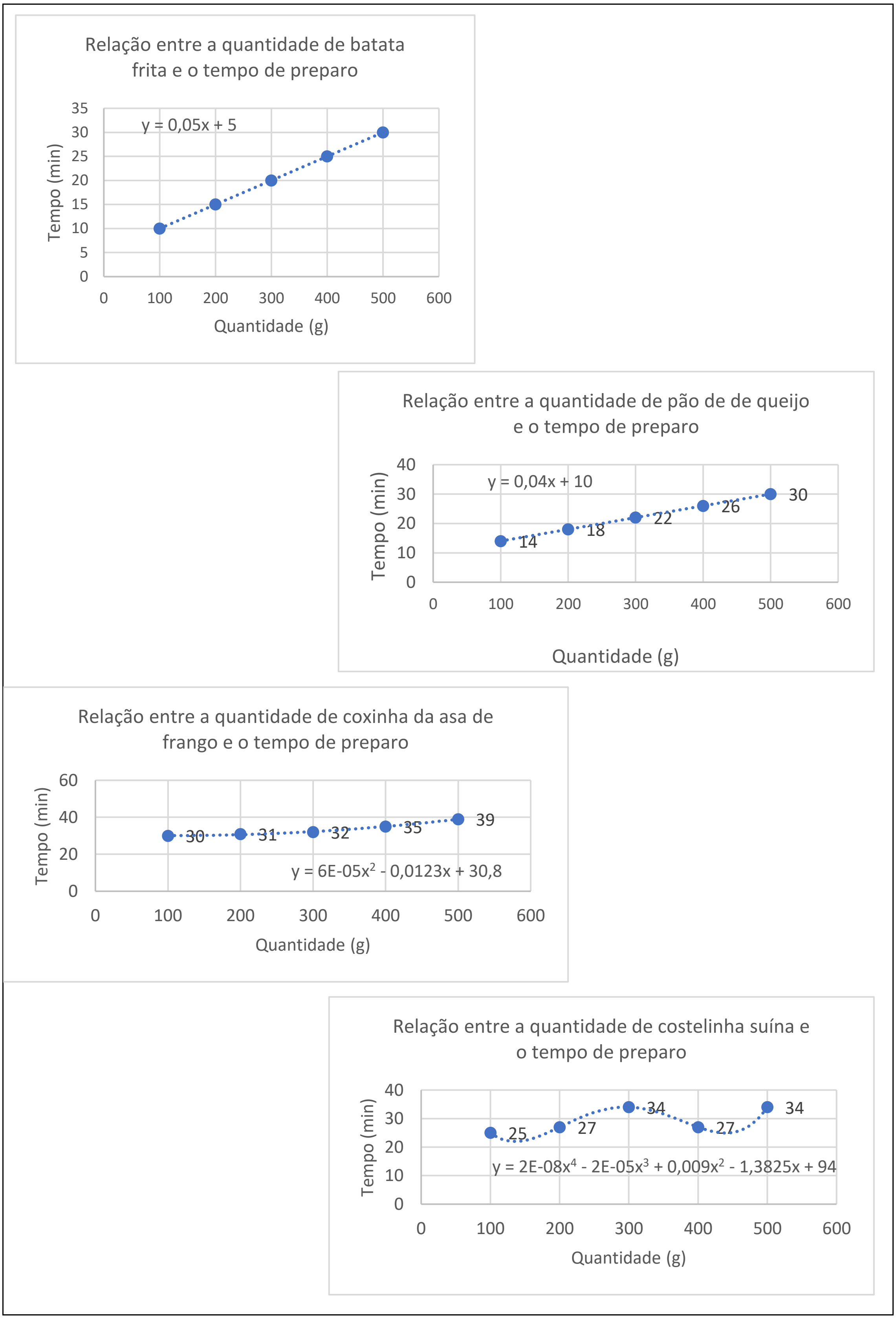
Temperatura (°C)	200	200	180	200
Alimento / **Quantidade (g)**	**Batata frita**	**Costelinha Suína**	**Pão de queijo**	**Coxinha da asa de frango**
100	10 min	25 min	14 min	30 min
200	15 min	27 min	18 min	31 min
300	20 min	34 min	22 min	32 min
400	25 min	27 min	26 min	35 min
500	30 min	34 min	30 min	39 min

Fonte: Relatório final.

Os dados chamam a atenção por sua "exatidão", principalmente no caso da batata frita e do pão de queijo. Para o caso da batata frita, por exemplo, F2 afirma "*que a cada 100g aumentadas aumentou 5 min*" no tempo do preparo. Questionada se foram esses mesmos os dados, sem qualquer arredondamento dos valores, argumenta que *"pior que deu! Eu fiquei impressionada!"*.

Com esses dados os alunos optam por encontrar um modelo matemático de cada um desses alimentos por meio da análise de regressão, utilizando a planilha do Excel (Quadro 8). Esses gráficos, muito embora sejam signos matemáticos eles não nos permitem inferir sobre o conhecimento matemático dos estudantes em relação ao objeto que referenciam, pois observamos que eles foram gerados de forma automática e mecânica por meio da plotagem dos dados no software.

Quadro 8 - Modelos matemáticos obtidos por meio da planilha do Excel



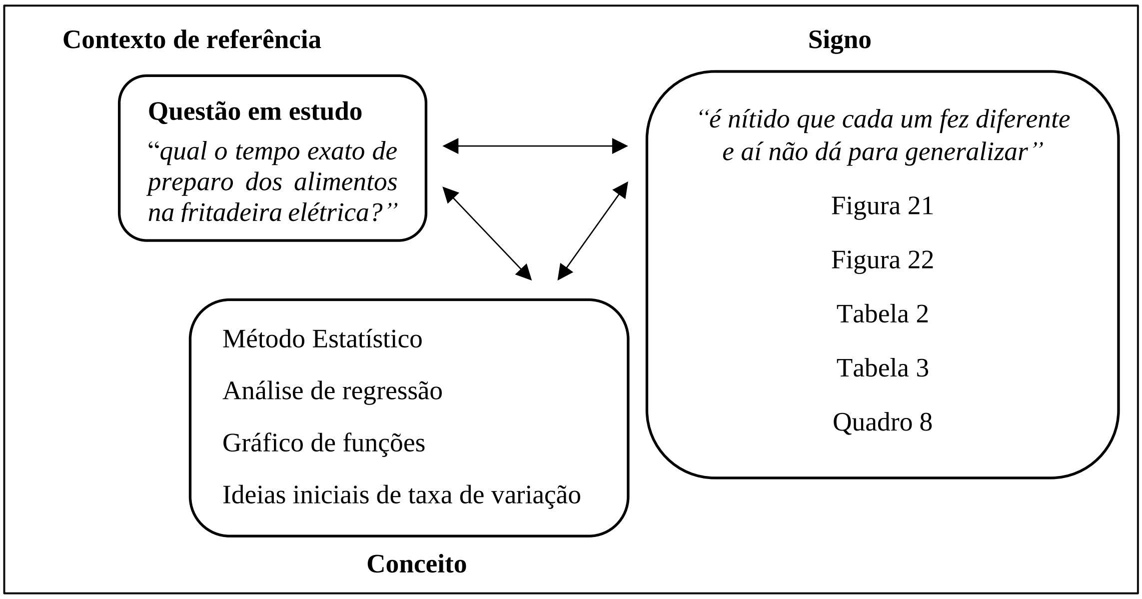
Fonte: Relatório final.

Um fator que pode ter contribuído para que os alunos adotassem essa estratégia pode estar relacionado ao fato de que eles cursavam paralelamente ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, a disciplina de Cálculo Numérico. Outro fator, associa-se ao fato de que F2 durante sua Iniciação Científica, desenvolveu algumas ações que considerava a obtenção de modelos matemáticos a partir de processos de ajuste de curvas.

A preocupação dos alunos de que os modelos poderiam não resultar em uma função que *"acomodasse certinho"* os dados coletados é revelada por F1 ao afirmar que: "*Todas elas deram a função certinho! A coxinha não deu tão exato, mas na curva ajustada daí deu".* Tal preocupação indica que os alunos não consideram que situações do cotidiano precisam ser "ajustadas" para serem compreendidas por lentes matemáticas. Ou seja, que situações do cotidiano, geralmente, não podem ser modeladas por meio das tradicionais funções apresentadas nos moldes como aparecem nos livros didáticos.

O triângulo epistemológico da Figura 23 considera como contexto de referência a questão investigada pelos alunos. A esse contexto estão atrelados signos e conceitos que, de algum modo, se associam a tal contexto.

Figura 23 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência a questão eleita para estudo na atividade Fritadeira elétrica



Fonte: Os autores.

Muito embora os alunos tenham obtido as funções que se ajustam aos dados coletados eles não recorrem a elas para realizar suas conclusões e análises. Isso porque eles decidem por fazer um comparativo entre os dados coletados (Tabela 3) e as informações presentes no manual da fritadeira. O Quadro 9, signo elaborado pelos alunos com a intenção de sintetizar a análise por eles realizada, indica que as funções do Quadro 8 não foram foco de análise nesse momento.

Quadro 9 - Comparativo realizado pelos alunos

Alimento	Informações contidas no manual da fritadeira	O que foi verificado/concluído pelos alunos
Batata frita	Para 300 a 700g o tempo de preparo é de 16 a 18 min a uma temperatura de 200°C.	Para 100 a 600g o tempo de preparo foi de 10 a 35 min a uma temperatura de 200°C.
Pão de queijo	O tempo de preparo é de 8 a 15 min a uma temperatura de 180°C.	Para 100 a 600g o tempo de preparo foi de 14 a 30 min a uma temperatura de 180°C.
Costelinha suína	Para o preparo de 2 a 4 peças o tempo de preparo é de 20 a 30 min a uma temperatura de 200°C	Para 100 a 500g o tempo de preparo é foi de 25 a 34 min a uma temperatura de 200°C.
Coxinha da asa de frango	Para o preparo de duas peças o tempo de preparo é de 20 min a uma temperatura de 200°C.	Para 100 a 500g o tempo de preparo foi de 30 a 39 min a uma temperatura de 200°C.

Fonte: Relatório final.

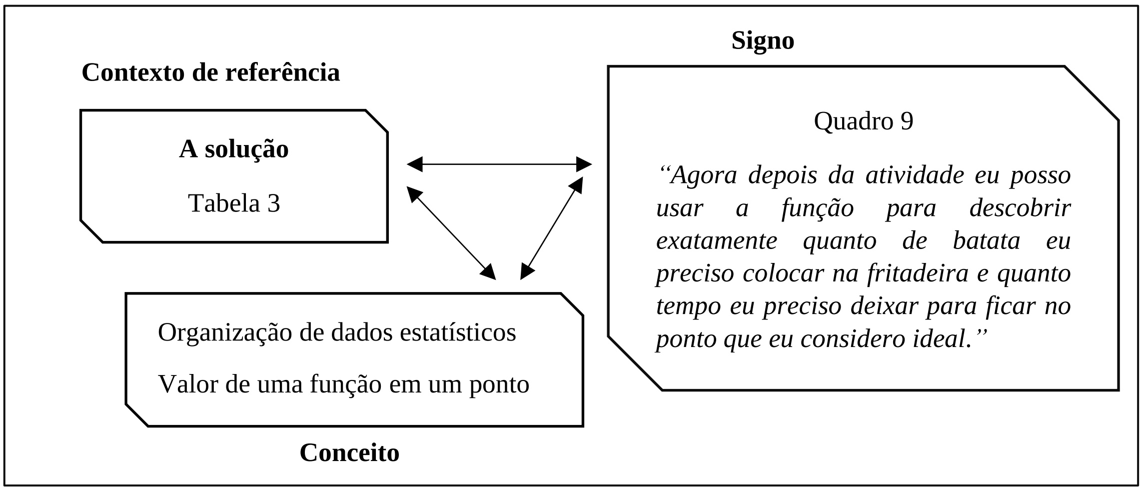
Os comparativos presentes nesse quadro retratam que os alunos não tecem considerações com profundidade de análise e discussão frente aos resultados que obtiveram e aos dados que coletaram. Apenas reescrevem o que fizeram no processo de coleta de dados em forma discursiva, sem atenção a detalhes como quantidades dos alimentos, que é muito importante no preparo deles. Caso tivessem realizadas discussões, novas questões poderiam ser levantadas, podendo, inclusive, suscitar outros conhecimentos matemáticos.

Embora os alunos não tenham apresentado o valor da função obtida em um ponto, para quaisquer dos alimentos que analisam, a declaração de F1 sobre as funções encontradas mostra seu conhecimento sobre a necessidade desse cálculo:

> *F1: Agora depois da atividade eu posso usar a função para descobrir exatamente quanto de batata eu preciso colocar na fritadeira e quanto tempo eu preciso deixar para ficar no ponto que eu considero ideal.*

O contexto de referência do triângulo epistemológico da Figura 24 é a solução assumida como resposta para o problema. A esse contexto de referência se associa os signos produzidos/manifestos no processo de análise dessa solução e também os conceitos mobilizados pelos alunos nesta etapa final da atividade de modelagem matemática.

Figura 24 - Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência a solução para a questão investigada na atividade Fritadeira elétrica

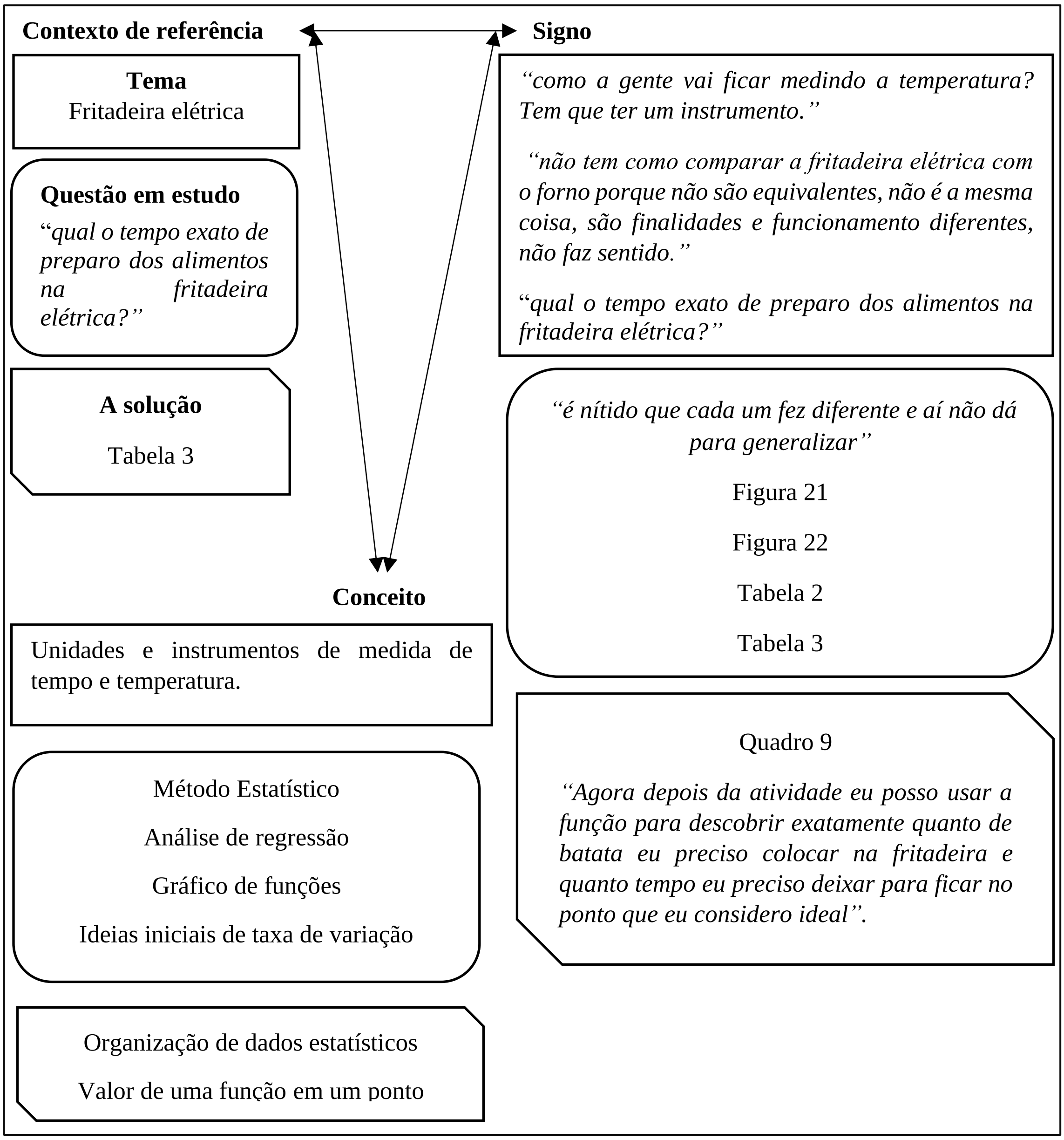


Fonte: Os autores.

A atividade, portanto, é dada como concluída por parte dos alunos, uma vez que eles parecem compreender que responderam ao problema eleito para estudo, mesmo que não tenham dado uma resposta precisa a ele. Isso, por um lado, depõe que eles entendem que em uma atividade de modelagem matemática é mais importante o processo que o produto, ou seja, a resposta final, já que ela pode ser um indicativo de solução para o problema e, por outro, que atividades de modelagem matemática são complexas e dependem de todas as escolhas e caminhos que optam na busca por solução para o problema em estudo.

Na Figura 25 ilustramos o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática a partir da junção dos triângulos epistemológicos das Figuras 20, 23 e 24. As formas geométricas utilizadas na construção de cada um desses triângulos é aqui considerada para denotar as nuances entre os três elementos dos vértices de cada um dos triângulos epistemológicos por nós construídos ao longo dessa atividade de modelagem matemática.

Figura 25 - Junção dos triângulos epistemológicos da atividade Fritadeira elétrica



Fonte: Os autores.

3.3. Uma leitura semiótica da atividade do Grupo 3: Estacionamento no campus da Universidade

Essa atividade de modelagem matemática, sintetizada na Figura 26, foi desenvolvida por um grupo de 3 alunos, aqui referenciados por E1, E2 e E3. Ao longo do desenvolvimento dessa atividade os alunos utilizaram a Wiki criada no *Moodle* para interações entre eles e entre eles e a professora e, realizaram apenas um encontro online com a professora da disciplina, acompanhada da pesquisadora. Assim como os demais grupos, esses alunos também entregaram um relatório final da atividade de modelagem desenvolvida.

Figura 26 - Síntese da atividade Estacionamento no campus da Universidade

Tema: Estacionamento no campus da universidade

Problema: Qual a capacidade de vagas que o estacionamento da universidade pode comportar, considerando um número específico de carros, de ônibus e de vans?

Formulado a partir do interesse de um dos integrantes do grupo em descobrir quantos carros cabiam no campus da universidade, no local destinado ao estacionamento.

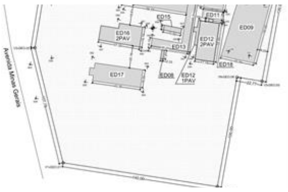
A busca por solução para esse problema:

- Pesquisar o melhor local para a implementação do estacionamento. Para isso os alunos utilizaram imagem de satélite disponibilizadas pelo Google Earth.

- Pesquisar a lei municipal que regulamenta a criação de estacionamentos.

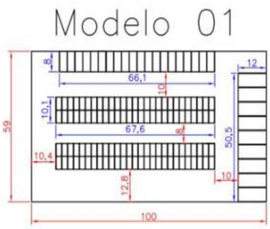
Dimensões das vagas (m)
Vaga carro: 2,40 x 5,00
Vaga ônibus: 5,50 x 12,00
Vaga van: 3,20 x 8,00
Faixas: 0,10

- Depois de definido o local, os alunos passaram a analisar a Planta Planimétrica Cadastral fornecida pela Universidade.

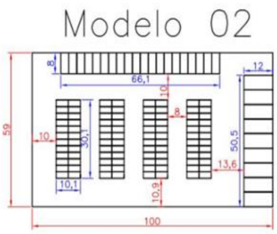


Simplificação: Os alunos consideraram como área útil para a construção do estacionamento uma área retangular de dimensões 59mx100m.

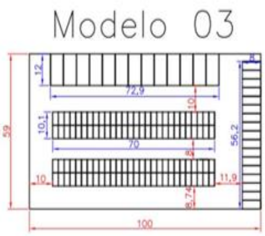
A partir disso eles desenvolveram três modelos de estacionamentos, variando entre eles a quantidade de carros, vans e ônibus.



9 vagas para ônibus
20 vagas para vans
108 vagas para carros



9 vagas para ônibus
20 vagas para vans
96 vagas para carros



13 vagas para ônibus
17 vagas para vans
112 vagas para carros

Para a comparação entre os modelos utilizaram um esquema de cores, onde o vermelho é o menos eficiente, o amarelo é intermediário e o verde é o que realmente otimiza a quantidade em relação ao todo.

Modelo 01			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área total do estacionamento:	5.900,00	--	--
Área de circulação:	3.399,68	--	58%
Área destinada aos ônibus:	606,00	9	10%
Área destinada às vans:	528,80	20	9%
Área destinada aos carros:	1.365,52	108	23%

Modelo 02			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área total do estacionamento:	5.900,00	--	--
Área destinada aos ônibus:	3549,16	--	60%
Estacionamento de ônibus:	606	9	10%
Área destinada às vans:	528,8	20	9%
Área destinada aos carros:	1216,04	96	21%

Modelo 03			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área de Estacionamento:	5.900,00	--	--
Área de circulação:	3161,6	--	54%
Estacionamento de ônibus:	874,8	13	15%
Estacionamento de van:	449,6	17	8%
Estacionamento de carro:	1414	112	24%

Por meio deste esquema de cores, os alunos indicam que o modelo que melhor atende à problemática inicial é o modelo que comporta 13 vagas de ônibus, 17 vagas para vans e 112 vagas para carros, além de preservar 54% da área útil considerada como área de circulação.

Fonte: Os autores

O grupo inicialmente composto por 3 alunos, E1, E2 e E3 investigou a capacidade de vagas no estacionamento interno do campus da universidade. Devido a problemas pessoais o aluno E1 deixou de participar das aulas. Mesmo que a maior parte da atividade tenha sido desenvolvida pelas alunas E2 e E3, as contribuições de E1 na fase inicial da atividade foram por nós incluídas nas análises,

O desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática se inicia a partir do interesse do aluno E1 em pesquisar "*quantos carros cabem no estacionamento externo do nosso campus*". Visto que E1 sugeriu considerar o estacionamento externo à faculdade, E2 questiona: *"eu não sei se essa questão de considerar o espaço em frente a faculdade é viável ou não, ou então só a parte dos fundos"*, demonstrando compreender a necessidade de delimitação do espaço para o cálculo do espaço destinado ao estacionamento.

A pergunta: *"o pessoal estaciona ali, mas ali não tem faixa amarela?"*, realizada pela professora da disciplina, mobiliza os alunos a considerar que que a área externa ao campus em discussão não era própria para o estacionamento de veículos, assim, decidem utilizar apenas o estacionamento ao redor do campus, na parte interna do campus.

Definido o espaço a ser destinado como estacionamento, E2 sugere: *"temos que levar em consideração também, o modelo dos carros. Hatch ou sedan? Ou pesquisar um tamanho médio dos carros... Ou ainda escolher um modelo específico, o que acham? Quantos jeep renegade cabem no estacionamento? "*

Ao sugerir considerar apenas quantos "*jeep renegade cabem no estacionamento"* E2 propõe uma estratégia para se chegar à solução do problema: a de considerar o tamanho das vagas a partir do modelo dos carros. Porém, essa estratégia não foi aceita pelos demais alunos do grupo e foi, portanto, não considerada. O que os alunos fizeram foi investigar na legislação municipal o tamanho padrão das vagas de estacionamento.

Um refinamento das ideias e sugestões que os alunos tinham foi proposto pela professora da disciplina: "*vocês têm o espaço, mas o que é melhor? Qual a melhor disposição dos carros no estacionamento para que o estacionamento seja aproveitado da melhor forma possível?".*

E3 compreende o questionamento da professora e opina que o estacionamento *"não é muito bem feito".* Este signo sinaliza que diante da pergunta da professora, E3 refletiu novamente sobre a situação em estudo e percebeu que a forma como os carros normalmente são estacionados não é a melhor maneira de aproveitar o espaço. De acordo com Veronez, Castro e Martins (2018), ações do professor, como a que relatamos acima, possibilitam ao aluno a compreensão do que ele vai investigar e fomenta intervenções que alterem o modo de ver o problema. O Quadro 10 apresenta o problema reformulado.

Quadro 10 - Problema reformulado.

Qual a capacidade de vagas que o estacionamento da universidade pode comportar considerando um número específico para a quantidade de carros, ônibus e vans?

Fonte: Relatório final.

Sobre a definição dos tipos de veículos, E2 diz que foi porque a *"gente se atentou ao público da faculdade também. Não é todo mundo que vai de carro, né? Não tem só ônibus e nem vans. Então nós decidimos considerar as vagas de carro, ônibus e vans. A gente também pesquisou na legislação da cidade as regras de estacionamento".* Percebemos na fala de E2 que os alunos refletiram sobre a situação em estudo e desconsideram a estratégia inicial, que era considerar o tamanho das vagas para os modelos de veículos, ao assumirem os três tipos de veículos que ficam estacionados no campus.

Da relação entre os signos produzidos pelos alunos e o tema investigado "capacidade do estacionamento no campus da universidade", construímos o triângulo epistemológico da Figura 27.

Figura 27 - Triângulo epistemológico com contexto de referência o tema da atividade Estacionamento no campus da Universidade

Contexto de referência

Tema

Estacionamento do campus da universidade.

Signo

"quantos carros cabem no estacionamento externo do nosso campus"

"eu não sei se essa questão de considerar o espaço em frente a faculdade é viável ou não, ou então só a parte dos fundos"

"mas não é muito bem feito."

Quadro 10

Conceito

Organização espacial.

Área como preenchimento de um espaço.

Fonte: Os autores.

Depois de definir o problema, os alunos se dedicaram à obtenção das medidas do estacionamento. Devido à pandemia da Covid-19 o acesso ao campus estava impedido, então não foi possível "medir na trena" como desejava E2. A alternativa encontrada foi analisar a imagem do campus via satélite. A Figura 28 mostra, com destaque, a região que os alunos consideraram para a solução do problema.

Figura 28 - Imagem de satélite do campus da universidade com destaque para a região de estacionamento

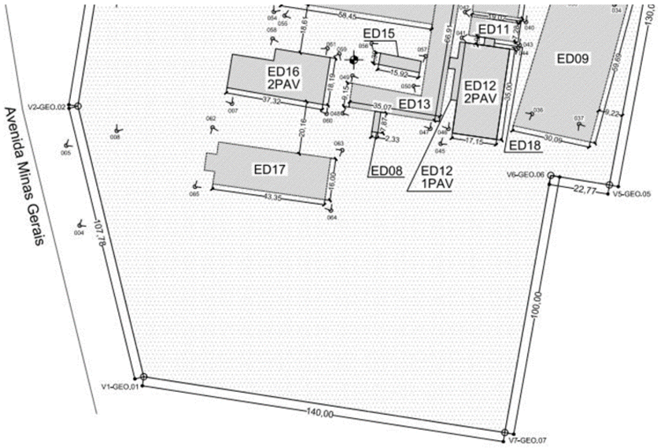
Fonte: Relatório final.

A imagem apresentada na Figura 28 não forneceu informações suficientes para a resolução do problema, pois não continha as medidas da região, E3 então argumenta: *"Utilizamos uma visão de satélite como parte da coleta de dados, mas a gente não fez a coleta em campo [...] a gente teria que medir né? Mas a gente não fez a medição lá em campo. Então parou nessa etapa."*

Os signos "*mas a gente não fez a coleta em campo", "que a gente teria que medir né"* e "*mas a gente não fez a medição lá em campo"* mostram que E3 sente necessidade de obter os dados empiricamente. Possivelmente essa “necessidade” de coletar os dados em campo, venha dá compreensão de que a Modelagem Matemática utiliza dados reais, na maioria das vezes obtidos por meio da experimentação.

Diante desse impasse, de querer medir o espaço do estacionamento e não poder em virtude do acesso restrito ao campus no período da pandemia, as discussões se encaminharam no sentido de verificar se existia uma planta planimétrica do campus. Ao ter acesso a essa planta, os alunos identificaram o espaço que corresponde ao estacionamento em foco (Figura 29).

Figura 29 - Parte da Planta planimétrica do campus



Fonte: Relatório final.

Da análise desse espaço os alunos permaneceram considerando uma figura retangular como melhor aproximação do espaço destinado ao estacionamento, assim como indicado na Figura 28. Contudo, ponderamos que a região poderia ter sido dividida em outras figuras a fim de área útil do estacionamento ficasse aumentada. A simplificação demasiada do problema, mostra que os alunos optaram por um caminho que facilitou a obtenção de uma solução.

O fato da atividade ter sido desenvolvida de forma remota deu mais espaço à autonomia dos alunos, porém, a professora da disciplina, por vezes, não teve oportunidade de sugerir ações e estratégias que aguçassem o conhecimento matemático deles.

E3 ao relatar o processo de obtenção das medidas da região retangular: *“a gente foi fazendo uns cálculos a maioria à mão e a gente foi por estimativa mesmo. Com base nas edificações a gente delimitou essa área e chegou a uma conclusão de mais ou menos a medida de cinquenta e nove por cem metros quadrados”* sugere que a obtenção dessas medidas não se deu por um processo muito criterioso além de que “metros quadrados” foi utilizado de forma equivocada como unidade de medida para as dimensões da região retangular.

Para a determinação do tamanho das vagas os alunos se ampararam na legislação municipal que orienta sobre o tamanho mínimo da vaga para cada tipo de veículo, no entanto, E2 pontua que os valores foram alterados: *"mas a gente aumentou ainda, né? A gente colocou uma proporção um pouco maior como desvio padrão".* O Quadro 11 contém as medidas definidas pelos alunos.

Quadro 11 - Tamanho das vagas

Vaga de carro: 2,40m x 5,00m
Vaga ônibus: 5,50m x 12,00m
Vaga van: 3,20m x 8,00m
Faixas: 0,10m

Fonte: os autores.

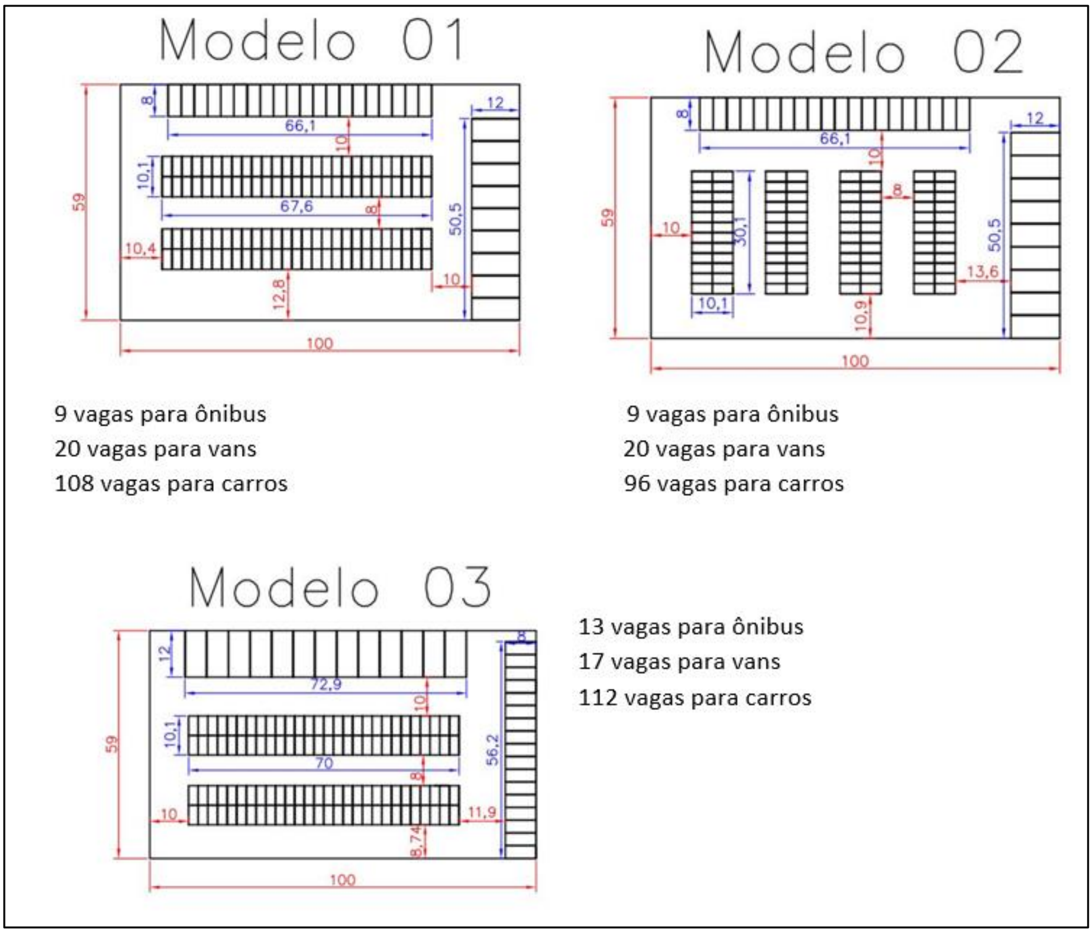
O signo *"dois ponto quatro por cinco metros quadrados é a vaga de carro, cinco ponto cinco por doze metros quadrados é de ônibus e três ponto dois por oito metros quadrados a de vans"* manifesto por E3 durante a socialização da atividade, referindo-se aos dados do Quadro 11, sinaliza novamente o equívoco acerca das unidades de medida de área.

A partir dessas medidas os alunos tomam a seguinte atitude: "*A gente decidiu desenhar três modelos de estacionamento (E2)".* Os primeiros modelos foram realizados à mão no papel, o que de acordo com E3 se tornou *"inviável"* pois oferecia *"muito risco de você fazer uma marquinha não tão exata e prejudicar o seu projeto, sobrando espaço ou faltando espaço".* Assim, optaram por fazer os projetos no software AutoCad[5] que, conforme afirmado por E2, "refinou" o projeto e deixou *"com as medidas exatas considerando também as faixinhas que são uma medida bem pequena".*

Os alunos explicam que para a criação dos projetos (Figura 30), as quantidades de vagas de ônibus e vans foram *"escolhidas arbitrariamente de acordo com a estimativa real de cada veículo que frequenta a universidade".* E2 relata que *"primeiro a gente posicionou as vagas de ônibus e vans e com base nessas vagas a gente colocou então os espaços de circulação e de manobra e deixou o espaço restante para as vagas de carro".*

[5] Software não livre utilizado principalmente para a elaboração de desenhos técnicos em duas dimensões e para criação de modelos tridimensionais.

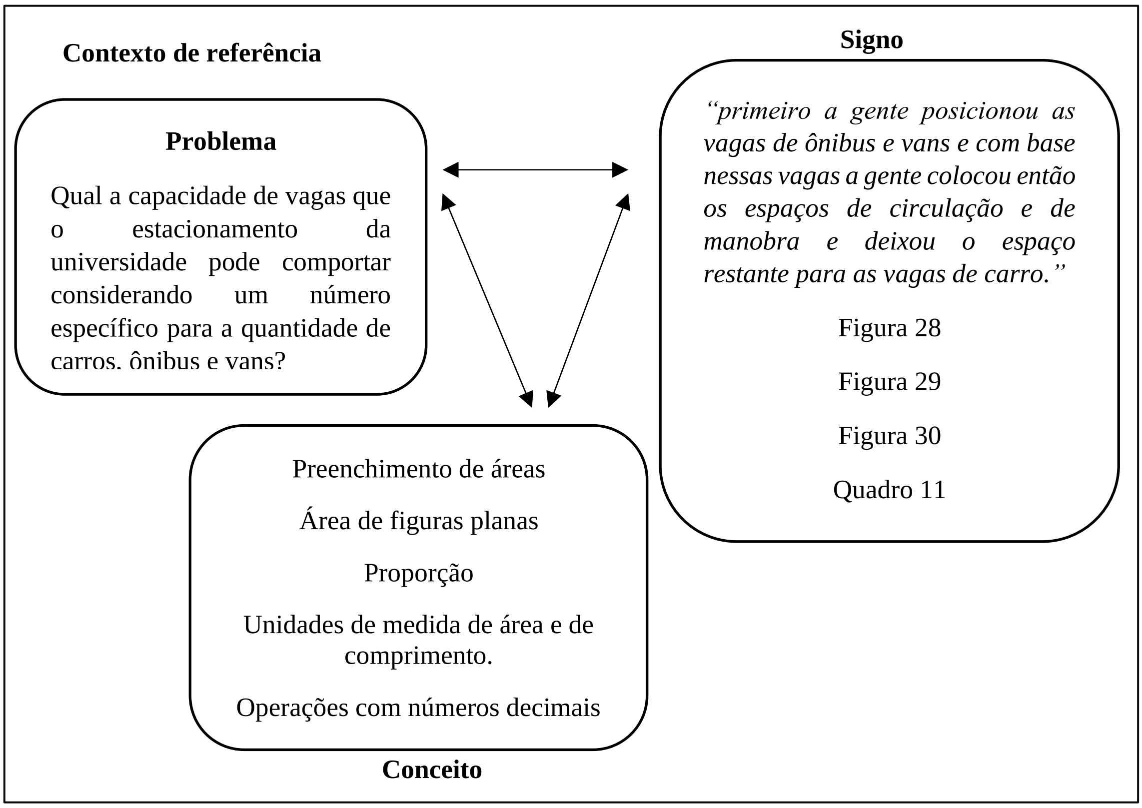
Figura 30 - Projetos de estacionamento propostos pelos alunos



Fonte: Relatório final

Esses modelos, que correspondem a signos associados ao problema em investigação, bem como os outros signos que também se atrelam a ele favoreceu a construção do triângulo epistemológico da Figura 31.

Figura 31 – Triângulo epistemológico com contexto de referência o problema da atividade Estacionamento no campus da Universidade



Fonte: Os autores.

O signo *"Como que a gente compara esses modelos? Porque em um item aumenta as vagas e no outro diminui"* manifesto por E2 revela a dificuldade dos alunos em comparar os modelos obtidos. Os alunos resolveram inicialmente *"comparar a porcentagem dos espaços ocupados pelas vagas dos veículos com a porcentagem de espaço restante, de circulação"* e para "*ter um relatório de dados e fazer os cálculos"* utilizaram a planilha do Excel.

A intenção dos alunos ao fazer as tabelas era de facilitar a comparação dos modelos, no entanto, E3 afirma que "*conforme a gente foi fazendo a tabela isso ficava mais difícil de ver",* pois, "*por exemplo no modelo um teve mais quantidade de vans e no modelo três teve menos, mas em compensação a organização, a quantidade das outras vagas e a questão da otimização do espaço aproveitado, foi maior".*

Ao elencar um objetivo: *"deixar o mínimo de espaço livre e ocupar o máximo"*, os alunos refletem sobre as estratégias utilizadas. Um esquema de cores é então utilizado para a comparação dos modelos: *"a gente fez um esquema de cores para validar a nossa solução. Nesse esquema de cores o vermelho é o menos eficiente. O amarelo é intermediário. Quer dizer que tem um mais e que tem menos eficiente do que ele. E o* *verde é o que realmente otimiza a quantidade em relação ao todo"* (E3). Tal esquema aparece ilustrado no Quadro 12.

Quadro 12 - Análise dos projetos por meio de um esquema de cores

Modelo 01			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área total do estacionamento:	5.900,00	--	--
Área de circulação:	3.399,68	--	58%
Área destinada aos ônibus:	606,00	9	10%
Área destinada às vans:	528,80	20	9%
Área destinada aos carros:	1.365,52	108	23%

Modelo 02			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área total do estacionamento:	5.900,00	--	--
Área de circulação:	3549,16	--	60%
Área destinada aos ônibus:	606	9	10%
Área destinada às vans:	528,8	20	9%
Área destinada aos carros:	1216,04	96	21%

Modelo 03			
Tipo	**(m²)**	**N° de vagas**	**%**
Área de Estacionamento:	5.900,00	--	--
Área de circulação:	3161,6	--	54%
Área destinada aos ônibus:	874,8	13	15%
Área destinada às vans:	449,6	17	8%
Área destinada aos carros:	1414	112	24%

Fonte: Os autores (Adaptado do relatório final).

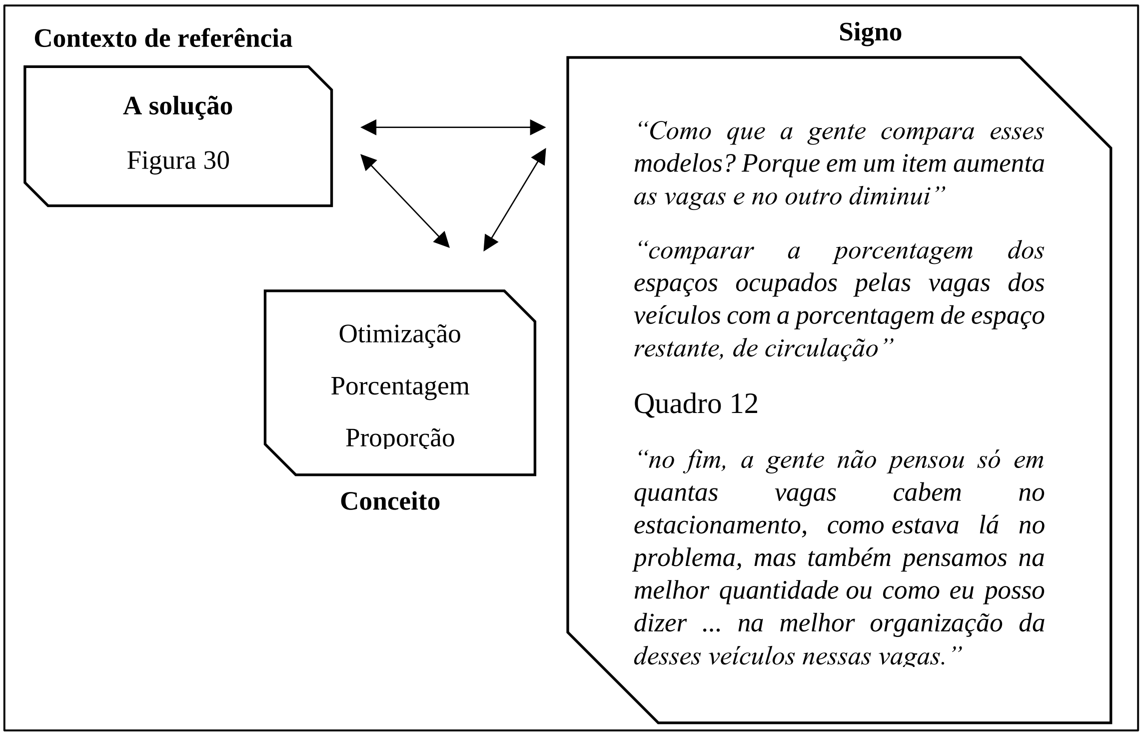
Nesse esquema de cores criado pelos alunos a linha "Área destinada às vans" está preenchida em verde nos modelos 01 e 02 pois estes modelos otimizam a quantidade de vagas desse tipo de veículo, 20 vagas, se comparado ao modelo 03 que comporta apenas 17 vagas para vans. Em contrapartida o modelo 03 otimiza a quantidade de vagas para carros e ônibus.

Comparando os três projetos a partir do modelo do esquema de cores, os alunos concluem que o modelo 3 é a solução mais adequada para o problema, pois visualmente é o quem mais apresenta linhas verdes e *"apesar de não superar a capacidade de vans* *que os outros modelos proporcionaram, ainda se mostra mais eficiente ao passo que deixou menos espaço livre sem prejudicar as vias de manobra, entrada e saída”* (E3).

Sobre o tema em estudo E2 pontua que *“no fim, a gente não pensou só em quantas vagas cabem no estacionamento, como estava lá no problema, mas também pensamos na melhor quantidade ou como eu posso dizer ... na melhor organização desses veículos nessas vagas.”* Inferimos, portanto, a partir desta fala que E2 refletiu sobre a atividade de modelagem matemática como um todo, e o signo “c*omo estava lá no problema”,* sinaliza que o aluno compreendeu que no problema, da forma como foi apresentado por eles, era sugerido que se pensasse apenas na quantidade de vagas, e não na otimização do espaço.

Na Figura 32, apresentamos o triângulo epistemológico por nós construído, considerando os signos manifestos pelos alunos na ação de validação da solução obtida em associação com o contexto de referência a que eles se referenciam e os conceitos matemáticos suscitados nessa ação.

Figura 32 - Triângulo epistemológico com contexto de referência a solução da atividade Estacionamento no campus da Universidade



Fonte: Os autores.

Na Figura 33 ilustramos o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática a partir da junção dos triângulos epistemológicos das Figuras 27, 31 e 32. As formas geométricas utilizadas na construção de cada um desses triângulos é aqui considerada para denotar as nuances entre os três elementos dos vértices de cada um dos triângulos epistemológicos por nós construídos ao longo dessa atividade de modelagem matemática.

Figura 33 - Junção dos triângulos epistemológicos da atividade Estacionamento no campus da Universidade

Contexto de referência

Tema
Estacionamento do campus da universidade.

Problema
Qual a capacidade de vagas que o estacionamento da universidade pode comportar considerando um número específico para a quantidade de carros, ônibus e vans?

A solução
Figura 30

Signo

"quantos carros cabem no estacionamento externo do nosso campus."
"eu não sei se essa questão de considerar o espaço em frente a faculdade é viável ou não, ou então só a parte dos fundos."
"mas não é muito bem feito."
Quadro 10

"primeiro a gente posicionou as vagas de ônibus e vans e com base nessas vagas a gente colocou então os espaços de circulação e de manobra e deixou o espaço restante para as vagas de carro"
Figura 28
Figura 29
Figura 30
Quadro 11

"Como que a gente compara esses modelos? Porque em um item aumenta as vagas e no outro diminui"
"comparar a porcentagem dos espaços ocupados pelas vagas dos veículos com a porcentagem de espaço restante, de circulação"
Quadro 12
"no fim, a gente não pensou só em quantas vagas cabem no estacionamento, como estava lá no problema, mas também pensamos na melhor quantidade ou como eu posso dizer ... na melhor organização da desses veículos nessas vagas."

Conceito

Organização espacial
Preenchimento de áreas

Preenchimento de áreas
Área de figuras planas
Proporção
Unidades de medida de área e comprimento
Operações com números decimais

Otimização
Porcentagem
Proporção

Fonte: Os autores.

3.4. Resultados e discussões

Na análise que empreendemos recorremos aos signos produzidos/manifestos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O contexto em que essas atividades foram desenvolvidas seguem características das perspectivas educacional e cognitivista indicada por Kaiser e Sriraman (2006). Dado ao nosso objetivo de pesquisa não somente os signos matemáticos são importantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Olhamos para todos os signos, reconhecendo-os, como sugere Peirce (2005), que eles são instrumentos pelos quais conhecimentos e pensamentos são manifestos.

O olhar para os signos no contexto de triângulos epistemológicos nos é possibilitado considerá-los em associação com os outros dois vértices do triângulo: contexto de referência e conceito. Nesse modo de olhar, os signos não são vistos em separado, mas analisados segundo o objeto que referenciam e os conceitos que evocam.

Como nas atividades de modelagem matemática consideradas os signos produzidos/manifestos pelos alunos em determinado momento eram reconhecidos como contextos de referência e, portanto, levava à produção de novos signos, de naturezas diferentes, e evocava conceitos distintos, somos motivadas a retratar cada uma dessas atividades a partir de três triângulos epistemológicos. Na construção desses triângulos nos pautamos no triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática proposto por Veronez (2013) e, nesse sentido, os contextos de referência se alternam entre o tema ou problema em estudo, a busca pela solução e a solução.

Os triângulos epistemológicos das Figura 14, 20 e 27 que consideram conexões entre signos, conceito e contexto de referência atrelados ao tema ou fenômeno estudado, contêm signos "preliminares", que de certa forma, foram produzidos pelos alunos quando consideraram alguns aspectos do fenômeno em estudo, mas, desconsideram outros, por exemplo, quando as alunas na atividade Lavagem de roupas, formulam uma hipótese inicial sem considerar, na prática, como se dá a organização das roupas para realizar a lavagem. Também na atividade "Estacionamento no campus da universidade" em que os alunos inicialmente intentam considerar como área de estacionamento um espaço que era inviável no contexto da investigação.

Inferimos, a partir desses signos, que na atividade Lavagem de roupas, as alunas inicialmente se distanciam do problema em si e consideram apenas a necessidade de elaborar hipóteses, já que estão desenvolvendo uma atividade de modelagem matemática. Ou seja, elas incorporam o que os referenciais teóricos enfatizam: que “a busca por uma relação entre o problema e um objeto matemático é explicitada na elaboração de hipóteses” (RAMOS, 2020, p. 40) e, sem querer, ao enunciar a hipótese inicial se distanciam do problema investigado. Somente após diálogo com a professora da disciplina é que conceitos matemáticos e extramatemáticos até então desconsiderados na atividade são “ativados” e conduzem à reformulação dessa hipótese. Com isso, evidenciamos que o papel do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática é relevante e pode contribuir para que os alunos ampliem seus modos de pensar acerca das escolhas e encaminhamentos que estavam assumindo e avaliem outras possibilidades de encaminhamentos. Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Ramos (2020) são alguns dos autores que nos lembram da importância do professor na produção dos signos dos alunos.

Nas três atividades de modelagem matemática intervenções do professor foram relevantes, sobretudo na definição dos problemas. Vários dos signos dos triângulos epistemológicos das Figuras 14, 20, e 27 emergiram da ação de reflexão dos alunos diante de alguma interferência da professora. Por exemplo, no triângulo epistemológico da Figura 27, referente à atividade do projeto de estacionamento, o problema só foi delineado a partir do comentário da professora a respeito da melhor disposição dos carros. O mesmo ocorre na atividade Lavagem de roupas, quando as alunas se atentam à questão da combinação das peças que podem, na prática, serem lavadas juntas, somente depois de um questionamento da professora.

Cabe destacar que o contexto remoto em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas dificultou com que interações entre professor e alunos acontecessem em determinados momentos e isso, de certo modo, culminou em uma abordagem mais “simplista” do fenômeno em estudo ou na não ampliação no seus modos de ver a situação analisada, como na atividade Estacionamento no campus da Universidade, quando os mesmo estando de posse da planta planimétrica do campus (Figura 29), continuam a investigar a mesma região retangular que já haviam identificado na imagem de satélite (Figura 28). Por outro lado, esse contexto remoto favoreceu com que os alunos fossem mais autônomos. Contudo, destacamos a importância do papel do professor, na condição de orientador, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Nos triângulos das Figuras 14, 20 e 27 indicamos que há signos que incorporam conhecimentos adquiridos a partir do contato com informações acerca do fenômeno investigado. Assim, esses signos emergiram da coleta de dados qualitativos e quantitativos acerca da temática em estudo, atrelados à fase inteiração, conforme denotada por Almeida, Silva e Vertuan (2012). A informação obtida acerca de como a massa da roupa deve ser considerada na lavagem constituiu-se em um novo conhecimento, manifesto por meio do signo: "Por isso que a gente fez a experiência com a roupa seca. A gente não considerou a roupa molhada", que permitiu com que as alunas refletissem acerca de suas ideias iniciais. Na atividade da "fritadeira elétrica" o conhecimento que os alunos têm sobre o funcionamento dela e também sobre os instrumentos que seriam necessários à coleta dos dados, favorece com que os problemas iniciais considerados por eles fossem descartados, já na atividade "Estacionamento no campus da universidade" o signo "a gente também pesquisou na legislação da cidade as regras de estacionamento" também revela a incorporação de novas informações acerca da temática investigada.

Ponderamos então que os signos produzidos pelos alunos com referência ao tema em estudo revelam, sobretudo, conceitos extramatemáticos e, embora não se refiram diretamente a objetos matemáticos, carregam em si, aspectos dos conceitos matemáticos que são aludidos como sendo importantes diante do fenômeno estudado. Isso nos provoca a inferir que os triângulos epistemológicos trazem à tona conhecimentos dos alunos sobre o fazer modelagem matemática.

Inferimos também que as atividades de modelagem matemática analisadas possibilitaram que os alunos discutissem por meio da matemática situações reais e de seu interesse e, as compreendessem sob outros enfoques e a partir de interesses distintos dos inicialmente indicados. Meyer, Caldeira e Malheiros (2018) defendem uma Modelagem Matemática que "começa com o que se sabe" (p. 43), e que esse o que se sabe se amplia e pode ser modificado quando conceitos matemáticos necessários para a solução do problema em estudo passam a ter significado. Isso se aproxima das assertivas de Steinbring (2005) em relação aos conceitos obterem significado na inter-relação entre signo e contexto de referência e que os vértices do triângulo não podem ser determinados sem considerar os sujeitos (professores e alunos).

Mesmo o professor não tendo por interesse "ensinar matemática" para esses alunos (futuros professores) por meio das atividades de modelagem matemática, não podemos deixar de destacar que o desenvolvimento dessas atividades favoreceu discussão de uma variedade de conceitos e ideias matemáticas, caracterizando as perspectivas educacional e cognitivista assumidas nesta investigação. Assim, os triângulos epistemológicos nos revelam que atividades de modelagem matemática tem potencial para que o professor “apresente os conteúdos matemáticos necessários para uma compreensão de sua própria realidade e o fortalecimento dos vínculos sociais” (Caldeira, 2009, p. 37).

O processo de busca por uma solução para a questão eleita para estudo ilustrado nos triângulos epistemológicos das Figuras 15, 23 e 31 indicam conexões entre contexto de referência (problema), signo e conceito, considerados os signos produzidos/manifestos pelos alunos, a investigação empreendida por eles e as ferramentas ou objetos matemáticos que recorrem com vistas a solucionar a questão investigada.

O modo como as alunas, na atividade Lavagem de roupas, resolvem a equação (ax = 10000), manifesto nos signos que produzem em associação com o problema, revela, ao mesmo tempo, que elas consideram o problema em estudo, mas se distanciam do que efetivamente, na prática, é possível colocar de roupa na máquina para lavar. Situação similar ocorre, quando na atividade Estacionamento no campus da Universidade, o aluno sugere que sejam considerados apenas um modelo de carro como referência para o tamanho das vagas do estacionamento. Em ambos os exemplos os alunos parecem assumir que têm um problema matemático para resolver, sem levar em conta que esse problema é oriundo de uma situação com referência na realidade. Inferimos, portanto, que eles, nesse momento, se distanciam da compreensão de Almeida, Silva e Vertuan (2012) no que se refere ao que vem a ser uma atividade de modelagem matemática.

Outro signo que denota que as alunas na atividade Lavagem de roupas se distanciam do problema em estudo é explicitado nas combinações indicadas no Quadro 5. Ao considerar tais combinações elas apresentam as possibilidades de lavagem, considerados os três grupos de roupas (G1, G2 e G3) que organizam amparadas nas hipóteses assumidas, mas isso não responde ao problema que está sendo investigado. O abandono desses signos, no entanto, sinaliza que as alunas reconhecem que se distanciaram do problema.

Se por um lado, nas atividades Lavagem de roupas e Estacionamento no campus da universidade os alunos se distanciam da situação problema e se preocupam inicialmente em apenas resolver um problema matemático, na atividade "Fritadeira elétrica" os alunos demonstram se preocupar mais com a situação real e se distanciam de aspectos matemáticos presentes no problema. Ao "analisar se por dentro a carne ficaria mais saborosa" os alunos manifestam preocupação com a qualidade do alimento, mas esquecem das implicações disso na obtenção do tempo de preparo do alimento. O reconhecimento desses distanciamentos, por parte dos alunos, de certo modo, indica que eles realizaram o que é previsto na fase interpretação e validação.

Os signos indicados no triângulo epistemológico da Figura 15 denotam que os alunos, na atividade Lavagem de roupas, além de se preocuparem em responder à questão que elegeram para estudo, buscam encontrar uma solução, em forma de modelo matemático. Contudo, o signo que se configura um modelo matemático para a situação em estudo não carrega todas as especificidades dessa situação. Por exemplo, as alunas não incorporam ao modelo matemático o conhecimento de que se pode colocar uma quantidade menor que a capacidade da máquina de lavar. Nesse sentido, o triângulo epistemológico revela que nem todos os conceitos matemáticos acionados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática estavam em conexão com o contexto de referência em foco nessa fase da atividade, a saber, o problema em estudo.

Nos triângulos epistemológicos das Figura 17, 24 e 32 que considera conexões entre signos, conceitos e contexto de referência relacionados à análise acerca da solução obtida para o fenômeno estudado, os signos produzidos/manifestos pelos alunos se associam tanto a conhecimentos matemáticos como não matemáticos. Por exemplo, na atividade Lavagem de roupas, na tentativa de responder ao problema investigado, L2 incorpora à solução um conhecimento oriundo de suas experiências cotidianas e descarta a opção de se lavar 100 peças de fronhas a partir do signo: "mas esta é uma roupa de cama, que não se troca todos os dias, dificilmente teremos 100 peças de fronhas para lavar. Portanto, a quantidade está entre 5 e 50 peças de roupas", que enuncia. Porém, por outro lado, desconsidera que é totalmente impossível lavar, em uma mesma lavagem, 5 edredons.

O signo da Figura 16 assumido pelas alunas para representar que o problema investigado pode assumir infinitas soluções, denota que elas reconhecem que um problema em Modelagem Matemática não precisa ter resposta única. Da mesma forma, o signo "*posso usar a função para descobrir exatamente quanto de batata eu preciso colocar na fritadeira e quanto tempo eu preciso deixar para ficar no ponto que eu* *considero ideal"*, manifesto por F1 também revela a compreensão de que os modelos encontrados na atividade Fritadeira elétrica também admitem infinitas soluções.

Na atividade Lavagem de Roupas, a possibilidade de fazer alterações nos controles deslizantes no software *GeoGebra*, considerando os grupos de roupas que podem ser lavadas juntas, ao mesmo tempo que indica o caminho adotado pelas alunas para a obtenção de uma variedade de soluções para o problema investigado, sinaliza que elas entendem que uma atividade de modelagem matemática precisa ter as soluções dos problemas validadas no contexto do fenômeno analisado. Além disso, elas parecem entender o que significa o processo de interpretação das soluções, indicado com uma das fases da modelagem matemática.

A estratégia usada pelos alunos do Grupo 3, ao desenvolverem a atividade do Estacionamento no campus da Universidade, para analisar os modelos construídos, um esquema de cores, sinaliza a reflexão que os alunos fizeram acerca do problema investigado. Os signos do Quadro 12 se tornam uma possibilidade de análise dos modelos e fornece informações a respeito da realidade investigada que as outras representações não forneciam.

Na atividade da Fritadeira Elétrica, a partir do triângulo epistemológico da Figura 32, inferimos que os alunos não manifestaram total compreensão sobre o *fazer* modelagem matemática. Eles até demonstraram clareza conceitual sobre as fases da Modelagem Matemática, formularam hipóteses, matematizaram a situação, no entanto, a preocupação maior deles centrava-se na criação de um modelo; uma fórmula matemática. Porém, as funções obtidas por meio da análise de regressão que poderiam ser consideradas como modelos matemáticos do problema investigado, não foram utilizadas posteriormente para a validação e análise da solução. Assim, os signos do Quadro 8, não desencadearam a produção de novos signos interpretantes, tampouco, foram reconhecidos como meio pelo qual eles poderiam analisar a situação em questão.

Os triângulos epistemológicos das atividades de modelagem matemática analisadas revelaram que as fases da Modelagem Matemática se fizeram presentes, assim como já apontado por Almeida, Silva e Vertuan (2012), de forma não linear, trazendo à tona o caráter dinâmico da Modelagem Matemática, a partir de idas e vindas, aproximações e distanciamentos do fenômeno em estudo. Esses triângulos também revelaram que os alunos (futuros professores) compreenderam que há elementos característicos que compõem o fazer modelagem matemática e que, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática emerge a necessidade de trazer, de forma associada, aspectos da situação em estudo e da matemática.

A seguir tecemos algumas considerações sobre o estudo realizado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"Eu sei de muito pouco. Mas tenho a meu favor tudo o que eu não sei e – por ser um campo virgem – está livre de preconceitos. Tudo o que não sei é a minha parte maior e melhor: é minha largueza. É com ela que eu compreenderia tudo"
(CLARICE LISPECTOR).

Nesta investigação nossa intenção de discutir acerca da Modelagem Matemática a partir de triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática está alicerçada na associação desses signos com os outros dois elementos: contexto e conceito, do triângulo epistemológico proposto por Heinz Steinbring.

Trouxemos para discussão três atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do 4° ano de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade do interior do Paraná na disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. O fato da produção de signos em atividades de modelagem matemática ser dinâmica fez com que o contexto de referência se alterasse e, nesse sentido, evocasse diferentes conceitos. Desse movimento, construíssemos três triângulos epistemológicos para cada uma das atividades de modelagem matemática analisadas, tendo como contexto de referência: o tema ou o problema em estudo, a busca por solução e a solução.

A possibilidade ensejada em Veronez (2013) de olhar para as funções dos signos considerando triângulos epistemológicos desperta em nós o interesse de fazer uma leitura semiótica de atividades de modelagem matemática a partir de triângulos epistemológicos e de olhar para esses triângulos como meio de trazer à tona o caráter comunicacional e representacional do signo. Assim, ancoradas no modelo de triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática proposto por Veronez (2013) construímos triângulos epistemológicos que têm como um de seus vértices elementos característicos da Modelagem Matemática. Identificamos e analisamos os signos produzidos pelos alunos ao longo do desenvolvimento das atividades associando-os aos contextos de referência que referenciam e aos conceitos que evocam.

Em tais triângulos epistemológicos, as conexões estabelecidas entre signos, contexto de referência e conceito elucidam que os contextos de referências se alteram e se modificam ao passo que os alunos avançam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Da mesma forma, o conceito evocado em cada fase da atividade também se altera, trazendo à tona os conhecimentos mobilizados pelos alunos para transitar da situação inicial para a situação final.

A alternância desses três elementos do triângulo epistemológico representada nos triângulos epistemológicos que construímos ratifica o caráter dinâmico, que segundo Steinbring (2005), é característico do triângulo epistemológico. Além disso, essa dinamicidade ilustrada nos triângulos epistemológicos das atividades de modelagem matemática enaltece os elementos característicos de uma atividade de modelagem matemática, revela aspectos relacionados ao modo como os alunos compreendem o *fazer* modelagem matemática e evidencia o caráter dinâmico da modelagem matemática.

Cada triângulo epistemológico também sugere que uma atividade de modelagem matemática não pode ser vista a partir de um único triângulo, isso porque modificado o contexto de referência, novos signos (ou signos mais elaborados) são produzidos e isso faz também alterar (ou ampliar), em alguns casos, os conceitos. Dessa forma, é na junção dos três triângulos epistemológicos construídos para cada uma das atividades de modelagem matemática que evidenciamos a não linearidade das ações cognitivas dos alunos já apontada por Veronez (2013) e por Ramos (2020) e também das fases da modelagem matemática como indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012). Nessa junção ficam elucidadas as "idas e vindas" que a atividade de modelagem matemática permite, a partir do conjunto de signos que são produzidos ao longo de seu desenvolvimento e também que conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados de forma articulada e associados ao fenômeno em estudo e aos objetos matemáticos que mobilizam.

Os triângulos epistemológicos que construímos também nos sugerem que atividades de modelagem matemática favorecem a abordagem de uma variedade de conceitos e ideias matemáticas e que o professor tem um papel importante no sentido de fazer os alunos refletirem sobre os signos que produzem e se eles se atrelam ou não ao que investigam.

Nossas interpretações nos levam a indicar alguns dos aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos que construímos e que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo das atividades de modelagem matemática em associação com os outros dois vértices do triângulo. Entre tais aspectos destacamos:

- A interação entre professor e aluno favorece com que os alunos produzam signos mais elaborados.
- Os conceitos matemáticos se mostram de forma articulada com as discussões dos alunos sobre o fenômeno em estudo.
- As atividades de modelagem matemática favoreceram e possibilitaram o contato e a discussão com uma variedade de conceitos matemáticos.
- A dinamicidade da Modelagem Matemática.
- Há possibilidade de aprender matemática com significado, considerando que os conceitos matemáticos vêm combinados com o fenômeno.

Além desses aspectos ponderamos que a autonomia vislumbrada no contexto das atividades de modelagem matemática desenvolvidas no *3° momento* (ALMEIDA, DIAS, 2004) se fez presente, já que os alunos, no âmbito de seus grupos, discutiram, investigaram e escolheram, livremente, as estratégias que culminaram na busca por solução para o problema em estudo. Isso também provocou com que conhecimentos de diversas naturezas fossem mobilizados e signos de diversos tipos fossem produzidos/manifestos com mais liberdade.

Se por um lado o ensino remoto "deu asas" a autonomia dos alunos, por outro, ele "podou" a ação do professor que poderia ter sido mais significativa no sentido de sugerir encaminhamentos para os alunos. O fato dos alunos terem poucos encontros com o professor e se reunirem somente online com seus colegas de grupo diminuiu a interação entre esses sujeitos e pode ter interferido na qualidade dos diálogos e das ações dos alunos e no fomento das discussões e sugestões de estratégias e encaminhamentos.

Acreditamos que as reflexões apresentadas neste relatório de pesquisa corroboram com as discussões presentes nos debates acerca da modelagem matemática. Além disso, lançam holofotes para o papel do professor em atividades de modelagem matemática e para a natureza dos signos que podem ser produzidos em seu desenvolvimento. Ademais, estando inserida em um programa de mestrado profissionalizante, o desenvolvimento desta pesquisa permitiu a ressignificação da prática docente e possibilitou à pesquisadora importantes reflexões acerca de seu papel como docente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, ano 17, n.22, pp. 19-35. Rio Claro SP: SBEM, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, nº 1, pp. 28-42, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Reiec – Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 6, nº 1, julho, p. 1- 10, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES, A. J. A. "revisão da bibliografia" em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis. **Caderno de Pesquisa de São Paulo**, n. 81, p. 53-60, maio 1992.

AZANHA, J. M. P. **Uma ideia de pesquisa educacional**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade São Paulo, 2011.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: **CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 3., 2003, 160 Piracicaba. Anais... Piracicaba: UNIMEO, 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. 24ª RA da ANPED, **Anais**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. Ed. São Paulo: Contexto Editora, 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 18–23, 1993.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.** In: Borba, Marcelo de Carvalho; Araujo, Jussara de Loiiola. (Org.). Pesquisa Qualitativa em educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, v. 1, p. 99-112.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática.** Blumenau: Editora da FURB, 1999. 134p.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORSSOI, A. H**., Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BURAK, D. A modelagem matemática e a sala de aula. In: I EPMEM: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Londrina, PR, 2004. (p. 1-8).

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem**. (Tese de Doutorado). Campinas: FE/UNICAMP, 1992.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. Educação matemática: contribuições para a compreensão de sua natureza. **Acta Scientiae** ULBRA, Canoas. v.10, p. 93-106, jul/dez, 2008.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática**. Margens (UFPA), v. 6, p. 33-50, 2013.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, 2009. (p.33-54).

CARREIRA, S. P. G.. Where there’s a model, there’s a metaphor: Metaphorical thinking in students’ understanding of a mathematical model. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

CARREIRA, S. P. G. **Modelação Matemática e simulação no contexto escolar: conexões entre mundos.** In: Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2019), (pp. 47-62). SPIEM.

CHULEK, C**. Produção de (signos) interpretantes mediada pela tecnologia em atividades de modelagem matemática.** (Dissertação de mestrado). Guarapuava: UNICENTRO, 2020.

D´AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática.** Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine** : regitres sémiotiques et apprentissages intellectuel. Bern: Peter Lang, 1999.

FARRUGIA, M. T. The use a semiotic model to interpret meanings for multiplication and divison. **CERME – CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION**, 5, Proceedings... Lanarca. University of Cyprus, p. 1200-1209, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontossemiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p.7-37, jul./dez. 2008.

GREGÒRIO, D. M. **Signos em atividades de modelagem matemática: matematização e resolução em foco.** (Dissertação de mestrado). Guarapuava: UNICENTRO, 2019.

HUF, S. F.; BURAK, D.; PINHEIRO, A. M. Modelagem Matemática na Educação Básica: um olhar para o currículo. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros (MG), Brasil v. 4, e202024, p. 1-20, 2020

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – **The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 38, n. 3, pp. 302- 310, 2006.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and mathematical modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, Madison, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. (Tese de doutorado). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

MATULLE, L. **O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da Resolução de Problemas com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental**. (Dissertação de mestrado). Guarapuava, UNICENTRO, 2017.

MEYER, J. F.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MINAYO, M. C. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis, Vozes, 2002

NÖTH, W. **Panorama da semiótica: de Platão a Peirce**. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P.; BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 265 a 296, abril 2011.

OTTE, M. **Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. Educational Studies in Mathematics**. Springner. v. 61, pp. 11-38, 2006.

PEIRCE, C. S. **Semiótica e Filosofia: textos escolhidos**. Tradução de Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg. São Paulo: Cultrix, 1972.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PRESMEG, N. C. A triadic nested lens for viewing teachers' representations of semiotic chaining. **Representations and mathematics visualization**. Cinvestav – IPN. Editado por Fernando Hitt. pp. 263-276, 2002.

RADFORD, Luis; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. **Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

RAMOS, D. C. **Modelagem Matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos**. (Tese de doutorado). Londrina: UEL, 2020.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas**. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Brasiliense, 2003.

SEEGER, F. Beyond the Dichotomies – Semiotics in Mathematics Education Research. ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – **The International Journal on Mathematics Education, Karlsruhe**, v. 36, n. 6, pp. 206-216, 2004..

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática e Semiótica: implicações para a atribuição de significado**. (Tese de doutorado). Londrina: UEL, 2013.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction An epistemological perspective Mathematics Education Library**, vol. 38, New York: Springer, 2005.

STEINBRING, H. What makes a sign a Mathematical Sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**. New York: Ed. Springer, v. 61, n. 1, p.133-162, feb. 2006.

TRENTINI, M.; PAIM, L. **Pesquisa em enfermagem: uma modalidade convergente assistencial.** Florianópolis: Ed. UFSC, 1999.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** (Tese de doutorado). Londrina: UEL, 2013.

VERONEZ, M. R. D.; CASTRO, E. M. V.; MARTINS, M. A. Uma investigação acerca do problema em atividades de modelagem matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 223-235, jan./jun., 2018.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. (Tese de doutorado). Londrina: UEL, 2013.

WILDER, Raymond. **The Role of Intuition**. Science, vol. 156 (1967), p. 605-610. Traduzido por Marcelo Papini.

ANEXO A

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE – UNICENTRO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA - PPGEN

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado(a) Colaborador(a),

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa Des (conhecimentos) evidenciados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática – uma análise semiótica, sob a responsabilidade da pesquisadora Liane Maria da Silva. A pesquisadora irá analisar os triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática com vistas a denotar seus (des)conhecimentos e aprendizagens. A pesquisa se caracteriza como qualitativa, na área de Educação Matemática e busca trazer contribuições para a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem dos estudantes.

1. PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA:

A sua participação é muito importante, e ela se dará no decorrer da disciplina de Modelagem Matemática onde a pesquisadora irá se colocar como mediadora no desenvolvimento das atividades já iniciadas pela professora regente.

Lembramos que a sua participação é voluntária, você tem a liberdade de não querer participar, e pode desistir, em qualquer momento, mesmo após ter iniciado o a pesquisa sem nenhum prejuízo para você.

2. RISCOS E DESCONFORTOS: O(s) procedimento(s) utilizado(s) no desenvolvimento da atividade trarão um risco mínimo, visto se dará meio do Ambiente Virtual de aprendizagem. Se você precisar alguma orientação, encaminhamento etc, por se sentir prejudicado por causa da pesquisa, ou sofrer algum dano decorrente da mesma, o pesquisador se responsabiliza por prestar assistência integral, imediata e gratuita.

3. BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados com o estudo são no sentido de contribuição para o avanço das pesquisas em Educação Matemática, mais específico em Modelagem Matemática. Espera-se assim poder retornar aos professores da educação básica e sociedade como um todo, sugestões de atividades e metodologias que melhorem a qualidade de ensino e aprendizagem.

4. CONFIDENCIALIDADE: Todas as informações que o(a) Sr.(a) nos fornecer ou que sejam conseguidas por entrevistas, atividades ou avaliações serão utilizadas somente para esta pesquisa. Suas respostas ficarão em segredo e o seu nome não aparecerá em lugar nenhum dos(as) questionários, dissertação, provas ou atividades nem quando os resultados forem apresentados.

5. ESCLARECIMENTOS: Se tiver alguma dúvida a respeito da pesquisa e/ou dos métodos utilizados na mesma, pode procurar a qualquer momento o pesquisador responsável.

Nome do pesquisador responsável: Liane Maria da Silva

Endereço: Av. Prefeito Moacir Julio Silvestri, 1550, ap 02, Batel - Guarapuava Telefone para contato: (42) 991664485

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso o(a) Sr.(a) aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira, bem como não terá custo nenhum a sua participação.

7. CONCORDÂNCIA NA PARTICIPAÇÃO: Se o(a) Sr.(a) estiver de acordo em participar deverá preencher e assinar o Termo de Consentimento Pós-esclarecido que se segue, em duas vias, sendo que uma via ficará com você.

===

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a)_______________________________ , portador(a) da cédula de identidade ____________________, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelos pesquisadores, ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito do lido e explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO em participar voluntariamente desta pesquisa.

E, por estar de acordo, assina o presente termo.

Guarapuava,____de ______________de 2020.

____

Assinatura do participante

____

Liane Maria da Silva

Assinatura do Pesquisador