Uma prática com Modelagem Matemática mediada pela Tecnologia

PRODUTO EDUCACIONAL

UNICENTRO – PR

Carina Chulek

2020

Universidade Estadual do Centro-Oeste

UNICENTRO

UMA PRÁTICA COM MODELAGEM MATEMÁTICA MEDIADA PELA TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Produto Educacional

GUARAPUAVA

2020

Catalogação na Publicação
Rede de Bibliotecas da Unicentro, Campus Cedeteg

C559p

Chulek, Carina

Produção de (signos) interpretantes mediada pela tecnologia em atividades de modelagem matemática / Carina Chulek. – – Guarapuava, 2020.

xv, 80 f. : il. ; 28 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, 2019.

Inclui Produto Educacional Aplicado intitulado: Uma prática com modelagem matemática mediada pela tecnologia. 34 f.

Orientadora: Michele Regiane Dias Veronez
Banca examinadora: Adriana Helene Borssoi, Carlos Roberto Ferreira

Bibliografia

1. Ciências Naturais. 2. Modelagem matemática. 3. Semiótica. 4. Tecnologia. 5. Interpretantes. I. Título. II. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

CDD 500.7

Sumário

PREÂMBULO

Olá, querido (a) professor (a)!

Nesse Produto Educacional, resultado do trabalho de dissertação intitulada *"Produção de (signos) interpretantes mediada pela tecnologia em atividades de modelagem matemática"*[1], consta uma breve apresentação sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática a partir da ótica de alguns autores e também algumas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de uma 1ª série do Ensino Médio, ao longo de 10 encontros de 4 horas/aula, no contra turno, em que todas, o uso do software GeoGebra foi de fundamental importância.

Além de trazermos as descrições, na íntegra, dessas atividades de modelagem matemática, destacamos as ações dos alunos e possíveis reflexões advindas da análise que empreendemos no texto da dissertação.

Ressaltamos que as atividades ora apresentadas foram desenvolvidas por alunos que não tinham conhecimento acerca do software GeoGebra até o contato com nossa investigação e que, antes de a iniciarmos foi realizada uma oficina com esses alunos, visando sua familiarização com tal software. Na oficina foram trabalhadas atividades que favoreciam com que os alunos conhecessem as diversas ferramentas do GeoGebra, bem como seu potencial para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Esperamos que este material didático contribua para o seu conhecimento acerca da Modelagem Matemática e que possa servir de apoio pedagógico em suas futuras aulas!

---

[1] Esse material é uma exigência do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UNICENTRO e é resultado do trabalho de dissertação intitulado "Produção de (Signos) Interpretantes mediada pela tecnologia em atividades de modelagem matemática, sob orientação da Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez.

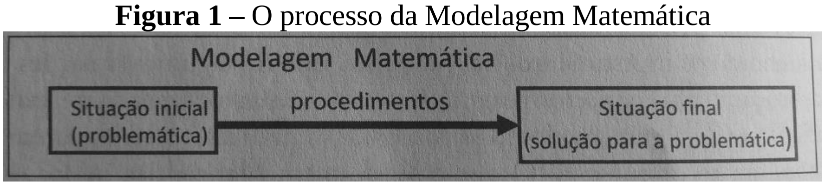
Modelagem Matemática como alternativa pedagógica

A Modelagem Matemática teve origem na Matemática Aplicada e com o passar dos anos vem sendo amplamente discutida na Educação Matemática. Segundo Almeida e Vertuan (2011), as primeiras pesquisas relacionadas com a Modelagem Matemática voltada para o ensino iniciam-se a partir da década de 1980. Como diversos são os autores que discutem sobre Modelagem Matemática sob tal perspectiva, diversos também são os entendimentos acerca dela no contexto do ensino de Matemática. Contudo, há um consenso de que a Modelagem Matemática emerge de um problema a resolver (geralmente, não matemático) e que é na busca por uma solução para esse problema, que considera aspectos matemáticos e, sobretudo, da situação em estudo, que a atividade de modelagem matemática se desenvolve. Na perspectiva de Almeida (2010), uma atividade de modelagem matemática

> [...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados (p. 399).

Assim, para Almeida, Silva e Vertuan (2013) a situação inicial pode ser nomeada de situação-problema e à situação final se relaciona uma representação matemática ou um modelo matemático que considera uma solução para a situação inicial (Figura 1).

Figura 1 – O processo da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan, p. 12, 2013.

São nos procedimentos para transitar da situação inicial para a final que estão as fases da Modelagem Matemática, sendo elas: *inteiração, matematização, resolução, intepretação de resultados e validação.*

Almeida, Silva, Vertuan (2013) conceituam a *inteiração* como a fase que “representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar” (p.4). É nesta fase que a formulação do problema ocorre, bem como, a definição de metas e estratégias para sua resolução. O principal foco desta fase é a escolha do tema e a busca por informações que situem à situação-problema a ser investigada.

Na fase da *matematização* a situação-problema, formulada da inteiração, é apresentada na "linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática e, assim, gera-se a necessidade de transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática)" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, p. 17, 2013). É através dessa linguagem matemática que o problema matemático a ser resolvido é evidenciado.

A fase da *resolução* é a fase associada à "construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, p. 17, 2013). Os autores afirmam que é nesta fase que as perguntas formuladas na busca para solução do problema devem ser respondidas.

A fase da *interpretação de resultados e validação* é a fase destinada para análise e interpretação da solução encontrada pelo modelo matemático. Almeida, Silva e Vertuan discorrem que

> a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quando a adequação da representação para a situação. Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, p. 16, 2013).

É nesta fase que o aluno pode verificar se a solução que encontrou satisfaz a situação-problema que enunciou. Chegar nesta fase não sinaliza, necessariamente, que a atividade de modelagem matemática terminou, mas pode sinalizar, que ela pode ser retomada, de qualquer fase. Isso significa que as fases de uma atividade de modelagem matemática não precisam ser seguidas linearmente ao longo de seu desenvolvimento.

Deste modo, conforme salienta Veronez (2013), as atividades de modelagem matemática têm 'a característica de ser abertas e privilegiar encaminhamentos diferenciados, de acordo com o interesse daqueles que a desenvolvem" (p. 22), ou seja, o modo de olhar para a situação inicial pode variar entre os alunos e entre eles e o professor, assim como na transição da situação inicial para a situação final "diferentes encaminhamentos e procedimentos podem ser assumidos pelos alunos" (VERONEZ, 2013, p. 20).

Durante todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática o professor é indispensável. Porém, compete a ele o papel de orientar. De acordo com Almeida, Silva e

Vertuan (2013) “orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; [...] não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função” (p. 24). Mas para que isso aconteça, o professor precisa considerar cada aluno de maneira individual, ou seja, precisa ouvir seus alunos.

O PROFESSOR DEVE SER ORIENTADOR!

De modo geral, atividades de modelagem matemática são desafiadoras tanto para o professor como para os alunos, mas, em relação ao aluno é dito que ele precisa “colocar a mão na massa” (SILVA, ALMEIDA, GERÔLOMO, 2011, p. 30), já que não aprenderá com a experiência do professor, mas com sua própria experiência. Daí o indicativo de que quanto mais o aluno participar do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, mais familiaridade terá com atividades desse tipo, podendo, inclusive, tornar-se mais independente em cada ação que venha a ser requerida dele. Nesse sentido, o aluno tem papel central em todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Almeida e Dias (2004) sugerem que atividades de modelagem matemática sejam implementadas de maneira gradativa e propõem tal implementação a partir do que denominam por momentos.

> • Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor;
> • Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado;
> • Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor (p.7).

Esses momentos podem ser entendidos como um modo de fazer Modelagem Matemática em sala de aula. Para Almeida e Silva (2014) a familiarização “trata-se de um encaminhamento para colocar o aluno em contato com a prática de fazer modelagem de forma gradativa” (p. 10). Quando o professor orienta seus alunos nos primeiro e segundo momentos, de modo a promover com que tenham mais segurança em si mesmo, favorece com que os alunos adquiram certa autonomia e pode contribuir para que eles venham a se desenvolver como sujeitos em constante aprendizado. Também, essa familiarização a possibilita ao aluno desenvolver a "habilidade de fazer modelagem" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2013, p. 27). Contudo, cabe ao professor ser mais presente nos dois primeiros momentos, contribuindo para o desenvolvimento da confiança, independência e autonomia do aluno, para então, no terceiro momento ele ser capaz de elaborar uma situação-problema a resolver. Vale salientar que o papel do professor mesmo sendo diferente em cada momento, ainda assim "consiste em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura por argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não suas conjecturas" (DIAS, 2005, p. 43).

O ALUNO PRECISA APRENDER A FAZER MODELAGEM!

Sobre o GeoGebra

O *Software* GeoGebra é um *software* livre, desenvolvido pelo Ph.D. Markus Hohenwarter, em 2002, com o intuito de auxiliar as ações dos professores em sala de aula. "O nome GeoGebra reúne GEOmetria, álGEBRA e cálculo" (BENTO, 2010, p.29). Assim, esse *software*[2] apresenta recursos para trabalhar conceitos matemáticos em articulação. Além disso, o GeoGebra possui características gráficas, com janelas de visualização com área para desenho em 2D e 3D, as quais possibilitam construções geométricas por meio de objetos base.

Além de ser um programa fácil de utilizar, por ter característica dinâmica, favorece com que os alunos se motivem a compreender suas ferramentas e a manipulá-las de modo a buscar confirmar, ou não, suas conjecturas. Isso pode promover uma aprendizagem dinâmica da Geometria e possibilitar de uma forma eficaz a interação com os demais usuários do GeoGebra.

O GEOGEBRA PROMOVE APRENDIZAGEM DINÂMICA

[2] Em seu site oficial https://www.geogebra.org/ é possível realizar o *download* do GeoGebra gratuitamente. Também possui um banco de dados com um número muito grande de atividades e construções desenvolvidas por alunos e professores. No site, ainda, quando realizado o cadastro, é possível enviar as próprias construções para contribuir com o banco de atividades do site, podendo ser utilizadas pelas demais pessoas.

Atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Todas as atividades apresentadas nessa seção foram desenvolvidas por alunos de uma 1ª série do Ensino Médio e seus temas sugeridos por eles. Tais atividades de modelagem matemática aconteceram durante o terceiro momento de familiarização dos alunos, conforme proposto por Almeida e Dias (2004). Nas tabelas, a seguir, trazemos aspectos de cada uma das atividades desenvolvidas.

Tabela 1 – O uso de pedalinhos no Lago da Cidade de Pitanga

Tema	**Lago**
Problema	Quantos pedalinhos cabem no lago?
Informações relevantes para o desenvolvimento da atividade	Lago Perímetro do lago real: $506{,}54m = 50654cm$ Perímetro do lago no GeoGebra: $18{,}4cm$ Área do Lago no GeoGebra: $20{,}07cm^2$ Pedalinho Comprimento: 2,20 m. Largura: 1,50 m.
Hipóteses	H1: O lago não possui formato de um polígono regular. H2: Os pedalinhos precisam de um espaço circular para girar.

Fonte: as autoras

Tabela 2 – A casa do João de Barro

Tema	**Casa do João de Barro**
Problema	Qual a área da superfície e o volume da casa do João de Barro?
Informações relevantes para o desenvolvimento da atividade	Raio da esfera $r = 2{,}84$unidades de comprimento Imagem da casa de um João de Barro
Hipóteses	H1: A casa do João de barro assemelha-se a uma esfera. H2: O apoio da casa do João de barro assemelha-se ao formato de uma calota esférica

Fonte: as autoras

Tabela 3 – A Placa de Trânsito

Tema	**Placa de Trânsito**
Problema	Qual a altura da placa e qual a sua distância até o chão?
Informações relevantes para o desenvolvimento da atividade	Altura do caminhão: $\mathbf{4,4m = 440cm}$
Hipóteses	H1: O caminhão é um caminhão baú.

Fonte: as autoras

Tabela 4 – Hotel de Dubai

Tema	**Hotel de Dubai**
Problema	Qual a área da superfície total do Hotel que é revestida em ouro?
Informações relevantes para o desenvolvimento da atividade	Imagens do hotel Altura do prédio 356m Largura do prédio 31m
Hipóteses	H1: O hotel tem formato de um prisma quadrangular. H2: A torre do hotel tem formato de uma pirâmide de base quadrangular.

Fonte: as autoras

Tabela 5 – A quadra de basquete

Tema	**Basquete**
Problema	O garrafão permanece no mesmo tamanho depois da alteração das regras?
Informações relevantes para o desenvolvimento da atividade	Garrafão com formato de trapézio Base maior 2,24 Base menor 1,24 Altura 2,33 Garrafão com formato de quadrado Base 2,02
Hipóteses	H1: As áreas dos garrafões são iguais.

Fonte: as autoras

Atividade 1: O uso de pedalinhos no Lago da Cidade de Pitanga

O tema surgiu do interesse dos alunos em pesquisar sobre o Lago da Cidade, já que essa é uma área de lazer. Após algumas pesquisas os alunos demonstraram interesse em discutir sobre a instalação de pedalinhos nesse Lago. Para tanto, tiraram um print no Google Maps da visão superior do lago (Figura 1) e escolheram um tipo de pedalinho, julgado por eles adequado (Figura 2 e Figura 3).

Figura 2 – Lago do Parque Municipal

Fonte: https://www.google.com.br/maps/@-24.7680571,-51.7684491,220m/data=!3m1!1e3

Figura 3 – Pedalinho visão lateral

Fonte: https://www.smartpier.com/images/fotos/Cisne/Miniaturas/PB210-Cisne-01_Pq.jpg

Figura 4 – Pedalinho visão inferior

Fonte: https://www.smartpier.com/images/fotos/Cisne/Miniaturas/PB-210-Pedalinho-Cisne-Fundo-02_Pq.jpg

Definido o que pesquisar, porém sem se ter um problema enunciado, os alunos buscaram por outras informações sobre o lago e sobre os pedalinhos (Quadro 1).

Quadro 1 – Informações coletadas

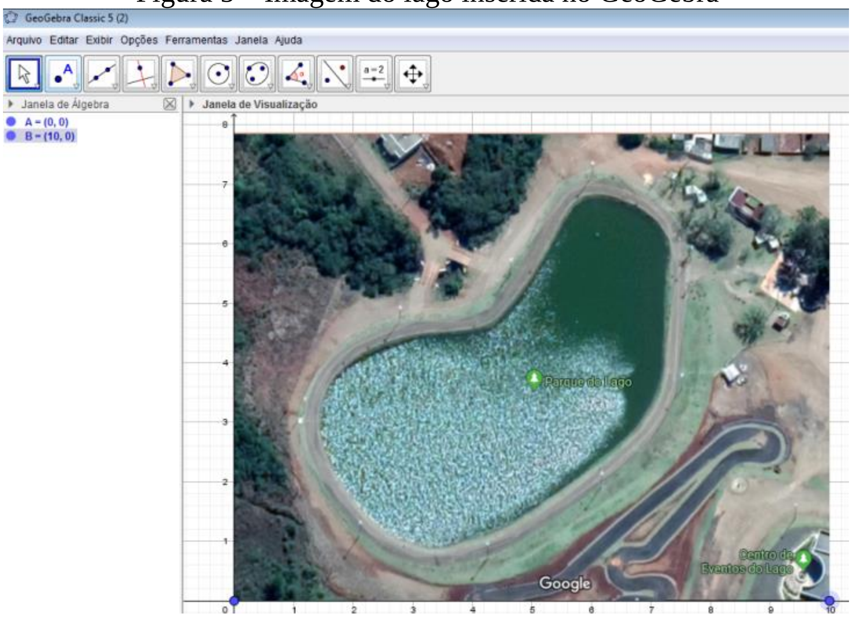
O perímetro do lago é $506{,}54m$. O pedalinho tem $2{,}20m$ de comprimento e $1{,}50m$ de largura.

Fonte: registro dos alunos

Essas informações aliadas aos diversos debates em sala de aula levaram os alunos a enunciarem o seguinte problema: Quantos pedalinhos cabem no lago?

A primeira estratégia assumida pelos alunos, visando resolver o problema identificado por eles, foi inserir[3] a imagem do lago no software GeoGebra como ilustrado na Figura 4.

Figura 5 – Imagem do lago inserida no GeoGebra



Fonte: registro dos alunos

Observando a figura do lago no GeoGebra e após dialogar com a professora, os alunos notaram algumas características na figura inserida no software, e assim, enunciaram as seguintes hipóteses (Quadro 2)

Quadro 2 – Hipóteses da atividade 1

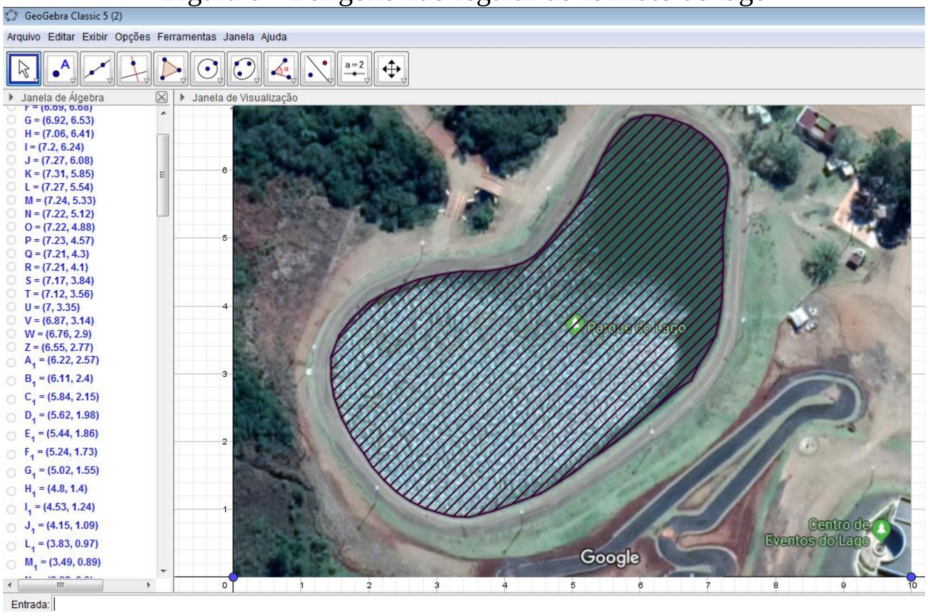
H1: O lago não possui formato de um polígono regular, sendo um polígono convexo. H2: Os pedalinhos precisam de um espaço circular para girar.

Fonte: registro dos alunos

Visando a busca pela solução, os alunos traçaram um polígono[4] sobre as margens do lago como ilustra a Figura 5.

[3] Para inserir uma imagem no GeoGebra, clique em "editar" e depois em "inserir imagem de", você terá duas opções "arquivo" e "área de transferência", é só escolher a melhor opção.

Figura 6 – Polígono não regular do formato do lago



Fonte: registro dos alunos

Essa imagem, associadas às ferramentas do software favorecem com que os alunos obtenham a área e o perímetro[5] do Lago no GeoGebra (Quadro 3).

Quadro 3 – Dados do Lago obtidos no GeoGebra

Perímetro do Lago no GeoGebra = 18,4cm Área do Lago no GeoGebra = 20,04cm²

Fonte: registro dos alunos

A estratégia assumida pelos alunos, na busca por solução para o problema, foi, após realizarem uma pesquisa sobre conceitos e definições matemáticas que poderiam lhes auxiliar, utilizar as propriedades de semelhança de polígonos (Quadro 4).

Quadro 4 – Propriedade de semelhança de polígonos

Se dois polígonos são semelhantes, então a razão entre seus perímetros é igual à razão entre as medidas de dois lados homólogos quaisquer dos polígonos.

Fonte: registro dos alunos

Com base nessa propriedade e nas informações coletadas, realizaram os seguintes cálculos (Quadro 5).

[4] Para traçar o polígono não regular, basta ampliar a imagem clicando em “ampliar”, para obter o maior números de pontos inseridos na margem do lago, pois queríamos traçar um polígono no formato do lago. Feito isso, clicando em “polígono” e depois nos pontos inseridos, tem-se o polígono.

[5] Clicando em “medições”, tem-se as opções “ângulo”, “ângulo com amplitude fixa”, “distância, comprimento ou perímetro”, “área” e “inclinação”. Clicando em “distância, comprimento ou perímetro” e depois no polígono tem-se o perímetro do polígono. Clicando em “área” e depois no polígono, tem-se a área do polígono.

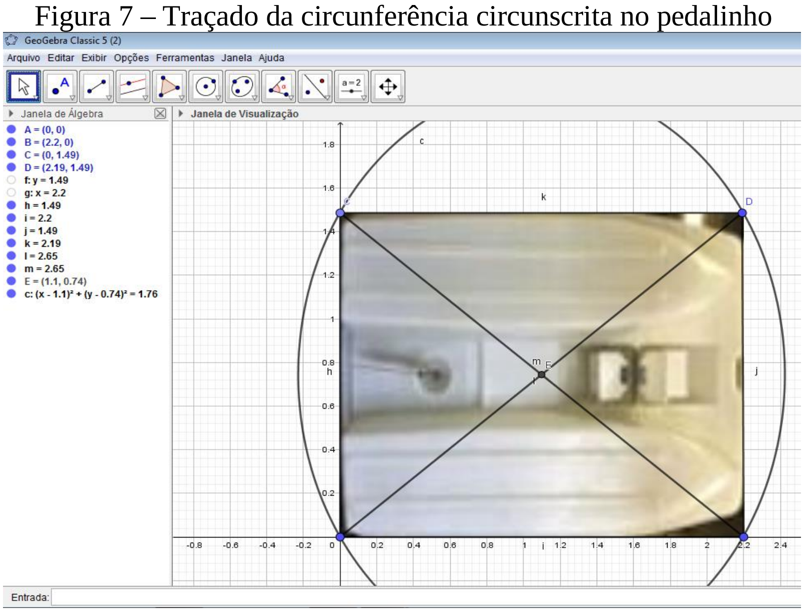
Quadro 5 – Cálculos da atividade 1

Razão do perímetro do lago
$\dfrac{Perímetro\ do\ Lago\ Real}{Perímetro\ do\ Lago\ no\ GeoGebra} = \dfrac{50654}{18{,}4} = 2752{,}93$
Cálculo da área do lago
$L^2 = \dfrac{A_1}{A_2}$
$L = razão\ entre\ os\ perímetros$
$A_1 = área\ do\ lago\ real$
$A_2 = área\ do\ lago\ no\ GeoGebra$
$2752{,}93^2 = \dfrac{A_1}{20{,}04}$
$7578649{,}92 = \dfrac{A_1}{20{,}04}$
$A_1 = 7578649{,}92 \ast 20{,}04$
$A_1 = 151876144{,}34\ cm^2$
Área do Lago Real
$151876144{,}34\ cm^2 = 15187{,}61\ m^2$.

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Com o valor da área do Lago em mãos, a próxima estratégia dos alunos foi a de inserir a imagem do fundo do pedalinho do GeoGebra e traçar uma circunferência[6] de modo que o pedalinho ficasse circunscrito, como ilustra a Figura 6.

Figura 7 – Traçado da circunferência circunscrita no pedalinho



Fonte: registro dos alunos

[6]Primeiramente, foi inserido a nova imagem, da vista inferior do pedalinho, e inserido pontos nos vértices do retângulo formado pela imagem. Foi traçado as diagonais do retângulo, utilizando a ferramenta “segmento” e depois nos dois pontos de extremidade do segmento. Para traçar uma circunferência, foi clicando na barra de ferramentas do GeoGebra, em círculo. Você terá várias opções para traçar uma circunferência, como: “círculo dados centro e um de seus pontos” (à utilizada na nossa construção); “círculo dados centro e raio”; “compasso” e “círculo definido por três pontos” (que também poderia ter sido utilizada, visto que, tínhamos os quatro vértices do retângulo imagem.

A partir dessa estratégia e de seus conhecimentos sobre circunferência, os alunos identificaram as coordenadas do centro e o raio da circunferência (Quadro 6) e calcularam a área do pedalinho (Quadro 7).

Quadro 6 – Dados do pedalinho

$Coordenadas\ do\ Centro\ \rightarrow C(1{,}1; 0{,}74)$ $R = D_{CA} = 1{,}3257cm$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Quadro 7 – Cálculos da atividade 1

$Área_{cir} = \pi * R^2$ $Área_{cir} = \pi * 1{,}3257^2$ $Área_{cir} = \pi * 1{,}7576$ $Área_{cir} = 5{,}5216\ m^2$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Com vistas a resolver o problema os alunos retomaram os conceitos de polígonos semelhantes e calcularam o número de pedalinhos que o lago suportaria (Quadro 8).

Quadro 8 – Cálculos da atividade 1

$\frac{Área_{lago}}{Área_{pedalinho}} = \frac{15187{,}61m^2}{5{,}5216m^2} = 2750{,}58\ pedalinhos$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Os alunos se deram por satisfeitos com a solução encontrada, mesmo considerando que o número de pedalinho ficou elevado. No entanto, concluíram, que o investimento seria muito alto e que não compensaria investir na instalação de tantos pedalinhos no Lago.

Sugestões para Sala de Aula

Professor!

Nesta investigação foi utilizado os conteúdos de grandezas diretamente proporcionais, conversões de medidas, áreas e perímetros de polígonos regulares e não regulares. É interessante propor uma discussão em sala sobre as propriedades dos polígonos regulares, bem como sobre a conversão de medidas de áreas.

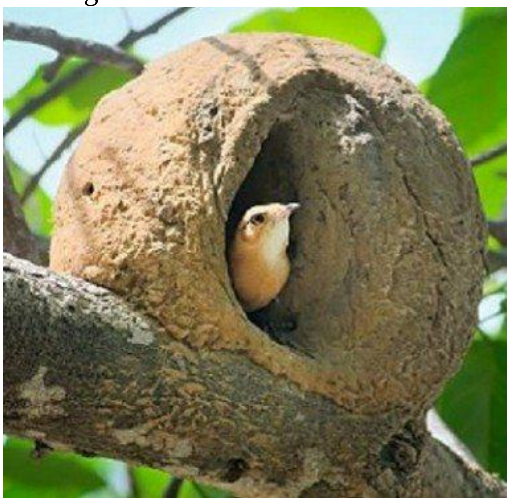
Outra questão passível para investigação, pode ser: “Qual é o volume d’água do lago?”. Neste caso, o professor pode aproveitar para discutir sobre o volume de sólidos.

Atividade 2: Casa do João de Barro

O tema surgiu do interesse dos alunos, uma vez que eles têm interesse por pássaros. Mesmo sabendo de imediato sobre o que gostariam de pesquisar, foi necessária intervenção do professor nessa fase inicial da Modelagem Matemática.

Após algumas pesquisas os alunos escolheram a imagem (Figura 7) como apropriada para conduzirem sua investigação.

Figura 8 – Casa do João de Barro



Fonte: https://dicasdearquitetura.com.br/wp-content/uploads/2017/06/ninho-do-jo%C3%A3o-de-barro-672x372.jpg

Definida a imagem a ser investigada os alunos enunciaram o seguinte problema: Qual a área da superfície e o volume da casa do João de Barro?

Após diversos diálogos, os alunos notaram que a casa do João de Barro assemelha-se a uma esfera, e, assim, enunciaram uma hipótese (Quadro 9).

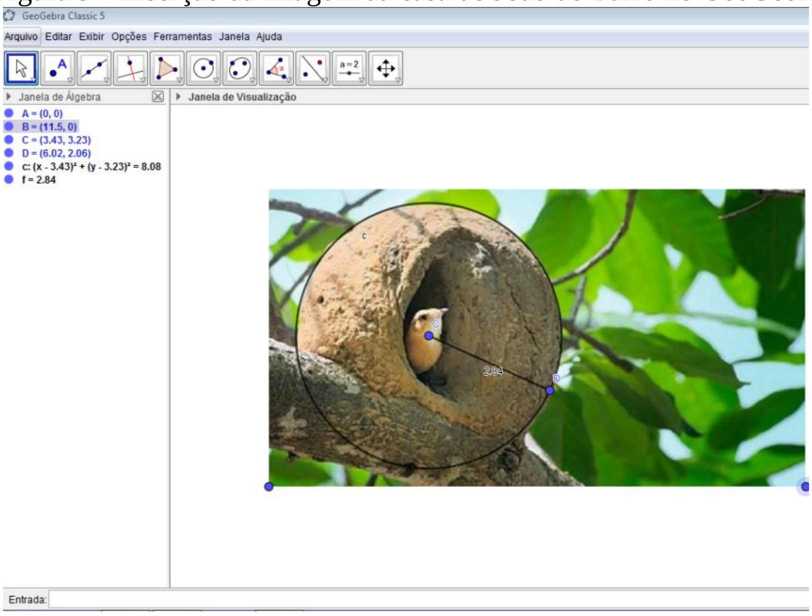
Quadro 9 – Hipótese da atividade 2

H1: A casa do João de barro assemelha-se a uma esfera.

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Buscando resolver o problema em questão, os alunos inseriram a imagem da casa do João de Barro no GeoGebra, como ilustrado na Figura 8.

Figura 9 – Inserção da imagem da casa do João de Barro no GeoGebra



Fonte: registro dos alunos

Da aproximação da casa do João de Barro a uma esfera, os alunos obtiveram o valor do raio[7] da esfera $r = 2{,}84\,uc$. Desse valor, associado aos conceitos de esfera, os alunos calcularam sua área superfície e seu volume (Quadro 10).

Quadro 10 – Cálculos da atividade 2

$$Área\ da\ superfície\ da\ esfera = 4.\pi.r^2$$
$$A_s = 4 * 3{,}14 * 2{,}84^2$$
$$A_s = 101{,}35ua$$
$$Volume\ da\ esfera = \frac{4 * \pi * r^3}{3}$$
$$V_e = \frac{4 * 3{,}14 * 2{,}84^3}{3}$$
$$V_e = 95{,}95uv$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Como notaram que a casa do João de barro é apoiada em um tronco de árvore, formando uma calota esférica, os alunos retomam sua primeira hipótese e a reformulam (Quadro 11).

Quadro 11 – Hipótese reformulada da atividade 2

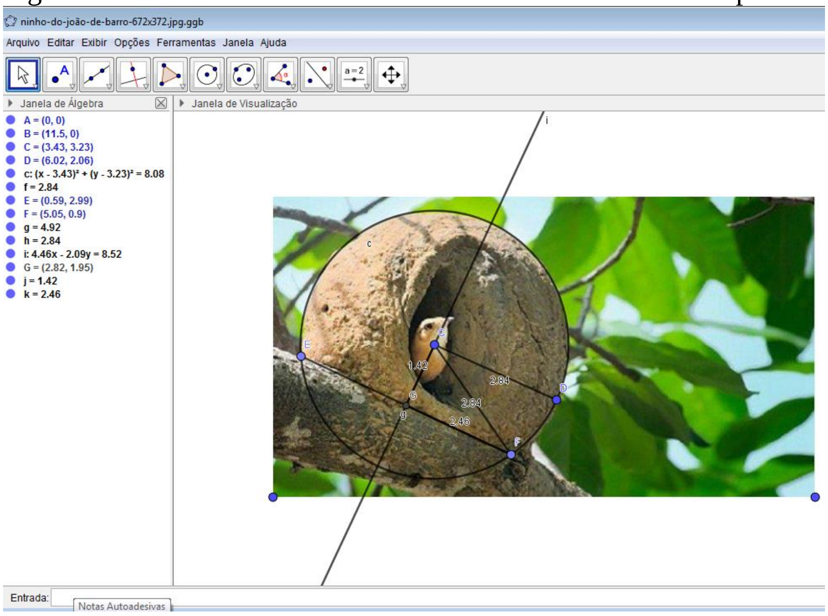
H2: O apoio da casa do João de barro assemelha-se ao formato de uma calota esférica

Fonte: registro dos alunos, transcritos

[7] Para traçar uma circunferência, na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em círculos, e depois em “círculo dados centro e raio”; pois neste caso, necessitávamos do raio. Assim que traçado a circunferência, o GeoGebra proporciona a equação da circunferência.

A estratégia assumida pelos alunos depois de tal observação, que gerou essa nova hipótese, foi a de calcular a área e o volume da calota esférica. Para tanto, utilizaram as ferramentas do GeoGebra, visando encontrar a altura da calota[8], como ilustra a Figura 9.

Figura 10 – Valores da altura da calota esférica e do raio da superfície



Fonte: registro dos alunos

Com base nos dados obtidos no GeoGebra, os alunos calcularam a área e o volume da calota esférica (Quadro 12).

Quadro 12 – Cálculos da atividade 2

$$Área_{calota} = 2 * \pi * R * h$$

em que R é o raio; h é a altura da calota

$$A_c = 2 * 3{,}14 * 2{,}84 * 1{,}42$$

$$A_c = 25{,}33ua$$

$$Volume_{calota} = \frac{\pi * h}{3} * (3r^2 + h^2)$$

$$V_c = \frac{3{,}14 * 1{,}42}{3} * (3.2{,}46^2 + 1{,}42^2)$$

$$V_c = 14{,}99uv$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

[8] Os alunos inseriram dois pontos na circunferência, sobre o tronco da imagem. Traçaram um segmento de reta do centro ao ponto F. Depois traçaram um segmento de reta entre esses dois pontos. E clicando em “construções”, depois em “mediatriz” e no segmento de reta construído, traçaram a mediatriz deste segmento que passa pelo centro da circunferência. Assim traçaram outro segmento de reta do centro ao ponto de interseção da mediatriz ao segmento EF para encontrar a altura da calota.

A próxima estratégia assumida pelos alunos foi a de subtrair da área da esfera a área da calota, calculando, portanto, o que eles julgaram ser a área da Casa do João de Barro. Essa estratégia também foi utilizada para a obtenção do volume (Quadro 13).

Quadro 13 – Cálculos da atividade 2

$$Área_{casa} = A_s - A_{calota}$$
$$Área_{casa} = 101{,}35 - 25{,}33$$
$$Área_{casa} = 76{,}02ua$$

$$Volume_{casa} = Volume_{esfera} - Volume_{calota}$$
$$Volume_{casa} = 95{,}95 - 14{,}99$$
$$Volume_{casa} = 80{,}96uv$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

A solução obtida foi considerada satisfatória pelos alunos e, argumentaram que o João de barro tem um esforço grande para construí-la e que ele é inteligente, pois sua casa dificilmente se desmancha.

Sugestões para Sala de Aula

Professor!

Nesta investigação foram utilizados os conteúdos de razão e proporção; teorema de Pitágoras; áreas e volumes de esfera. É importante propor uma discussão sobre os componentes da esfera como a superfície esférica, a cunha esférica, o fuso esférico e a calota esférica.

Outra questão passível para investigação, pode ser: “Qual a espessura da casa do João de barro?”. Neste caso, o professor pode aproveitar para aprofundar os conhecimentos matemáticos acerca do volume da esfera.

Atividade 3: Placa de Trânsito

O tema surgiu do interesse dos alunos em pesquisar sobre as placas de trânsito. Após inteiração do grupo com o tema (pesquisa) e orientações da professora os alunos definiram estudar sobre as placas de indicação de distâncias entre cidades. Para isso, utilizaram o Google Earth para encontrar a imagem considerada por eles como ideal, em seguida tiraram um print para armazená-la (Figura 10).

Figura 11 – Placa de indicação escolhida

Fonte: registro dos alunos

Após a definição sobre o que pesquisar, porém ainda sem um problema enunciado, os alunos decidiram buscar mais informações sobre o que encontraram na imagem selecionada, ou seja, mais informações sobre o caminhão (Quadro 14) e elencaram uma hipótese (Quadro 15).

Quadro 14 – Informações coletadas

Altura do caminhão: $4{,}40\ m = 440\ cm$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Quadro 15 – Hipótese da atividade 3

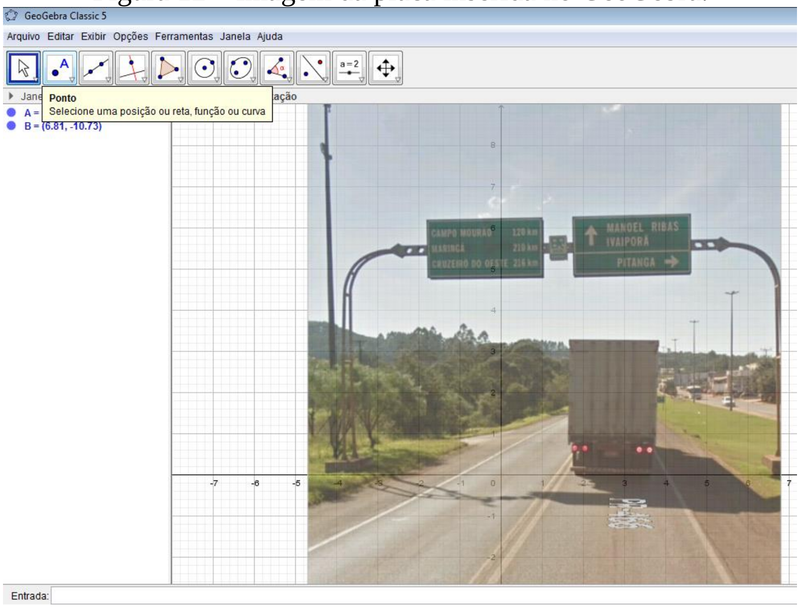
H1: O caminhão é um caminhão baú.

Fonte: registro dos alunos, transcritos

De posse das informações coletadas, com a hipóteses definida e discussões em grupo, os alunos enunciaram o problema: Qual a altura da placa e qual a sua distância até o chão?

Percebendo que os dados coletados não eram suficientes, a primeira estratégia assumida pelos alunos, foi a de inserir a imagem da placa no software GeoGebra, como ilustra a Figura 11.

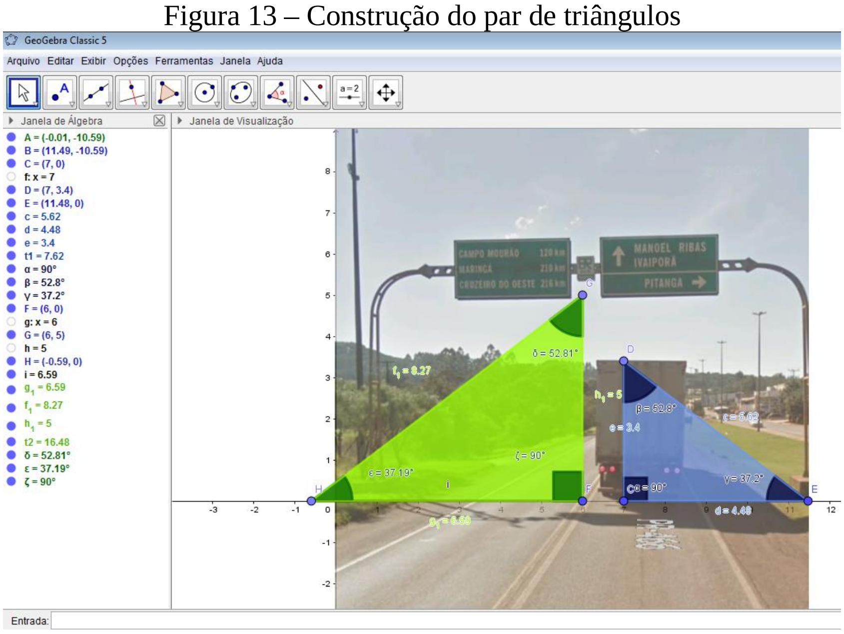
Figura 12 – Imagem da placa inserida no GeoGebra.



Fonte: registro dos alunos, transcritos

Na intenção de solucionar o problema, os alunos buscaram relacionar o tema a conceitos matemáticos que orientassem tal busca por solução para ele. Observaram nas propriedades dos triângulos semelhantes uma possibilidade. Assim, traçaram dois triângulos[9] retângulos semelhantes, um com cateto associado à altura do caminhão, e o outro associado à altura que a placa está do chão (Figura12).

Figura 13 – Construção do par de triângulos



Fonte: registro dos alunos

9 Para traçar os triângulos, os alunos traçaram um segmento de reta com extremidades na altura da plana e no eixo x, construíram o primeiro triângulo retângulo. Utilizando a ferramenta “medições” e “ângulo”, mediram os três ângulos deste triângulo. Traçaram outro segmento de reta com extremidades na altura do caminhão e no eixo x. Utilizando a ferramenta “medições” e “ângulo com amplitude fixa” construída os dois ângulos no segundo segmento para traçar o segundo triângulo.

Com base nas informações coletadas no GeoGebra e nas propriedades de triângulos semelhantes, caso ângulo-ângulo, os alunos calcularam a altura do chão à placa (Quadro 16).

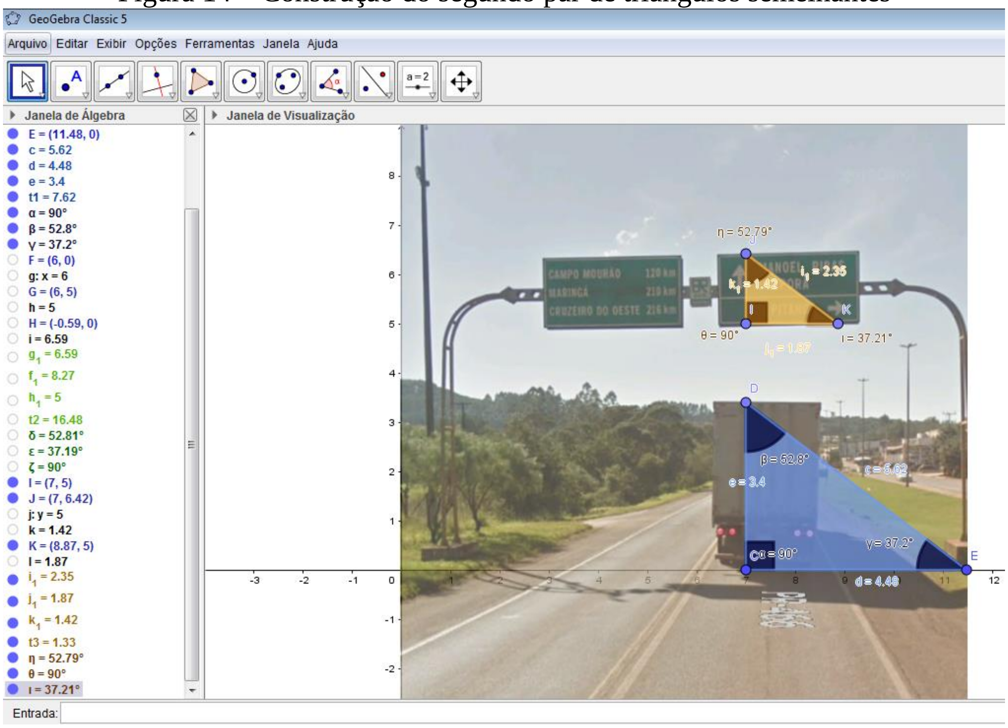
Quadro 16 – Cálculos da atividade 3.

$$\frac{cateto\ do\ triangulo_{azul}}{cateto\ \ do\ triangulo_{verde}} = \frac{3{,}4}{5} = 0{,}68$$
$$0{,}68 = \frac{440cm}{x}$$
$$0{,}68x = 440$$
$$x = \frac{440}{0{,}68}$$
$$x = 647cm$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

A próxima estratégia tomada pelos alunos, foi a de traçar outro par de triângulos retângulos, com catetos na altura do caminhão e na altura da placa, respectivamente, como ilustra a Figura 13.

Figura 14 – Construção do segundo par de triângulos semelhantes



Fonte: registro dos alunos

Com base nas informações coletadas com o par de triângulos traçados no GeoGebra e novamente nas propriedades de triângulos semelhantes, os alunos calcularam a altura da placa (Quadro 17).

Quadro 17 – Cálculos da atividade 3

$$\frac{altura\ do\ caminhão_{GeoGebra}}{altura\ do\ caminhão_{real}} = \frac{altura\ da\ placa_{GeoGebra}}{altura\ da\ placa_{real}}$$
$$\frac{3{,}4}{440} = \frac{1{,}42}{x}$$
$$3{,}4\ x = 440 * 1{,}42$$
$$3{,}4x = 624{,}8$$
$$x = \frac{624{,}8}{3{,}4}$$
$$x = 183{,}76$$
$$x \cong 184cm$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Desse modo, os alunos encontraram que a placa possui $1{,}84m$ e está a $6{,}47m$ do chão. Os alunos constataram a importância de respeitar a legislação de trânsito, ao comentarem que viram em jornais que muitos acidentes que aconteceram no ano de 2019, devido ao fato de muitas empresas de transporte não respeitar a altura máxima permitida. Concluíram ainda que as concessionárias de rodovias devem manter as informações necessárias (altura máxima) em pontes, viadutos e passarelas.

Sugestões para Sala de Aula

Professor!

Nesta investigação foram utilizados conceitos de razão e proporção.

Aproveitamos a oportunidade para retomar os conceitos e propriedades de polígonos semelhantes.

Outra questão importante de se considerar no desenvolvimento dessa atividade e que não foi observada pelos alunos que a desenvolveram é o fato de que a foto parecer ter certa profundidade quando inserida no GeoGebra. Sendo assim, o modo como inserem os eixos na Figura pode fazer diferença na análise dessa situação.

Atividade 4: Hotel de Dubai

O tema surgiu do interesse dos alunos, alguns alunos assistiram a uma reportagem de um hotel da cidade de Dubai revestido em ouro (Figura 14) comentaram com os demais colegas instigando o interesse do grupo pelo tema.

Figura 15 – Reportagem do Hotel de Dubai

Com lobby de ouro, edifício de hotel mais alto do mundo é inaugurado em Dubai

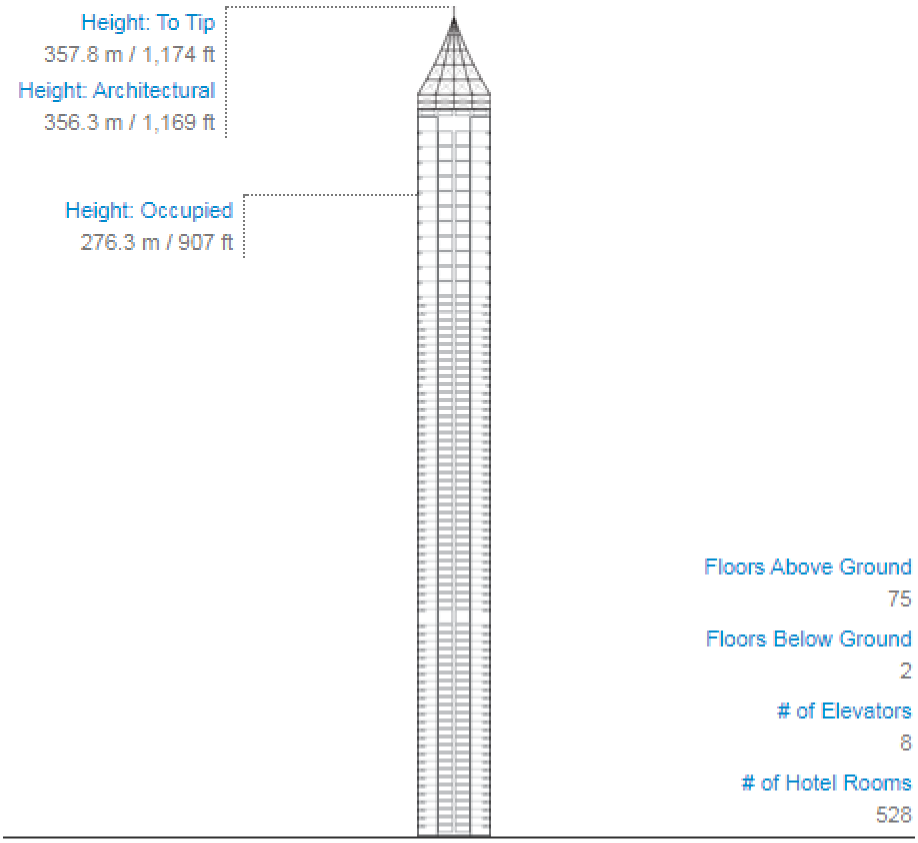
Decoração suntuosa e toda em ouro é o grande destaque do Gevora Hotel, em Dubai. O edifício tem 356 metros de altura e 528 quartos, distribuídos em 75 andares

Fonte: registro dos alunos

Apoiados nesta reportagem, os alunos buscaram mais informações sobre o Hotel, escolheram uma imagem da fachada do Hotel (Figura15) e encontraram uma imagem do projeto do Hotel (Figura 16).

Figura 16 – Hotel Gevora

Figura 17 – Projeto do Hotel Gevora

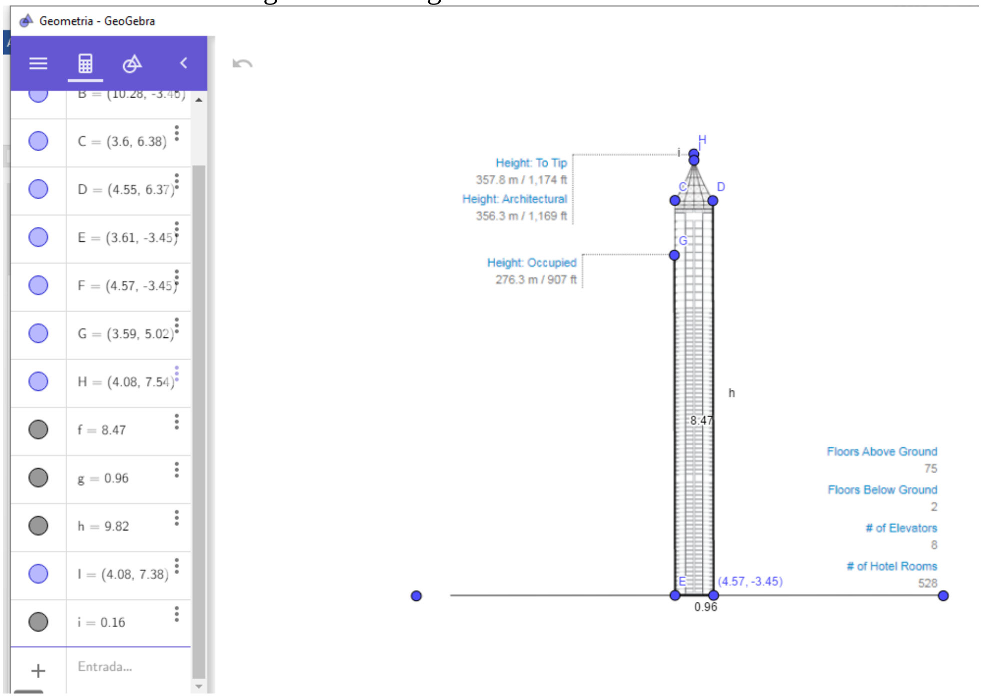


Fonte: registro dos alunos

A partir das informações coletadas na imagem do projeto os alunos enunciaram o problema: Qual a área da superfície total do Hotel Gevora que foi revestida em ouro?

Buscando solucionar o problema os alunos definiram como estratégia inserir a imagem[10] no software GeoGebra como ilustrado na Figura 17.

Figura 18 – Imagem do hotel no GeoGebra



Fonte: registro dos alunos

Os dados coletados pelos alunos no GeoGebra (Quadro 18) e nas pesquisas realizadas possibilitou que eles enunciassem as seguintes hipóteses (Quadro 19).

Quadro 18 – Informações coletadas

Altura da parte ocupada do hotel $267,3m(hotel) \leftrightarrow 8,47(GeoGebra)$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Quadro 19 – Hipóteses da atividade 4

H1: O hotel tem formato de um prisma quadrangular. H2: A torre do hotel tem formato de uma pirâmide de base quadrangular.

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Na intenção de solucionar o problema os alunos buscaram relacionar o tema a conceitos matemáticos que lhes auxiliassem. Assim, recorreram aos conceitos de razão e proporção e da área da superfície dos sólidos (Quadro 20).

[10] Após a imagem inserida no GeoGebra, os alunos criaram segmentos de retas para auxiliá-los no cálculo da razão entre a altura do prédio real e do projeto.

Quadro 19 – Cálculos da atividade 4

$$276{,}3 - 8{,}47$$
$$x \quad -9{,}82$$
$$8{,}47x = 276{,}3 * 9{,}82$$
$$8{,}47x = 2713{,}266$$
$$x = \frac{2713{,}266}{8{,}47}$$
$$x = 320{,}34\, m\ de\ altura$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Do mesmo modo, os alunos calcularam a largura do hotel (Quadro 21).

Quadro 20 – Cálculos da atividade 4

$$276{,}3 - 8{,}47$$
$$x \quad -0{,}96$$
$$8{,}47x = 276{,}3 * 0{,}96$$
$$8{,}47x = 265{,}248$$
$$x = \frac{265{,}248}{8{,}47}$$
$$x = 31{,}32m$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Tendo que a altura do hotel é de $320{,}34m$ e a largura é de $31{,}32m$, os alunos calcularam a área lateral do hotel (Quadro 22).

Quadro 21 – Cálculos da atividade 4

$$A_{lateral\ do\ prisma} = 4 * b * h$$
$$A_{lateral\ do\ prisma} = 4 * 31{,}32 * 320{,}34$$
$$A_{lateral\ do\ prisma} = 40132{,}20m^2$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

A próxima estratégia adotada pelos alunos foi calcular a área lateral da pirâmide. Para isso utilizaram os dados coletados no GeoGebra a partir da construção dos segmentos de retas, como ilustrado na figura 17 (Quadro 23).

Quadro 22 – Cálculos da atividade 4

$$\frac{altura\ do\ prédio}{altura\ da\ antena} = \frac{altura\ do\ prédio\ no\ GeoGebra}{altura\ da\ antena\ no\ GeoGebra}$$
$$276{,}3 - 8{,}47$$
$$x \quad -0{,}16$$
$$8{,}47x = 276{,}3 * 0{,}16$$
$$8{,}47x = 44{,}208$$
$$x = \frac{44{,}208}{8{,}47}$$
$$x = 5{,}21m$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

A partir deste valor, calcularam a altura da pirâmide (Quadro 24).

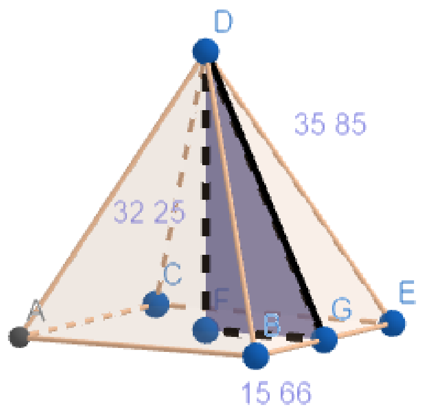
Quadro 23 – Cálculos da atividade 4

$h_{total} = h_{prima} + h_{pirâdime} + h_{antena}$ $357{,}8 = 320{,}34 + h_{pirâmide} + 5{,}21$ $h_{pirâmide} = 357{,}8 - 320{,}34 - 5{,}21$ $h_{pirâmide} = 32{,}25m$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Apoiados nos conceitos matemáticos sobre a área da superfície da pirâmide, os alunos observaram que não tinham o valor da apótema da pirâmide. Decidiram então construir uma pirâmide de base quadrangular[11] (Figura 18) com medidas associadas proporcionais das da pirâmide observada no Hotel.

Figura 19 – Pirâmide traçada



Fonte: registro dos alunos

Os alunos encontraram que a apótema da lateral[12] da pirâmide mede $35{,}65m$ o que corresponde à altura dos triângulos laterais da pirâmide, e que a base da pirâmide mede $31{,}32m$, assim calcularam a área lateral da pirâmide (Quadro 25).

Quadro 24 – Cálculos da atividade 4

$A_{lateral\ da\ pirâmide} = 4 * \frac{b * h}{2}$ $A_{lateral\ da\ pirâmide} = 4 * \frac{31{,}32 * 35{,}85}{2}$ $A_{lateral\ da\ pirâmide} = 2245{,}64$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

[11] Utilizando a Janela de Visualização em 3D do GeoGebra, os alunos traçaram um quadrado de lado 15,66 (largura do prédio), e traçando as mediatrizes de dois lados do quadrado, na intersecção inseriram um ponto, pois neste ponto será a altura da pirâmide. Calcularam a altura da pirâmide e traçaram uma reta perpendicular ao plano do quadrado passando pelo ponto de intersecção das mediatrizes e inseriram um ponto. Utilizando a ferramenta "pirâmide" construíram a pirâmide.

[12] Traçaram um segmento de reta do vértice da pirâmide à mediatriz da base. Utilizando a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro" para encontrar o valor da apótema.

Por fim, para solucionar o problema, a estratégia adotada pelos alunos foi somar as áreas laterais calculadas para obter a área lateral total do hotel (Quadro 26).

Quadro 25 – Cálculos da atividade 4

$$A_{lateral} = A_{lateral\ do\ prisma} + A_{lateral\ da\ pirâmide}$$
$$A_{lateral} = 40132{,}20 + 2245{,}64$$
$$A_{lateral} = 42377{,}84m^2$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Deste modo, concluíram que a área lateral do Hotel Gevora revestida em ouro, é aproximadamente $42377{,}84m^2$.

Sugestões para Sala de Aula

Professor!

Nesta investigação utilizamos os conteúdos: conversões de medidas; área e perímetro de polígonos regulares.

É conveniente propor uma discussão sobre as propriedades dos sólidos, destacando conceitos como: a apótema e área do triângulo equilátero.

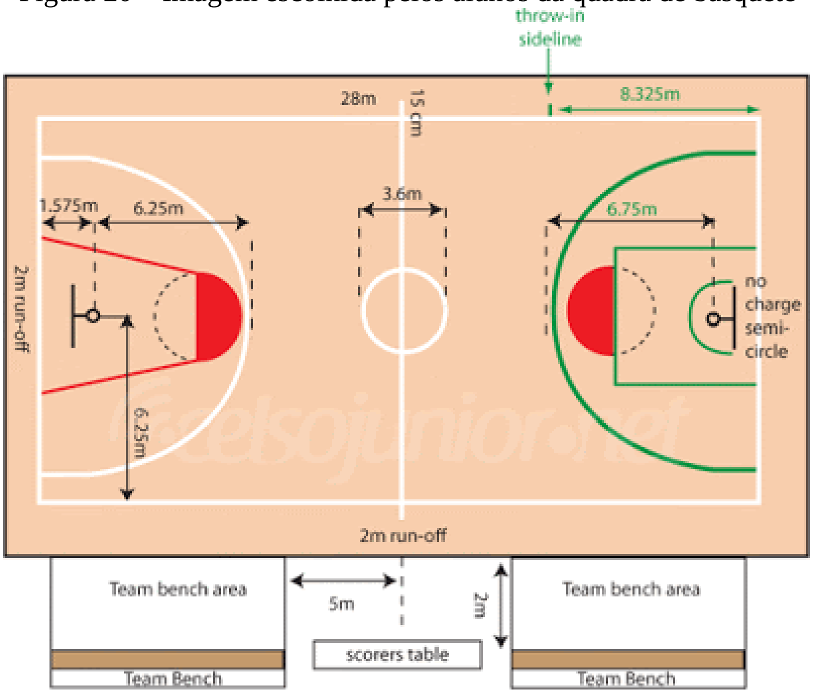
Outra questão possível para investigação, pode ser: “Como construir uma maquete deste hotel?”. Neste caso, o professor podem ser explorados conceitos de escala, relacionados com a notação. Ou seja, 1:1000, onde 1 significa um 1 cm da folha para 1000 cm do Hotel.

Professor! Você pode adaptar esta investigação para uma estrutura arquitetônica da própria cidade, ou até mesmo da casa dos alunos. Destacamos que a investigação adaptada para casa do aluno seria interessante, uma vez que poderia investigar sobre os telhados, como a área e ou o caimento. Neste caso, poderiam ser explorados conteúdos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras.

Atividade 5: A quadra de Basquete

O tema surgiu do interesse dos alunos em pesquisar sobre Basquete, já que é um esporte comum entre os integrantes do grupo. Após algumas pesquisas os alunos demonstraram interesse em discutir sobre a mudança da legislação do garrafão. Para tanto encontraram uma imagem da quadra de basquete com os tipos de garrafão (Figura 19).

Figura 20 – Imagem escolhida pelos alunos da quadra de basquete



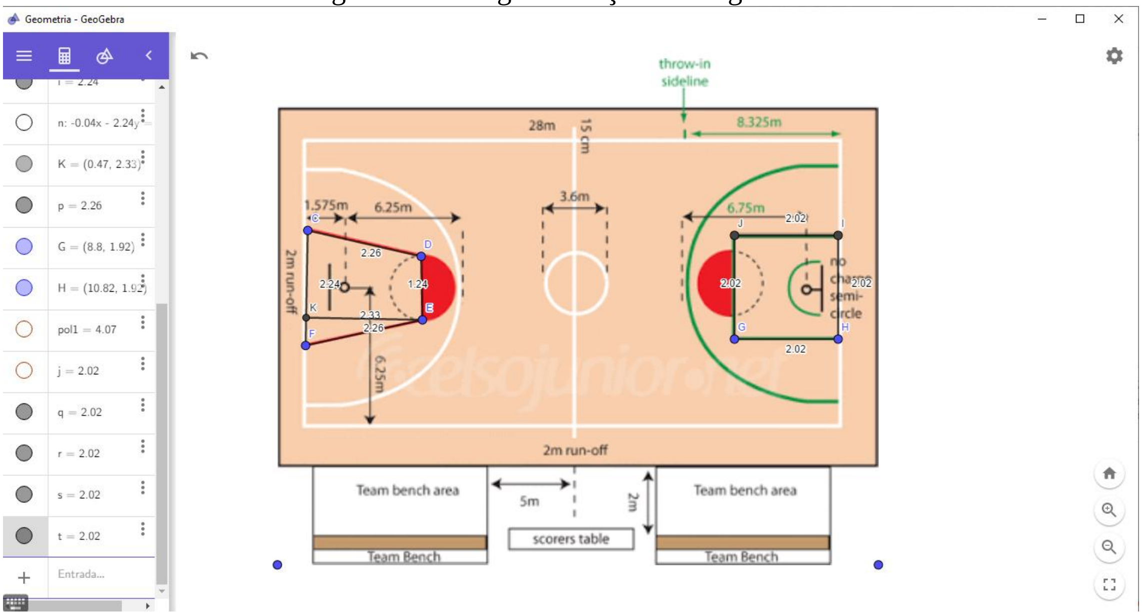
Fonte: https://avabpiaui.files.wordpress.com/2015/11/medidas-quadra-basquete.gif?w=300&h=253

A partir da imagem em discussão entre os integrantes do grupo, os alunos enunciaram o problema: O garrafão da quadra de basquete permaneceu do mesmo tamanho após as regras?

A primeira estratégia assumida pelos alunos, visando resolver o problema identificado por eles foi inserir a imagem da quadra de basquete no software GeoGebra, como ilustrado na Figura 20, e traçar polígonos nos garrafões[13].

[13] Para traçar os dois polígonos nos garrafões, os aluno inseriram a imagem no GeoGebra e inseriram pontos nos vértices de cada garrafão, utilizando a ferramenta "segmento" traçaram os polígonos. Para traçar os polígono era possível também utilizar a ferramenta "polígono" e clicar nos pontos que seriam os vértices. No trapézio construído, os alunos traçaram uma reta perpendicular por um dos vértices da base menor, para encontrar a altura.

Figura 21 – Polígonos traçados nos garrafões



Fonte: registro dos alunos

Com os dados coletados, a partir dos polígonos no GeoGebra, os alunos identificaram algumas medidas (Quadro 27) e definiram uma hipótese (Quadro 28).

Quadro 26 – Informações coletadas

Garrafão com formato de trapézio Base maior 2,24 Base menor 1,24 Altura 2,33 Garrafão com formato de quadrado Base 2,02

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Quadro 27 – Hipóteses da atividade 3

H1: As áreas dos garrafões são iguais.

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Com os dados coletados no GeoGebra e apoiados nas propriedades das áreas das figuras planas os alunos calcularam a área do trapézio e do quadrado, respectivamente (Quadro 29).

Quadro 28 – Cálculos da atividade 5

$$A_t = \frac{(B+b)*h}{2}$$

$$A_t = \frac{(2{,}24+1{,}24)*2{,}33}{2}$$

$$A_t = \frac{3{,}48*2{,}33}{2}$$

$$A_t = \frac{8{,}1084}{2}$$

$$A_t = 4{,}0542\ unidades\ de\ área$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Em seguida calcularam a área do garrafão em formato de quadrado com base 2,02 (Quadro 30).

Quadro 29 – Cálculos da atividade 5

$$A_q = l^2$$
$$A_q = 2{,}02^2$$
$$A_q = 4{,}0804 \; unidades \; de \; área$$

Fonte: registro dos alunos, transcritos

Ao observar que os dois valores são muito próximos, os alunos concluíram que as duas áreas são congruentes.

Sugestões para Sala de Aula

Professor!

Nesta investigação utilizamos os conteúdos: grandezas diretamente proporcionais, conversão de medidas, área e perímetro de figuras planas.

É importante retomar os conceitos sobre áreas de figuras planas.

Outra questão passível para investigação, pode ser: “Qual o ângulo ideal para acertar uma cesta de 3 pontos?”. Neste caso, os alunos podem obter os dados experimentalmente jogando uma bola atrás da linha dos 6,25m. Os alunos podem filmar os lances e utilizar o software Tracker (visto que é gratuito para download), pois é uma ferramenta de análise de dados, para fazer a trajetória da bola e calcular o ângulo ideal.

Nossas Considerações

Com este material que apresentamos esperamos contribuir com os professores que ensinam Matemática, sobretudo, no Ensino Médio, já que trazemos de forma detalhada algumas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos nesse nível de escolaridade. As atividades aqui apresentadas são apenas uma possibilidade de trabalhar cada tema. Assim, intencionamos que tais atividades, se reproduzidas, sejam adaptadas para o primeiro ou para o segundo momento de familiarização com a Modelagem Matemática, como indica a literatura.

Embora as atividades de modelagem matemática apresentadas tenham sido desenvolvidas em aulas no contra turno, de uma escola privada, ponderamos que os temas trabalhados podem ser de interesse de outros alunos e, inclusive, fomentar discussões diferentes das que surgiram na ocasião. Considerando que, quando o professor adota a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica os temas para estudo podem ser escolhidos pelos alunos, pelo professor ou ainda, por um acordo entre ambos e deles, emergir a possibilidade de abordar conteúdos matemáticos diversos e, na maioria das vezes, não na linearidade propostas nos materiais de uso didáticos. Além de favorecer uma visão abrangente dos conceitos matemáticos abordados, viabiliza debates acerca de questões que extrapolam o contexto da sala de aula.

No estudo que realizamos, apesar de algumas das atividades de modelagem matemática desenvolvidas não requerer nível de conteúdo elevado, os alunos apresentaram bastantes dificuldades ao longo de seus desenvolvimentos. Geralmente tais dificuldades estavam relacionadas à falta de autonomia por parte dos alunos ou por falta de conhecimento acerca dos conteúdos necessários à resolução do problema em estudo. Outro aspecto a considerar no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática é que elas não têm um tempo predeterminado, ou seja, cada uma das atividades aqui trazidas foram desenvolvidas em intervalos de tempo distintos.

Alguns grupos levaram mais tempo que outros por apresentar mais dificuldade, tanto na escolha do tema, na enunciação do problema como no próprio desenvolvimento da atividade. Outros, porém, tiveram autonomia em todos os momentos da atividade de modelagem, discutindo temas que envolviam aspectos sociais da cidade. Cada grupo agiu de maneira singular, alunos que em sala não apresentavam aptidão pela Matemática, no desenvolvimento das atividades, destacaram-se pelas discussões que acarretaram a solução da situação-problema, bem como a autonomia e independência.

Ressaltamos que ao desenvolver atividades de modelagem podem surgir diversos sentimentos, até mesmo a insegurança se dará certo ou não. Muitos são os fatores envolvidos neste tipo de atividade, como a falta de experiência tanto do professor quanto dos alunos. Deste modo, é sugerido ao professor desenvolver tais atividades de maneira gradativa, para que os alunos possam adquirir confiança nas ações tomadas para transitar da situação inicial para final.

As atividades aqui apresentadas, como já dito, foram desenvolvidas durante a pesquisa de mestrado da autora, tendo como resultados, este Produto Educacional e a dissertação intitulada "Produção de (signos) interpretantes mediada pela tecnologia em atividades de modelagem matemática". Na dissertação no reportamos à Teoria dos Signos, desenvolvida por Charles Sanders Peirce, e a utilizamos como lente para analisar os (signos) interpretantes que os alunos produziram ao desenvolver atividades de modelagem matemática com o auxílio do GeoGebra.

Os (signos) interpretantes associados ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática nos revelaram as estratégias, as discussões referentes aos respectivos temas, a organização das informações coletadas, a necessidade de aprender novos conceitos matemáticos que pudessem ser aplicados nas situações investigadas. Deste modo, a Semiótica favoreceu uma percepção de como os alunos transitaram da situação inicial para a final, nas atividades de modelagem matemática por eles desenvolvidas e viabilizou a identificação de indícios acerca dos aspectos relativos ao modo como eles construíram conhecimentos enquanto as desenvolviam, sobretudo, conhecimentos matemáticos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetikè.** FE – Unicamp. Campinas, V. 18, número temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema,** v. 17, n. 22, p. 19-36, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. (org.). **Modelagem Matemática em Foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. 200 p.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2013. 158 p.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. **In:** ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Londrina: Eduel, 2011.

BENTO, H. A. O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o *software*: GeoGebra. **Dissertação de Mestrado** do Programa de Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da Pontíficia Universidade Católica de Minas Gerais. 2010.

DIAS, M. R. Uma experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores. **Dissertação de Mestrado** – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a fazer Modelagem Matemática: a vez do aluno. **Educação Matemática.** p. 28-36, 2011.

VERONEZ, M. R. D. As funções dos signos em atividades de modelagem matemática. 2013. 176p. **Tese de Doutorado** (Pós-Graduação em Ensino de ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2013.

VERTUAN, R. E. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. 2013. 247p. **Tese de Doutorado** (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.