UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE, UNICENTRO-PR

SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO EM FOCO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DALLAN MARCELO GREGÓRIO

GUARAPUAVA, PR

2019

DALLAN MARCELO GREGÓRIO

SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO EM FOCO

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dr.ª Michele Regiane Dias Veronez

GUARAPUAVA, PR

2019

Catalogação na Publicação
Biblioteca Central da Unicentro, Campus Cedeteg

Gregório, Dallan Marcelo

G821s Signos em atividades de modelagem matemática: matematização e resolução em foco / Dallan Marcelo Gregório. – – Guarapuava, 2019.

xi, 82 f. : il. ; 28 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, 2019

Inclui Produto Educacional intitulado: Uma experiência com modelagem matemática em turmas do ensino médio. 29 f.

Orientadora: Michele Regiane Dias Veronez
Banca examinadora: Michele Regiane Dias Veronez, Leônia Gabardo Negrelli, Marcio André Martins

Bibliografia

1. Ciências Naturais. 2. Matemática. 3. Modelagem matemática. 4. Semiótica. 5. Signos. 6. Ensino Médio. I. Título. II. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

CDD 500.7

DALLAN MARCELO GREGÓRIO

"SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO EM FOCO"

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Centro-Oeste, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática, para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em 25 de fevereiro de 2019.

Profª. Drª. Michele Regiane Dias Venorez
Universidade Estadual do Paraná – Unespar
Orientadora

Profª. Drª. Leônia Gabardo Negrelli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Prof. Dr. Márcio André Martins
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro

Guarapuava, PR.
2018

Dedico:

À minha mãe Luiza, que me deu a vida e a minha esposa Alcimara que compartilha sua vida.

*"Somos as coisas que moram dentro de nós.
Por isso, há pessoas tão bonitas, não pela cara,
mas pela exuberância de seu mundo interior. "*

Rubem Alves

AGRADECIMENTOS

Expressar em palavras os sentimentos é tarefa de poetas, as palavras possuem o dom de tocar as pessoas de modo singular, produzem distintos sentimentos em cada leitor. Imaginar que cada palavra aqui escrita seja capaz de reproduzir fielmente o sentimento de quem as profere é demasiadamente otimista. No entanto, não devo me furtar de assinalar nestas poucas linhas o carinho e gratidão que tenho para aqueles que de uma forma ou de outra marcaram esse processo de aprendizado.

Assim, quero agradecer:

Ao Senhor meu Deus, pela proteção nos muitos quilômetros de estrada, pela força e convicção naqueles momentos em que tudo não estava em luz. Obrigado Senhor por me guiar sem hesitar através dos obstáculos encontrados. Minha fé só aumentou durante essa jornada. Continuai a dirigir minha vida e aqueles que comigo creem em Ti.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – PPGEN da Universidade do Centro Oeste do Paraná – UNICENTRO: por conceberem um espaço de científico e de aprimoramento profissional. Em especial, a querida Josemara, que esbanjou simpatia em seu primeiro atendimento ainda na inscrição para as provas de admissão, e Jamille, por seus esforços em atender as demandas para a qualificação e defesa.

À professora doutora Michele Regiane Dias Veronez, minha orientadora. Que não mediu esforços para ser guia e conselheira. Agradeço por dividir as minhas angústias e dúvidas, pela confiança depositada e por compartilhar seus conhecimentos e tempo.

Aos professores do programa: por terem proporcionado momentos de profunda reflexão sobre a prática letiva, pelas amizades construídas e pelos instantes de descontração.

Aos professores Marcio André Martins e Leônia Gabardo Negrelli pelas importantes contribuições ao trabalho quando da qualificação e da defesa, indicando caminhos que viriam a lapidar a escrita e as observações da pesquisa.

À Fundação Centro Universitário da Cidade de União da Vitória – UNIV: pelo apoio e compreensão quanto aos horários e pelo incentivo à formação continuada de seus professores.

À minha família: Ao meu pai, Antonio Gregorio, *in memorian*, que tenho certeza está orgulhoso do caminho que trilhei dos valores que assumi, e minha mãe, Luiza Maria Falk Gregório, por ser o exemplo de uma mulher guerreira e batalhadora, que sempre colocou seus filhos como prioridade, obrigado pelo incentivo e apoio. À minhas irmãs, Claudia e Lia, agora meu sobrinho Pedro, pela compreensão de minhas ausências.

À minha esposa Alcimara Aparecida Föetsch, a quem dedico todo amor e carinho, agradeço pela cumplicidade, incentivo e apoio, pelo entendimento que as vezes era necessário estar longe, por ouvir meus discursos e ansiedades, peço desculpa pelas madrugadas acordadas. Obrigado por ser uma ótima ouvinte e uma excelente conselheira. A você todo o amor do mundo, agradeço por ensinar o verdadeiro valor de um sonho conjunto e que possamos continuar sonhando e realizando coisas fantásticas em nossas vidas! Aos meus sogros e cunhados, obrigado pelo entendimento de que é necessário se aperfeiçoar.

Aos amigos e amigas: aqueles(as) de longa data que sempre incentivaram, fico grato pelas novas amizades feitas, em especial, ao Adriano, companheiro de intensas e frutíferas discussões nas noites de quinta-feira.

Por fim, ao relembrar de uma passagem do Filme o Livro de Eli, filme que nos relembra da nossa obrigação de sermos perseverantes e manter a fé no Criador, quero agradecer por concluir a tarefa, pelo bem que tenha feito, e peço perdão se algum mal eu fiz.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

RESUMO

Dallan Marcelo Gregório. Signos em atividades de modelagem matemática: Matematização e Resolução em foco.

Aspectos teóricos e metodológicos associados à Modelagem Matemática na Educação Matemática têm promovido intensas reflexões, debates e produções no meio acadêmico, sobretudo, vinculados a Programas de Pós-Graduação, Grupos de Pesquisa e eventos científicos. No entanto, associações entre Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e Semiótica são mais restritas e limitadas se considerarmos sua implementação na Educação Básica. Neste sentido, a presente dissertação objetivou investigar o que revelam os signos associados às fases Matematização e Resolução propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), em uma atividade de modelagem matemática, a partir de um estudo realizado com alunos do Ensino Médio de uma escola particular do município de União da Vitória/PR, no decorrer das aulas bimestrais de matemática em que o professor pesquisador era também o professor da referida turma. A Modelagem Matemática foi utilizada enquanto alternativa pedagógica de ensino, por meio da qual os alunos puderam investigar questões de seu interesse e mobilizar conteúdos matemáticos e extramatemáticos. Para a implementação das atividades seguimos as orientações de Almeida e Dias (2004) no que se refere à familiarização dos alunos com atividades de modelagem, atendo-nos ao momento dois. Entendemos que as fases Matematização e Resolução foram profícuas à manifestação de conhecimentos para além dos matemáticos e que tal manifestação foi efetivada por meio de distintos signos. Para analisá-los, optamos pela teoria Semiótica de Peirce. Enquadramos a pesquisa no paradigma qualitativo, sendo o tratamento e a análise dos dados coletados apoiados nas premissas da Análise de Conteúdo, de Lawrence Bardin (1977). Agrupamos as considerações em três dimensões: ensino, aprendizagem e cultura estudantil e concluímos, por fim, que os signos identificados revelam estratégias de ação e organização de informações, transições de linguagens, saberes assentados ou não compreendidos e dificuldades em relação à simbologia matemática. Ou seja, os signos revelam importantes elementos que influenciam o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Palavras-Chave: modelagem matemática, semiótica, signos, Ensino Médio.

ABSTRACT

Dallan Marcelo Gregório. Semiotic signs in mathematic modeling: Mathematics and Resolution in focus.

Theoretical and Methodological aspects associated to Math Modeling in Mathematical Education have promoted intense reflection, debates and productions in the academic environment, specially linked to Post Graduation Programs, Research Groups and scientific events. However, associations between Math Modeling in the Mathmatics perspective and Semiotics are more restricted and limited if we consider its implementation in Basic Education. This way, the present paper tried to investigate what signs reveal when associated to the phases of Mathematization and Resolution proposed by Almeida, Silva e Vertuan (2012), in an activity of math modeling, from a study led with High School students in a private school in União da Vitória/PR, along the bimester mathematic lessons in which the researcher was also the professor of the reffered class. Math Modeling was used as a pedagogical alternative of teaching, through which students could investigate subjects of their interest and access mathematical and extra mathematical contents. For the implementation of activities, Almeida e Dias' (2004) orientation was followed, regarding students' familiarization to modeling activities, two being focused by now. We understand that the Mathematization and Resolution phases were successful regarding knowledge beyond mathematicians and this manifestation was effected through distinct signs. In order to analyze them, we chose the Semiotic Theory of Pierce. We framed the research in the qualitative paradigm, being the treatment and the analysis of the collected data anchored under the premises of the Content Analysis, by Lawrence Bardin (1977). We grouped the considerations in three dimensions: teaching, learning and scholar culture and have concluded, finally, that the identified signs reveal strategies of action and organization of data, language transitions, fossilized or not understood knowledge as well as difficulties regarding math symbology. Therefore, signs reveal important elements that influence the process of teaching and learning.

Key-words: mathematic modeling, Semiotic, signs, high School

1. INTRODUÇÃO

Aprender, verbo utilizado como sinônimo para instruir-se ou conhecer e cuja conjugação revela, ou deveria revelar, o desejo de quem ingressa em uma Universidade e desde muito tempo frequenta os bancos escolares. Com esse objetivo regressei aos assentos de uma universidade pública para cursar Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual do Paraná – Unespar, *Campus* União da Vitória no ano de 2011. Durante o curso, obtive formação pedagógica e específica que permitiu visualizar o processo de ensino e aprendizagem em uma ótica ainda não experimentada por alguém que sempre esteve do outro lado, como aluno.

Disciplinas como a de Estágio Supervisionado colocaram-me frente a um ambiente diverso e multifacetado completamente distinto daquele em que vivenciei no passado. Percebi então, corroborado pelas discussões em disciplinas teóricas, que a escola necessita mudar, mudar no sentido de se adaptar e evoluir para atender as demandas que lhe são cobradas. Ainda em meio à graduação, cursei duas especializações: uma na área específica de Ensino de Física e Matemática e, a outra, em Gestão Escolar, acreditando que ambas me auxiliariam na aproximação da dinâmica estudantil e escolar.

Foi na formação inicial que me foram possibilitados os primeiros contatos com a Educação Matemática e a partir dela com suas tendências metodológicas, em especial, a Modelagem Matemática. Concluído o curso de licenciatura, ingressei no mercado de trabalho como professor em regime de contrato temporário, lecionando apenas no período noturno. Prestei concursos para a área, e logo fui convocado para assumir uma cadeira em uma instituição de ensino de minha cidade, o que me forçou a fazer uma difícil escolha: trocar uma carreira na área administrativa já assentada de 16 anos em um órgão público para construir uma nova carreira no magistério, inicialmente com apenas quatro horas aula. Decisão tomada!

A nova carreira me trazia a cada dia que passava várias dificuldades que a graduação me havia mostrado, principalmente em teorias, mas ali, naquele instante era tudo real, demandava ações, decisões e atitudes. Passados alguns meses a decisão de buscar uma formação continuada necessária e, com muito esforço e dedicação, ingressei no programa de mestrado em Ensino e Ciências Naturais e Matemática na Unicentro, com uma ideia, ainda prematura de pesquisa, e que de alguma forma buscava associar atividades de modelagem matemática e teoria dos campos conceituais. Na primeira conversa com a orientadora, explanei sobre minhas intenções com a pesquisa futura, percepções e preocupações com relação à escola. Neste dia recebi o convite para conhecer sobre Semiótica, o que se mostrou um desafio, porém, nesse interim, acabei me apaixonando pela teoria.

Durante o curso de mestrado as disciplinas me proporcionaram aprofundamento teórico e epistemológico, e os diálogos (orientadora) sobre a construção da pesquisa permitiram maior clareza de que a Educação Matemática com suas tendências metodológicas pode ser um caminho para a escola do futuro, pois ela não se ocupa apenas da área de Matemática e Psicologia. Conforme atestam Godino e Batanero (1998), ela, para além de associar Psicologia e Matemática mobiliza outras áreas do conhecimento, que convergem a um mesmo fim. Dentre estas áreas, destacamos: Didática da Matemática, Sociologia, Ciência da Educação, Epistemologia, Semiótica, entre outras.

Desta forma, os autores sugerem que a Educação Matemática se ocupa da matemática, dos processos cognitivos (aprendizagem), dos métodos e técnicas de ensino. Tem em seu âmago, a frutificação de um arcabouço de pensares associados à formação de professores, aproveitamento escolar, organização de currículos, a prática e a avaliação da aprendizagem. Entendemos sob este aspecto que é importante repensar o ensino da matemática e compreender que este é um processo que perpassa pelo entendimento de suas múltiplas singularidades.

Ao admitir que a escola demanda novas formas de ensinar, tomando como premissas as reflexões da prática escolar que vivencio e o fato de que a Matemática não é desconexa da vida das pessoas, procurei na Modelagem Matemática, enquanto tendência pedagógica, meios de refletir sobre os meus anseios ao passo que ela subsidiou a presente investigação. A partir de leituras como Almeida, Silva e Vertuan (2012), Almeida e Dias (2004) compreendemos que atividades de modelagem matemática estão de certa forma assentadas na busca por uma solução para uma situação inicial, não necessariamente matemática, que pode ter sido originada pelos alunos, pelo professor, ou por um acordo entre ambos; e que em tal busca são mobilizados conhecimentos matemáticos e não matemáticos.

As ações dos alunos na busca por tal solução possibilitam o envolvimento destes com uma série de procedimentos, mediados pelo professor, permite que individual ou coletivamente, mobilizem estruturas e conceitos matemáticos. Sendo a linguagem matemática repleta de simbologia e sinais próprios, recorremos, ao assumir o desafio proposto pela minha orientadora, de conhecer sobre Semiótica. Logo nos primeiros estudos fomos levados a considerar que a associação entre Modelagem Matemática e Semiótica[1] mostra-se promissora já que a primeira se ocupa da matemática propriamente dita, e a segunda, por ser, de forma simplista, a área da ciência que se ocupa do estudo dos signos, ou seja, os significados e os efeitos que os signos geram nos indivíduos. Assim, uma investigação que busque associa-los pode contribuir para a compreensão de fenômenos em estudo sob enfoques distintos e mais amplos.

Nossa ideia não era necessariamente original, pois aproximações entre Semiótica e Modelagem Matemática[2] na Educação Matemática são encontradas em trabalhos recentes e a diversidade de abordagens condiz com as pluralidades de concepções e tratamentos que cada um desses campos científicos promove. Dada esta diversidade de abordagens, ao pretendermos estabelecer uma interlocução entre a Modelagem Matemática e a semiótica peirciana, imbuídos de um olhar singular, construímos como questão de investigação: o que revelam os signos associados às fases Matematização e Resolução em uma atividade de modelagem matemática?

Com essa questão buscamos compreender possíveis relações entre os signos gerados pelos alunos nessas duas fases e seus impactos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Isso porque quando os alunos desenvolvem atividades de modelagem matemática geram signos para matematizar e, posteriormente, resolver a situação. Ademais, esses signos podem sinalizam contribuições ao processo de ensino e aprendizagem.

Além da formulação de nosso objetivo geral, escolhemos como objetivos específicos: - identificar os signos gerados pelos alunos durante as fases matematização e resolução; - analisar a influência dos signos identificados no desenvolvimento da atividade. Na tentativa de orientar nossos trabalhos, transformamos esses objetivos em duas questões auxiliares: - Quais são os signos gerados pelos alunos durante as fases Matematização e Resolução quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática? – Qual a influência destes signos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática?

Organizamos a apresentação deste texto em cinco seções, sendo a primeira esta introdução, na qual contextualizamos a escolha da temática, discorremos sobre o problema de estudo e pontuamos nossos objetivos. Na segunda seção, expomos as discussões teóricas sobre Modelagem Matemática e Semiótica, além de referenciar algumas interlocuções entre

---

[1] Utilizaremos o termo Semiótica para nos referir à ciência da Semiótica; semiótica para as assertivas que se relacionam a elementos desta teoria; semiótica peirciana para as vezes que fizermos menção aos escritos da teoria desenvolvida por Charles Sanders Peirce.

[2] Ao utilizarmos os termos Modelagem Matemática, em maiúsculo, estamos nos referindo a metodologia de ensino, campo de estudos relacionado à Educação Matemática. Enquanto de modelagem matemática, em minúsculo, referem-se as atividades realizadas quando da utilização da metodologia anterior.

essas áreas na literatura contemporânea. Na terceira seção, caracterizamos metodologicamente o estudo, seu enquadramento e explicitamos a maneira como foram dados os encaminhamentos, ou seja, a coleta e o tratamento de dados. Na quarta seção, apresentamos o detalhamento e a análise de duas atividades eleitas a compor esta pesquisa, bem como buscamos manifestar o que nos revelaram os signos identificados. Por fim, a quinta seção é composta pelas nossas considerações acerca do trabalho realizado.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: APROXIMAÇÕES TEÓRICAS

Apresentamos, neste capítulo, considerações acerca da Modelagem Matemática e sua significação na Educação Matemática, caracterizando-a segundo os autores assumidos nesta investigação. Também, elucidamos aspectos relativos à teoria Semiótica, com destaque para a semiótica peirceana. Para tratar dos entrelaçamentos dessa teoria com a Modelagem Matemática apresentamos algumas interlocuções entre essas duas áreas.

2.1 Sobre Modelagem Matemática e Semiótica

A Modelagem Matemática, assim como a Semiótica, nasce em um contexto externo ao da Educação Matemática e, com o crescente avanço nas pesquisas nessas duas áreas ocorrem contribuições que levam a considerar que esses dois aportes teóricos têm potencial para fomentar discussões e reflexões que se associam às práticas de sala de aula e favorecer com que questões relativas ao ensinar e aprender matemática por meio da Modelagem Matemática sejam compreendidas a partir de lentes semióticas.

O termo Modelagem Matemática foi empregado, segundo Vieira e Caldeira (2008), provavelmente no início do Século XX nas áreas de Engenharia e Ciências Econômicas com a conotação de modelar, descrever ou formular e resolver um dado problema de uma área do conhecimento. Essa acepção se assemelha com a utilizada pela Matemática Aplicada, que a compreende como um método que visa associar um modelo matemático a uma realidade, buscando entender e resolver problemas a ela relacionados (BASSANEZZI, 2002).

Ainda que a Modelagem Matemática possua suas raízes assentadas na Matemática Aplicada, e desta forma, tenha consigo predicados intrínsecos desse contexto, a promoção de alterações no desenvolvimento de atividades deste gênero foi realizada pela Educação Matemática com o intuito de que fosse utilizada com objetivos educacionais. Sendo assim, as finalidades da Modelagem Matemática nesses dois campos são distintas; enquanto na Matemática Aplicada busca-se a resposta para o problema da realidade, na Educação Matemática emerge a possiblidade de discutir conceitos matemáticos a partir de uma situação problema e, debater essa realidade por meio da matemática, além, por vezes, de agir sobre ela (VERONEZ, VELEDA, 2016).

No que compete às discussões associadas à Modelagem Matemática na Educação Matemática reconhecemos a existência de uma pluralidade de ideias, definições e concepções;

Barbosa (2001), Burak (2004), Kaiser e Sriraman (2006), Almeida e Brito (2005), entre outros. Magnus (2015, p. 4), ilustra tal pluralidade ao condensar as diferentes facetas e/ou compreensões de Modelagem Matemática na Educação Matemática segundo diversos autores:

> [...] esse discurso é entendido por alguns pesquisadores da área como uma metodologia (LUZ, 2003; BURAK, 2010; PEREIRA, 2010; BRANDT, 2010; BISOGNIN et al, 2012; ROSA, REIS, OREY, 2012), um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001; FRANCHI, 2002; BRAZ, KATO, 2014), uma estratégia pedagógica (MALHEIROS, 2004; SOARES, BORBA, 2014), uma abordagem segundo a educação matemática crítica (ARAÚJO, 2002, 2009), uma estratégia de ensino-aprendizagem (BIEMBENGUT, HEIN, 2007; BASSANEZI, 2009), uma concepção de educar matematicamente (CALDEIRA, 2009; MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011).

Dentre as diferentes compreensões admitimos que a Modelagem Matemática está associada à procura de uma representação matemática para algum fenômeno ou situação não-matemática, tal como nos permite a interpretação de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Essa busca pode ocorrer dentro ou fora da sala de aula, configurando-se como uma atividade em que utilizamos da matemática para abordar uma situação problema que não é necessariamente matemática (ALMEIDA, BRITO, 2005), sendo assim, a "modelagem matemática é, em primeiro lugar, sempre sobre algo, uma situação e um problema decorrente dessa situação, e que a matemática é 'apenas' uma parte de todo o processo" (PERRENET; ZWANEVELD, 2012, p. 3). Complementando o exposto, Almeida e Silva (2017) argumentam que a Modelagem Matemática não trata especificamente de temáticas relacionadas ao campo matemático, mas que "o conhecimento com relação a este algo é mediado pelo conhecimento que se tem da Matemática" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 209).

Podemos pensar que as atividades de modelagem têm intrinsecamente uma finalidade e uma orientação, a primeira, solucionar um problema que encaminha direciona a segunda, nas palavras de Almeida, Silva e Veronez (2015, p. 2), as atividades de modelagem são:

> [...] orientadas pela busca de solução para um problema cuja origem está, de modo geral, fora da matemática consideramos que seu desenvolvimento em aulas de matemática contribui para a compreensão de fenômenos do mundo, da vida. Todavia esta compreensão é mediada pela compreensão matemática.

Sob esse viés, a Modelagem Matemática permite ao aluno promover uma leitura de fatos, acontecimentos do seu mundo ou da sua vida, ainda que externos ao ambiente escolar, tendo como ferramenta a matemática. Dito isto, a Modelagem Matemática configura-se como "um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno que pretende representar" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 219).

Quando nos referimos a uma atividade de modelagem, fazemos menção àquelas atividades que tem como início uma situação problema, e como término, uma solução para esse problema, que é obtida através da mediação de distintos procedimentos e ações desencadeados por alunos e professor com a utilização subjacente da matemática. Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17) expõem que uma atividade de modelagem matemática considera "[...] uma situação problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução".

Isso nos leva a se atentar ao fato de que atividades de modelagem matemática permitem ao aluno estar diante de uma situação investigativa que demanda ações no sentido de compreender a situação problema ao proceder à investigação, interpretá-la e respondê-la. Almeida, Silva e Vertuan (2012) ilustram os elementos que julgam representar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (Figura 01).

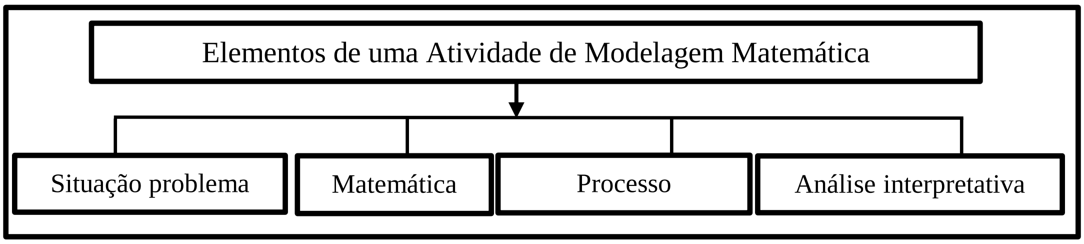

Figura 01. Elementos característicos de uma atividade de Modelagem Matemática.
Fonte: Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 17.

O fato de colocar os alunos ante um cenário investigativo possibilita que ocorra uma mudança em sua forma de agir, pelo menos no sentido da educação tradicional, isso porque, é requerido que eles estruturem um problema a partir de uma situação inicial, identifiquem elementos matemáticos que possam ser utilizados em sua resolução, investiguem se esses elementos dão conta de respondê-la e por fim, analisem seus procedimentos. Para Veronez (2013), os elementos se distinguem dos procedimentos adotados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Segundo a autora os elementos evidenciam alguns aspectos referentes ao problema, como: informações relacionadas ao contexto em que o problema emerge, o reconhecimento ou identificação de um problema a resolver, a elaboração de um modelo matemático, a resolução do problema e aceitação de uma resposta como solução; e os procedimentos, envolvem ações para que estes se concretizem.

Veronez (2013), complementa que a atividade não se finda quando o aluno encontra uma solução; encontrar uma resposta não significa que ela seja necessariamente representativa da situação analisada, é preciso validá-la.

Um ponto comum nas discussões sobre Modelagem Matemática é que esses procedimentos adotados durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem conduzem à construção de um modelo matemático. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) afirmam que "o modelo matemático é o que 'dá forma' à solução do problema e a Modelagem Matemática é a 'atividade' de busca por essa solução". Salientam ainda que o modelo "é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se 'torna presente' por meio deste modelo" (p. 13), pois o modelo pode "prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras" (idem).

No que se refere ao modelo cabe destacar que as distintas concepções de Modelagem Matemática influenciam o que cada autor concebe como modelo. Sendo assim, admitimos como modelo o que Doerr e English (2003), citados por Almeida e Silva (2017, p. 209), apresentam:

> [...] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo cuja finalidade é prover meios para descrever, explicar e mesmo predizer o comportamento do fenômeno, por meio de representações que podem incluir desde símbolos, diagramas e gráficos, até expressões algébricas ou geométricas.

O modelo, seja ele puramente matemático ou não, é fruto de um processo de investigação do aluno, que ao tentar resolver uma situação problema, elabora diferentes estratégias e ações que para chegar ao modelo, utiliza-se de [...] diferentes representações dos objetos matemáticos" e outras "[...] representações matemáticas" (VERTUAN, 2013, p. 35). Da mesma forma, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16) nos dizem que os alunos se utilizam de "[...] símbolos para realizar descrições matemáticas".

Assim, o modelo matemático é um produto simbólico criado pelo aluno durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, que tem por finalidade explicar ou fornecer meios de desvendar respostas para o problema investigado. Para obter tal modelo, os alunos transitam por certos percursos que são denominados e classificados de formas distintas conforme o referencial teórico assumido. Encontramos na literatura distintos esquemas que visam representar percursos, em alguns casos denominados fases em outros de etapas, e apresentam divergências em suas compreensões, tal qual as conceituações e concepções de Modelagem Matemática que os amparam.

Nesta investigação, trazemos para discussão as fases definidas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), representadas na Figura 02. Esses autores ancoram as atividades de modelagem matemática em quatro fases: *inteiração*; *matematização*; *resolução*; e, *interpretação de resultados e validação*.

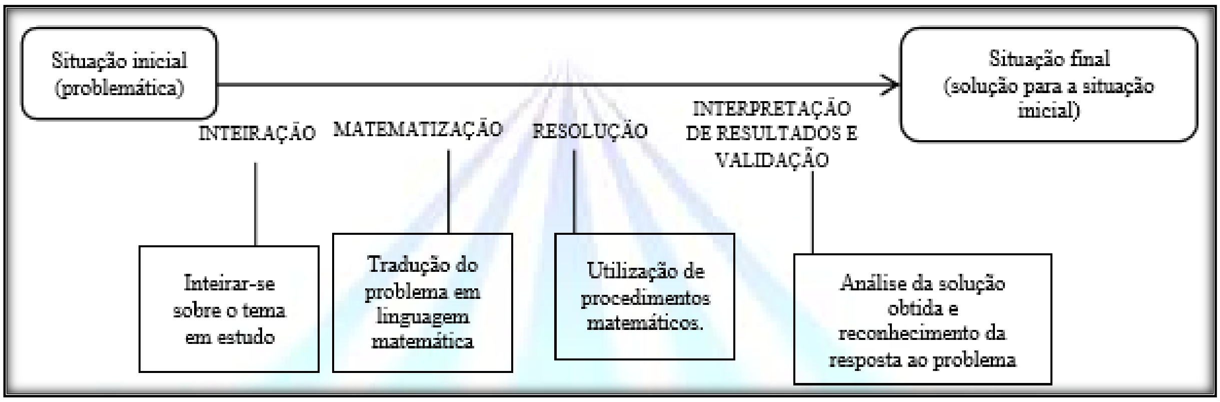

Figura 02. Fases da Modelagem e suas características.
Fonte: Veronez e Veleda (2016). Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15).

A primeira dessas fases, *inteiração,* relaciona-se com um contato inicial com a situação problema. Momento no qual o aluno deve, literalmente, inteirar-se do assunto, buscar em livros, revistas, etc., informações acerca da situação (de seu interesse, ou que foi proposta pelo professor, ou ainda, por grupos de alunos), para então formular um problema de estudo, o qual deseja resolver. Esta fase poderá ser retomada no transcorrer da realização da atividade, pois pode ser necessário o levante de informações complementares para a compreensão da situação ou reconhecimento do problema.

Na *inteiração*, o problema a resolver continua em linguagem coloquial, fazendo-se necessária sua conversão para a linguagem matemática. A transição de linguagens é denominada, por Almeida, Silva e Vertuan (2012), *matematização*.

> A busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por "matematização", considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas (p. 16).

Na fase *matematização* o aluno precisa recorrer à escolha de variáveis, construir hipóteses e conjecturar caminhos para a construção do modelo, sempre levando em conta, segundo Vertuan (2013), os aspectos inerentes à situação inicial que sejam relevantes ao problema em questão. Essa conversão de linguagem permite representar matematicamente uma organização da realidade, ou seja, a matematização é o retrato de uma situação real por meio de regras, normas matemáticas e acaba por evidenciar técnicas e procedimentos que os alunos adotarão para a resolução do problema.

Matematizada a situação problema, o aluno deve empenhar esforços na sua resolução. Essa é a fase denominada *resolução*, na qual o aluno lançará mão de seus conhecimentos prévios, métodos e representações, técnicas e conceitos adquiridos em matemática para resolvê-lo (VERTUAN, 2013).

A *resolução* é, portanto, a fase que consiste na construção de uma resposta ao problema. Tal resposta pode ser um modelo matemático ou estar alicerçado em um modelo matemático. Ainda, essa resposta pode descrever ou permitir analisar aspectos relevantes da situação, responder a questões subjacentes ao problema ou, em alguns casos, possibilitar a realização de previsões. Para Vertuan (2013, p. 35) nessa fase, o aluno utiliza:

> [...] conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, põe em uso seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos [...].

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012), o modelo matemático, seja ele qual for, deve possuir uma finalidade pedagógica, ou seja, deve descrever, representar algo. Além disso, segundo Veronez (2013, p. 24):

> [...] a elaboração de modelos matemáticos não tem um fim em si mesma; visa incentivar a busca por uma solução para o problema evidenciado na situação inicial, alicerçada por atitudes interpretativas. Essa busca também conduz a uma leitura da situação ou à retomada de alguns aspectos não considerados em momento anterior. Além disso, no contexto de sala de aula, favorece discussões sobre conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos.

A quarta fase, *interpretação de resultados e validação*, é o momento em que os alunos envolvidos com a atividade de modelagem matemática devem lançar mão do julgamento e reflexão crítica sobre os procedimentos matemáticos e a conclusão (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

O procedimento de validar se a resposta encontrada é representativa ou não da situação problema define o encerramento da atividade, ou sua retomada. Caso seja necessário, os alunos devem, conforme escreve Veronez (2013), rever a situação e seguir outros caminhos para a resolução do problema, ou seja, retomar as fases. Por outro lado, se admitida que a solução é representativa da situação problema, deve ocorrer a socialização de sua resposta na tentativa de convencer os colegas que a solução é consistente, tanto sob o viés matemático quanto do viés do problema em foco (VERTUAN, 2013).

Embora, pedagogicamente, pareçam estar definidas as fases que caracterizam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, essa sequência das fases nem sempre se efetiva nessa ordem. Isso porque, conforme alertam Almeida, Silva e Vertuan (2012) uma das principais características das atividades de modelagem matemática é que elas são dinâmicas e apresentam um caráter aberto, não necessariamente sequenciado, o que permite ao aluno que ele transite livremente entre uma e outra fase, sempre que julgue necessário rever premissas e conclusões a que se chegou.

Dadas as características peculiares de uma atividade de modelagem matemática, lançamos mão de lentes da Semiótica a fim de refletir acerca da variedade de signos emergentes no seu desenvolvimento. As atividades de modelagem matemática, de modo geral, são repletas de simbolismo matemático, segundo os quais desencadeiam processos de significação e ressignificação, não apenas aos aspectos intrínsecos destes símbolos, como também a outros tipos de signos, como: gestos, palavras ou mesmo expressões corporais.

É neste cenário que a teoria Semiótica se apresenta como uma promissora lente às análises de uma atividade de modelagem matemática, uma vez que segundo D´Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 27) “a semiótica e a matemática nasceram juntas, uma ao lado da outra, ajudando-se e sustentando-se mutuamente, sem ninguém saber, durante muito tempo”.

Assim como a Modelagem Matemática, a Semiótica também vem amparada em uma variedade de entendimentos, que por vezes, podem até ser contraditórios. O próprio termo signo gera certa confusão, dependendo da vertente semiótica assumida.

Os termos semiótica e signo são utilizados há muito tempo e, por vezes, como sinônimos. Deely (2003) ressalta que na Grécia Antiga utilizava-se o termo *semeion* como tradução para signo, raiz etimológica, mesmo que não a conceitual, da palavra semiótica. Aliado a essa ideia Nöth (2008) escreve que os termos eram inicialmente utilizados como sinônimos ao afirmar que a prática semiótica é recorrente à origem da existência humana, que sempre se utilizou de signos.

D´Amore, Pinilla e Iori (2015) afirmam que para os gregos, um signo era um fenômeno de natureza física, “um sinal natural” que era acessível pelos sentidos, que fazia menção a outro fenômeno físico (ligados com causa e efeito, tal qual fogo e fumaça), portanto, denotava “uma interação de natureza física, não social, ou uma relação de inferência” (p. 28). Esses autores também explicam que a semiótica grega distinguia claramente a “teoria do signo” (natural, sintoma ou sinal) e a teoria da linguagem (teoria dos nomes ou das expressões linguísticas). Abbagnano (2007, p. 905), explica que as duas vertentes das teorias semióticas gregas, o signo natural e a teoria da linguagem, começam a se fundir com os filósofos do estoicismo (doutrina fundada em Atenas por Zenão de Cítio – Século II a.C.). O signo passa a ser utilizado por esses filósofos para se referir “aquilo que parece revelar alguma coisa, e em sentido específico chamavam de signo aquilo que é indicativo de uma coisa escura, não manifesta”.

O termo semiótica, com origem na palavra grega *semeiotiké*, não tem referência a uma teoria de signos, mas a um ramo específico da medicina, cujo objeto de estudo era os sintomas das enfermidades. Somente quando Charles Annandale (1883) edita seu dicionário, é que o termo passa ser utilizado com o significado de ciência geral dos signos (D´AMORE; PINILLA; IORI, 2015). No campo da filosofia, a Semiótica supostamente é introduzida com esta designação por John Locke (1632-1740) em sua obra Ensaio para o Entendimento Humano, título original, *Essay on Humam Understanding*, em meados do século XVII.

Estudos que tratam da Semiótica como a ciência geral dos signos foram desenvolvidos em três locais distintos, física, geográfica e culturalmente: na União Soviética, na Europa Ocidental e nos Estados Unidos, cujos principais representantes são: Lev Semenovitch Vygostky, Ferdinand de Saussure e Charles Sanders Peirce, respectivamente. Esses pesquisadores desenvolveram teorias que tratam dos signos, cada qual com distintas conotações quanto à natureza e papel do signo (SANTAELLA, 1984). Essa autora salienta que embora Platão e Aristóteles tenham dado sua contribuição para o desenvolvimento da Semiótica, as maiores contribuições para a ciência são de Saussure e Peirce, não obstante elas se diferem uma da outra devido às suas raízes distintas.

Nesta investigação, atemo-nos aos estudos e pressupostos do americano Charles Sanders Peirce (1839-1914), que na primeira metade do século XIX ocupou-se de organizar uma doutrina filosófica-analítica que possibilita uma compreensão das estruturas do conhecimento e, desta forma, fundamenta a semiótica peirciana como a ciência dos signos. D´Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 59) enfatizam que Peirce é “[...] considerado o fundador da semiótica moderna, um gênio universal em muitas ciências [...]”.

Em sua teoria, Peirce aborda a semiótica conjuntamente com a lógica, gerando uma filosofia da linguagem. Fidalgo e Gradim (2005, p. 142) nos trazem que a teoria peirceana tem sua construção teórica assentada em duas frentes:

> [...] uma taxonomia, que se ocupa da sistematização e classificação exaustiva dos diferentes tipos de signos possíveis; e uma lógica, que se ocupa do seu modo de funcionamento (como significam os signos) e do papel que estes desempenham na cognição humana e no acesso do homem ao mundo da experiência e do vivido.

Segundo D´Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 59), a teoria de Peirce está fundamentada na ideia de que a cognição, o pensamento e até o próprio ser humano tem natureza semiótica, e "os signos são os meios utilizados para representar algo para alguém, são os meios do pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem".

Compreendido que os signos desempenham significativo papel, resta-nos uma questão: o que Peirce compreende ou concebe por signo? Em sua obra, é possível encontrar diversas passagens em que o autor explicita o seu pensamento quanto ao vocábulo, no entanto, ressalvamos que a noção que ele assume para signo ultrapassa a natureza da linguagem, já que para ele signo

> [...] é qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa outra coisa, chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial, efeito este que é chamado de interpretante do signo (SANTAELLA, 2002, p. 8).

A partir disto, Peirce (2005, p. 61) estabelece uma relação entre signo e representação: "quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato de representar, pode-se denominar o primeiro de "signo" e o último de "representação". Para ele, "representar é estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse outro". Pautada nessa assertiva, Santaella (1984), conclui que os signos possuem natureza triádica na semiótica peirciana e podem ser analisados em si mesmos, nas próprias características internas, referências ao que indicam, fazem menção ou representam, bem como nos efeitos que estão aptos a produzir em seus receptores.

É na relação entre signo e objeto que resulta o interpretante, este último, decorrente de uma ação cognitiva que se deu ou ocorreu na mente do intérprete, ou seja, nos dizem que o signo representa "algo que ao ser conhecido por nós, faz com que conheçamos algo mais" (FIDALGO; GRADIM, 2005, p. 147). D´Amore, Pinilla e Iori (2015), enfatizam que essa relação triádica resulta de uma das definições que Peirce assume para o signo e que envolve três elementos: "um *represantamen*, que significa o veículo, a parte 'material', do signo; um *objeto*, ou seja, aquilo ao qual o *representamen* remete; um *interpretante*, isto é, o que deriva ou é gerado pela relação entre o *representamen* e o objeto" (p. 60, grifos dos autores).

Assim, o signo passa a ser um agente mediador entre o objeto e o interpretante. Ferreira (2006), nos traz uma representação esquemática da tríade semiótica peirciana, ilustrada na Figura 03.

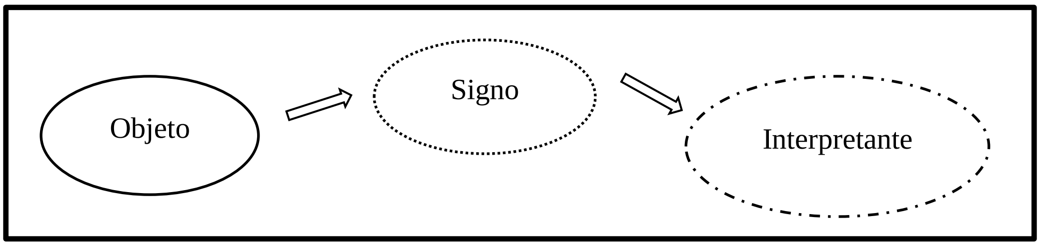

Figura 03. Esquema semiótico peirceano.
Fonte: FERREIRA, 2006, p. 58.

Nessa figura o interpretante é o terceiro elemento da tríade e é entendido como aquilo que se forma e toma o lugar do objeto real na mente do intérprete (foi produzido na mente real ou meramente potencial), considerando que o objeto, primeiro elemento e determinante do signo, é inatingível pela percepção, que é representado pelo signo, o segundo elemento da tríade. Esse fato nos remete à intencionalidade do signo. Segundo Santaella (1984, p. 78) todo signo possui a intenção de:

> [...] representar, em parte pelo menos, um objeto que é, portanto, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo se o signo representar seu objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente, de tal modo que, de certa maneira, determine naquela mente algo que é mediatamente devido ao objeto. Essa determinação da qual a causa mediata ou determinante é o signo, e da qual a causa mediata é o objeto, pode ser chamada o interpretante.

Para Peirce (2005) um signo só pode representar um objeto se para algum intérprete ele gerar ou produzir uma outra coisa em sua mente (interpretante). Nos termos que Santaella (1984, p. 79) utiliza "o significado de um signo é outro signo – seja uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual [...] seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro). "

Da relação triádica construída entre objeto, signo e interpretante, concluímos que o signo se refere a um objeto que gera uma reação num intérprete que cria um interpretante, e este último é um novo signo que foi produzido a partir do original. O processo de criação de novos signos (interpretantes) a partir do primeiro signo pode ocorrer inúmeras vezes, caracterizando um processo de repetição, dependendo do conhecimento do intérprete para com o signo. Esse processo de recriação de signos é denominado por Peirce de semiose. Almeida e Silva (2015) citam Santaella (1992) para explicar o funcionamento do processo de semiose, usando o termo engendramento lógico para elucidar a função primordial do complexo de relações que existe entre os três elementos da tricotomia sígnica.

Sob outro enfoque, a geração de novos signos, ou seja, de interpretantes, ocorre no momento em que o intérprete constata uma certa "instabilidade ou desconforto", que será superado pela semiose. Segundo Drigo (2007, p. 85) "a semiose se desencadeia quando da atualização da mente". Assim, de certa forma, a semiose manifesta atos interpretativos particulares, conexos às experiências pessoais da forma como o intérprete gera entendimentos a partir de sua experiência e de signos de naturezas distintas. Os atos interpretativos particulares acabam por gerar certa gnose.

Nas assertivas de Peirce (1998), a construção do conhecimento ocorre no momento em que acontece a semiose, porém, ressalva que "conhecer, contudo, não tem por finalidade dominar o objeto e esgotá-lo em sua representação, mas oferecer uma linha de conduta suficientemente boa para nosso ardente desejo de comungar com o objeto possa com o tempo, e cada vez melhor, se realizar" (CP 2, 227). Ou seja, "o signo é algo que serve para produzir conhecimento sobre alguma coisa, para a qual o signo está (*stands for*) ou representa. Essa outra coisa é chamada de objeto do signo" (PEIRCE, 1998, EP2, p. 13).

O desencadear da semiose na mente do indivíduo nos remete a compreender mais uma tríade que Peirce (2005) cria, ao direcionar seu olhar especificamente aos interpretantes e os denomina de: imediato, dinâmico e final. O interpretante imediato consiste na qualidade de impressão que o signo pode produzir no intérprete. O interpretante dinâmico refere-se ao efeito produzido pelo signo e corresponde à interpretação do signo pelo intérprete. Já o interpretante final, segundo Peirce (2005, p. 164), "é aquilo que finalmente se decidiria ser a interpretação verdadeira se se considerasse o assunto tão profundo que se pudesse chegar a uma opinião definitiva".

A caminhada dos interpretantes, desde o mais simples ou primitivo, imediato passando pelo dinâmico e chegando ao final, parece seguir certa lógica, segundo Drigo (2007). E, neste sentido, podemos compreender que o interpretante final não é algo preconcebido, mas desenvolvido durante a geração dos signos; "o interpretante final não é algo que está determinado antes do processo iniciar, mas um interpretante que cresce também na semiose" (DRIGO, 2007, p. 90).

Dito isto, admitamos que de um lado a teoria peirciana está assentada na ideia de que tanto o pensamento, o ser e a cognição possuem naturezas semióticas e, some-se a isso o fato que os signos representam a maneira como algo é revelado para alguém, e isto acaba por revelar as formas de pensamento, de compreensão, raciocínio e por fim de aprendizagem. E, por outro, que atividades de modelagem matemática demandam a busca por dados e a criação de diferentes representações para esses dados, para então convertê-los da linguagem natural para a linguagem matemática que explique essa situação. Embora sejam lentes, arcabouços teóricos distintos, a Modelagem Matemática e a Semiótica podem dialogar e produzir resultados promissores quando da análise de atividades de modelagem desenvolvidas em sala de aula.

Na seção a seguir, visando localizar nossa investigação entre as já encontradas na literatura, trazemos alguns aspectos julgados relevantes frutos de interlocuções entre Modelagem Matemática e Semiótica. Apresentamos, portanto, alguns dos trabalhos que fazem associações entre essas duas áreas, focalizando suas intenções e resultados.

2.2 Interlocuções entre modelagem matemática e semiótica peirceana

Para trazer à tona algumas das interlocuções entre Modelagem Matemática e Semiótica discorremos sobre alguns aspectos abordados e discutidos nos trabalhos de Silva (2008), Silva (2013) e Veronez (2013), Almeida e Silva (2017).

Silva (2008) analisa três atividades de modelagem na perspectiva da Educação Matemática e estabelece relações entre elas e a semiótica de Peirce no que diz respeito à categorização dos signos, denotadas por Charles Sanders Peirce. Constitui ainda uma relação com os modos de inferência dos signos classificados por Kehle e Cunningham (2000), e com os registros de representação semiótica abordados por Raymond Duval.

Veronez (2013), admite que as atividades de modelagem matemática permitem aos alunos produção e/ou utilização de signos enquanto realizam ações cognitivas relacionadas à situação, ao problema, aos objetos matemáticos e à resposta reconhecida como uma solução para o problema. A autora reflete sobre esses signos sob a ótica peirciana aliada às ideias de Heinz Steinbring, que afirma ter o signo duas funções: uma semiótica (representa algo); e uma epistemológica (o signo revela conhecimento sobre o que ele representa). Ao analisar a relação entre os signos e os encaminhamentos dados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática constrói triângulos epistemológicos que permitem reconhecer os signos utilizados/produzidos pelos alunos durante a busca por uma solução para o problema, e nota uma complementariedade entre eles. Apresenta como resultados a dinamicidade e a complementariedade existente entre os signos, já que determinam ou encaminham a sequência do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, de tal forma que eles representam efetivamente aquilo que se pretende externalizar e indicam mobilização e produção de conhecimento por parte dos alunos, com referência àquilo que aquele signo representa.

Silva (2013) investiga a emergência dos signos interpretantes em distintas fases de uma atividade de modelagem, enfoca o significado dado ao objeto (parte da tríade peirciana). Suas considerações mostram que os signos interpretantes dos alunos (intérpretes) no desenvolvimento da atividade de modelagem sofrem alterações e se intensificam quando eles se familiarizam com essas atividades.

Almeida e Silva (2017) discutem relações entre a ação e a produção de signos em atividades de modelagem. Utilizam-se do conceito peirceano semiose como delimitador de sua análise e inferem que além da semiose não ser um processo limitado, revela que a Matemática e o fenômeno são inseparáveis, gerando uma espécie de rede de signos que remetem a conhecimentos preexistentes ou novos conhecimentos, associados de certo modo, aos conhecimentos matemático, ao problema em questão e ao conhecimento tecnológico.

Soa quase como consenso nessas produções que os signos possuem estreita relação com a situação e com o problema definido para o estudo, bem como com os objetos matemáticos mobilizados pelos alunos na resolução do problema e com a resposta admitida como uma solução para ele. Os signos podem revelar aspectos relativos à forma que os alunos expressam seus pensamentos e conhecimentos ao buscarem uma solução para o problema que originou a atividade de modelagem matemática.

2.3 Atividades de modelagem matemática em sala de aula

Discutiremos nesta seção sobre a implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula, relacionando o que é requerido do aluno e do professor, bem como ao processo de como proceder tal implementação.

Iniciemos com a figura do professor que, segundo Veronez (2013, p. 28), deve alterar a sua forma de agir e propiciar que os alunos criem "[...] relações entre seus conhecimentos, seja da situação em estudo, seja da matemática, ou entre ambos". Para além de dar esse encorajamento, cabe ao professor proporcionar a criação de um espaço de discussão durante a atividade, fomentando a superação de dificuldades e provocando enriquecer a investigação.

Deve ainda observar para que as diferentes opiniões sejam valorizadas e consideradas em sua individualidade, além de oportunizar a superação de dificuldades encontradas.

Em Modelagem Matemática o docente perde a característica de transmissor de conhecimentos e torna-se um guia da atividade, conforme é anotado por Malheiros (2008), quando nos afirma que o professor não deve centralizar as ações em sua pessoa, visto que não é a única pessoa a definir os problemas levantados em sala de aula, deve sim, mediar o processo através de sugestões, diálogos e críticas.

Quando o professor se desveste da figura clássica de transmissor e deixa de ser a figura central na sala de aula, poder-se-ia pensar que renegou a sua autoridade, isso é contestado por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 24) que consideram que o fato do professor admitir ser orientador não implica em "despir-se da autoridade de professor", mas em assumir um novo papel, o de "[...] indicar caminhos, [...] não esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função".

Desta forma, atividades de modelagem geram uma completa ressignificação do ato de lecionar; uma mudança conceitual. O professor não deve mais se portar como sendo a figura central, precisa ser autoridade, porém sem autoritarismo. Não cabe ao professor fornecer as respostas prontas, mas auxiliar no processo da busca por elas. Para isso deve lançar mão de ações que direcionem, guiem os alunos.

Veronez e Castro (2018) ao analisarem atividades de modelagem denominam as ações do professor em uma atividade de modelagem como intervenções, e as classificam em três categorias: questionar, sugerir e esclarecer. A primeira, faz menção às ações do docente que buscam criar nos alunos um processo reflexivo, a segunda, prima por inspirar ou direcionar os alunos para determinados encaminhamentos, e por fim, a terceira possui caráter elucidativo frente às dúvidas deles.

As intervenções realizadas pelo professor durante uma atividade de modelagem possuem a finalidade de mediar o seu desenvolvimento, ressalvando que para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 25), "o sujeito do processo cognitivo aprendedor, é o aluno", e isto implica que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem esteja dependente, via de regra, do envolvimento e comprometimento dos alunos.

A atuação do professor pode impactar de modo significativo nos desfechos de tais atividades, pois para Veronez (2013, p. 1) a conclusão de uma atividade de modelagem depende "[...] dos encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos e de seus conhecimentos e das intervenções realizadas pelo professor". Observa também que as intervenções devem ser moderadas de modo a não sobrepor ou interferir de modo negativo na autonomia concedida aos alunos para a resolução do problema em questão, permitindo a eles uma posição de autores e responsáveis pelo que produzem.

Nos parece evidente que há ruptura com o modo de ensino tradicional quando o professor adota atividades de modelagem matemática em suas práticas. No que se refere a mudanças ou alterações na forma de agir é sabido que, em geral, desencadeiam processos de negação e resistência nas pessoas, criando obstáculos difíceis de serem superados, pois é preciso deixar sua zona de conforto, é preciso mudar formas já assentadas de pensar e agir que estão, de certo modo, enraizadas em aspectos culturais de longa data.

Com a intenção de minimizar esse fato, Almeida e Dias (2004) sugerem que a inserção da Modelagem Matemática aconteça de forma progressiva em três *momentos*[3], a fim de que exista uma familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática.

No *primeiro momento* de familiarização com atividades de modelagem matemática o professor deve levar à sala de aula atividades que já foram desenvolvidas em algum momento anterior por um outro grupo de alunos, disponibilizando o tema, o problema e as informações necessárias à sua resolução, portanto, neste caso a atividade consistirá em recriar o desenvolvimento que foi dado antes. No *segundo momento*, o professor fornece aos alunos uma temática, que pode ser a partir de um texto, por exemplo, e indica a eles que desta temática deve emergir uma situação ou um problema de investigação. Esse problema pode se originar das discussões realizadas coletivamente no grupo sobre o tema e, pelo grupo precisa ser estudado e resolvido. O fato interessante aqui é que a partir de uma mesma temática podem surgir diferentes problemas a serem analisados. Por fim, o *terceiro momento* é aquele no qual os alunos, por escolhas individuais e confirmadas coletivamente pelo grupo que integram, decidam uma temática a ser estudada, ou seja, os alunos desenvolvem a atividade em sua totalidade. Eles são responsáveis por todo o desencadear, desde o princípio até o da comunicação dos resultados.

A partir desses *momentos* pode-se propiciar um ambiente favorável à aceitação de atividades de modelagem em sala de aula, criando um espaço único, diferenciado e democrático de aprendizagem, já que, conforme Almeida e Dias (2004, p. 26) ao passo que o aluno "vai realizando as atividades nos 'diferentes *momentos'* [...], a sua compreensão acerca do processo de modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando".

[3] O termo *momento(s)*, em itálico, faz menção aos estágios de familiarização com atividade de modelagem matemática, o temo momento(s), sem itálico, é utilizado em sua acepção de espaço de tempo, instante.

Mas o que demanda dos alunos uma atividade de modelagem? Novas atitudes, atitudes ativas. É necessário estar envolvido e comprometido com a atividade para que dela resulte geração de conhecimentos.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos as escolhas metodológicas adotadas para o desenvolvimento dessa investigação. Utilizamos esse espaço para descrever as circunstâncias em que ela se desenvolveu, assim como para apresentar o delineamento das atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas com alunos do Ensino Médio. As formas como os dados foram coletados e analisados também são elucidadas neste capítulo.

3.1. Sobre o enquadramento metodológico da pesquisa

A opção por investigar o que revelam os signos associados às fases matematização e resolução em uma atividade de modelagem matemática nos coloca diante de uma abordagem qualitativa tal como prevê Goldenberg (1999), pois consideramos a existência de uma relação dinâmica entre o contexto investigado e o pesquisador. Além disso, a abordagem qualitativa permite que compreendamos determinados fenômenos que estão relacionados ao objeto de estudo em suas especificidades.

Para Prodanov e Freitas (2013), a pesquisa qualitativa é importante por levar em consideração aspectos que não podem ser mensurados quantitativamente, ou seja, não podem ser expressos a partir de números. A partir da pesquisa qualitativa é possível relacionar, conectar aspectos que integram o mundo real a outros aspectos que fazem parte do mundo subjetivo dos sujeitos, sem fazer uso de técnicas estatísticas para mensuração dos dados coletados.

A pesquisa qualitativa tem como fonte primária de coleta de dados o espaço natural, o ambiente em que estão inseridos o pesquisador e o objeto de pesquisa. Isso faz com que o pesquisador mantenha contato direto com o meio e o objeto em estudo, tornando-o responsável pela realização da leitura dos dados coletados, bem como da sua interpretação e análise, conforme os significados que atribuiu e os aportes teóricos adotados (GOLDENBERG, 1999).

Goldenberg (1999), ressalta que a preocupação do pesquisador não deve estar centrada na representatividade numérica do que se estuda, mas na compreensão profunda e detalhada de um recorte social, de uma organização ou instituição, por exemplo. O pesquisador deve ter uma visão holística do processo e não priorizar apenas o produto final. A investigação é construída em um nível que não se pode quantificar por possuir como subterfúgio as crenças, valores, significados e outros construtos sociais gerados no ambiente que não podem ser simplificados a uma operacionalização de variáveis. Requer do pesquisador uma descrição detalhada de fatos ou situações, buscando a compreensão dos indivíduos em seus próprios termos, assim, os dados coletados são predominantemente descritivos e suas análises tem caráter interpretativo.

Em nossa investigação, a abordagem qualitativa se justifica pelo interesse em compreender o que revelam os signos associados às fases matematização e resolução em atividades de modelagem matemática.

3.2. O ambiente investigado

A pesquisa foi realizada com alunos regulares de um colégio particular do município de União da Vitória – PR, no qual o pesquisador atua como professor. As atividades foram desenvolvidas em duas turmas do 2.º ano do Ensino Médio, no período matutino, durante os meses de março e abril de 2018. Denominamos as turmas de 2A e 2B, que tem como contingente 19 e 20 alunos, respectivamente. A turma 2A possui 10 meninas e 9 meninos, enquanto que a 2B tem 8 meninas e 12 meninos. A maioria dos alunos matriculados reside no município de União da Vitória – PR e Porto União – SC, municípios limítrofes chamados de Cidades Irmãs, mas encontramos representantes dos municípios circunvizinhos como General Carneiro - PR, Paula Freitas - PR, Paulo Frontin – PR e Porto Vitória - PR.

A coleta de dados, ou seja, o desenvolvimento das atividades se deu no transcorrer do primeiro bimestre letivo, mais especificamente entre os dias 14 de março e 20 de abril. As turmas em que as atividades de modelagem foram desenvolvidas têm semanalmente três aulas de Matemática.

As atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em três semanas consecutivas de aulas, e no transcorrer dessas semanas existiram feriados e eventos externos ao contexto da disciplina que foram realizados pelo Colégio. Além dos encontros em horário normal de aula, foi realizado um encontro posterior a essas semanas no período vespertino, ou seja, no contraturno, para a conclusão dos encaminhamentos dados às atividades feitas em sala de aula. Esse encontro correspondeu ao equivalente a duas horas aula.

Para o desenvolvimento das atividades os alunos foram organizados em grupos de três a quatro integrantes, e a composição desses grupos se deu por livre escolha dos alunos. Na 2A foram compostos cinco grupos, dos quais quatro deles tinha quatro integrantes e um, três integrantes. Na 2B foram formados cinco grupos, todos com quatro integrantes cada.

Os grupos são denominados e identificados por três caracteres em sequência, o primeiro a letra “G”, o segundo é ocupado por um dos numerais “1”, “2”, “3”, “4” ou “5” que se referem a indicação do número de controle do grupo e, por fim seguido de uma letra “A” ou “B” para indicar a qual turma pertence aquele grupo, ou seja, G1A se alude ao Grupo 1 da turma 2A, G2B para o grupo dois da turma 2B e assim sucessivamente.

3.2.1. As atividades desenvolvidas e nossas escolhas

Na seção 2.3 já apresentamos os recortes teóricos que versam sobre a familiarização dos alunos e professores com atividades de modelagem matemática, e uma vez que assumimos esses recortes optamos por desenvolver nossas atividades no momento dois de familiarização, ou seja, levamos aos alunos uma temática e buscamos encorajá-los a elaborarem questões a serem investigadas.

A escolha pelo *momento dois* se deve a alguns aspectos intrínsecos ao ambiente em que ocorreu a pesquisa, quer sejam referentes à instituição, aos alunos ou ao professor/pesquisador. Os aspectos que se referem à instituição de ensino estão atrelados às diretivas e normas internas específicas do colégio; à proposta de trabalho que é informada aos alunos e pais; bem como a quantidade de aulas disponibilizadas para a realização das atividades. As particularidades referentes aos alunos dizem respeito ao fato de que os alunos não estão habituados a desenvolver atividades que se assemelham a quaisquer dos momentos de familiarização, aporte teórico adotado nessa investigação. E sob o ponto de vista do pesquisador, a escolha se deu por considerar importante conhecer pelo menos uma possível resolução ou abordagem acerca de uma atividade de modelagem matemática, como forma de sentir-se mais seguro para orientar os alunos ao longo da atividade.

Para iniciarmos, entregamos aos respectivos grupos de alunos, de 2A e 2B, textos com temáticas distintas. Para a primeira turma o texto versava sobre os movimentos periódicos das marés, e para a segunda, o texto fazia menção ao crescimento do uso de cercas elétricas no Brasil.

Na mesma folha entregue, havia espaços para os integrantes dos grupos anotarem os primeiros encaminhamentos adotados. Logo abaixo do texto constava a seguinte solicitação: “A partir do texto e da temática nele contida, discuta com seus colegas e elaborem um problema que vocês gostariam de estudar”, havia espaço destinado à redação do(s) problema(s) elencado(s) pelo grupo para discussão e definição. Além disso, solicitava que o grupo enunciasse as possíveis metas para que fosse resolvido tal problema. Esperávamos que os membros dos grupos elaborassem uma questão a ser investigada, ou seja, elaborassem uma pergunta que propiciasse o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Em outras palavras, ambicionávamos que estruturassem um problema de investigação.

Mesmo que esses textos já tenham sido desenvolvidos e resolvidos por outros alunos, conforme consta em Almeida, Silva e Vertuan (2012), essa informação foi omitida aos membros dos grupos, uma vez que nossa intenção era utilizar esses textos segundo orientações do *momento dois*. Por conseguinte, reconhecemos, assim como Veronez (2013), que da mesma forma como o tema pode ser escolhido pelos alunos, pelo professor ou por um acordo entre eles, o problema a ser estudado também pode sofrer essas variações. No nosso caso, o processo de definição do problema a ser investigado foi definido livremente por cada grupo, a partir dos desejos desencadeados pela leitura do texto e, em alguns casos, conjuntamente após intervenções realizadas pelo professor. Contudo, tais intervenções se deram no sentido de orientar possibilidades de caminhos aos alunos ao longo de toda a atividade.

Na Tabela 01 apresentamos as questões escolhidas pelos grupos; as datas das aulas em que ocorreu a pesquisa, bem como a quantidade de aulas e o turno; a informação de que os alunos cumpriram, ou não, os prazos estipulados para as fases da atividade de modelagem e; a informação da presença, ou ausência, da totalidade dos alunos de cada grupo na aula do dia vinte de abril (20/04), dia em que os grupos fariam a socialização do desenvolvimento de suas atividades de modelagem matemática. Cabe destacar que como essa socialização aconteceu no período vespertino, não havia obrigatoriedade da presença dos alunos (regra da escola para atividades desenvolvidas em período contraturno). Também convém salientar que embora a teoria adotada não preveja a determinação de "metas a serem cumpridas", os prazos que estipulamos serviam como base para nos orientar em relação ao tempo disponibilizado para a presente investigação e como forma de fixar compromissos para os alunos em relação ao desenvolvimento das atividades. Sendo assim, nossa organização era a seguinte: aproximadamente três aulas para a definição do problema e coleta de informações (pesquisa), três aulas para matematização e resolução e outras três aulas para a validação, interpretação de resultados.

Tabela 01. Desenvolvimento e cronograma das atividades.

Grupos	Problema/pergunta inicial escolhido	Datas aulas	Número de aulas – período	Prazos	Presença na aula (20/04)
G1A	“Qual é o máximo que a maré pode subir em 5 dias na praia de Florianópolis?	15/03	1 – Matutino	sim	Não
		16/03	2 – Matutino	Não	
		23/03	2 – Matutino	Não	
		05/04	1 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G2A	“[...] quantas vezes as marés subiriam e desceriam se o planeta estivesse a uma distância de 500.000 km da lua? E a gravidade mudaria?	15/03	1 – Matutino	Sim	Não
		16/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/04	1 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G3A	“Queremos saber o horário que a maré desce, além de saber se acontece alguma diferença para o lado oposto da Terra.”	15/03	1 – Matutino	Sim	Sim
		16/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/04	1 – Matutino	Sim	
		20/04	3 – Vespertino	Sim	
G4A	“à pressão do mar sobre as pessoas. [...] encontrar o ponto certo que uma pessoa pode chegar”	15/03	1 – Matutino	Sim	Não
		16/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Não	
		05/04	1 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G5A	construir uma maquete para explicar e compreender os fenômenos de influência do Sol e da Lua sobre a Terra.	15/03	1 – Matutino	Sim	Não
		16/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Não	
		05/04	1 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G1B	“por que os carros populares têm maior chance de serem roubados?” ou “qual será a taxa de carros roubados no futuro?	14/03	1 – Matutino	Sim	Sim
		15/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/03	2 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G2B	“vale a pena investir no uso de cercas elétricas para a segurança residencial? Com o aumento da criminalidade no Brasil, a segurança pública é adequada?”	14/03	1 – Matutino	Sim	Sim
		15/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/03	2 – Matutino	Sim	
		20/04	3 – Vespertino	Sim	
G3B	“[...] uma empresa instalará uma cerca elétrica no estacionamento que mede 100x140m, ele quer instalar câmera a cada 40m. Quanto ele vai utilizar de cerca elétrica e câmeras? [...]quanto ele gastará ao todo?”	14/03	1 – Matutino	Sim	Não
		15/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/03	2 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G4B	“Qual seria uma forma prática de proteção da sua propriedade? Como podemos diminuir os riscos de um roubo de uma maneira mais eficaz e barata?”	14/03	1 – Matutino	Sim	Sim
		15/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/03	2 – Matutino	Não	
		20/04	3 – Vespertino	Não	
G5B	“quanto mais ou menos uma pessoa gasta para instalar cerca elétrica em um condomínio levando em consideração que todos os terremos tem o mesmo tamanho?”.	14/03	1 – Matutino	Sim	Sim
		15/03	2 – Matutino	Sim	
		23/03	2 – Matutino	Sim	
		05/03	2 – Matutino	Não	
		20/04	3– Vespertino	Não	

Fonte: os autores, 2018.

Como nem todos os grupos estavam completos no dia que aconteceu a finalização de suas atividades de modelagem, escolhemos trazer para discussão e análise, dentre os que estavam completos, as atividades desenvolvidas pelos grupos G3A e G2B. O grupo G3A era composto por três alunas e um aluno e o grupo G2B era formado por quatro meninas. A escolha por esses grupos se deu porque seus integrantes demonstraram maior participação e envolvimento com a atividade proposta; foram os grupos que tiveram em seu seio maior interação social e comprometimento em pesquisas complementares para a realização da atividade. Além disso, como foi apresentado na Tabela 01, foram os grupos que de certo modo cumpriram todas as metas estabelecidas em comum acordo com o professor, quando do início da atividade, o que de certa forma evidencia os seus papéis ativos quanto ao desenvolvimento da atividade.

O G3A ao buscar responder seu questionamento: "Queremos saber o horário que a maré desce, além de saber se acontece alguma diferença para o lado oposto da Terra", necessitou recorrer a diferentes conhecimentos, matemáticos e extramatemáticos, durante o desenvolvimento da atividade. Além de mobilizar conhecimentos matemáticos e extramatemáticos já conhecidos, o desenvolvimento da atividade requereu a busca de novos conhecimentos, exigindo que os membros do grupo pesquisassem e buscassem formas de se apropriar dos novos conceitos e conteúdos necessários à compreensão e resposta do problema que escolheram.

Notamos que inicialmente os membros do grupo G3A estavam exitosos em definir um problema, decorridos alguns diálogos entre os membros o consenso imperou. Imbuídos em coletar informações que permitisse conjecturar possibilidades aos seus questionamentos, os membros do grupo dirigem-se à biblioteca para buscar informações e dados sobre o que seria "o outro lado da Terra", mobilizando conceitos relacionados à disciplina de Geografia. Nesse momento o grupo anseia por compreender ou relembrar o que significavam os meridianos.

Discussões entre os membros do grupo e as tentativas frustradas de encontrar as informações pertinentes à praia que estaria localizada no mesmo meridiano que a praia brasileira acabaram por inibir momentaneamente o desenvolvimento da atividade. Contudo, intervenções realizadas pelo professor no sentido de mediar as discussões dos alunos, conduziu com que eles realizassem uma simplificação em relação ao seu problema inicial. Tais intervenções ficaram no âmbito de delimitação do contexto que subsidiaria a pesquisa deles, já que não conseguiam os dados que buscavam. Sendo assim, houve, por parte do professor, a sugestão de que eles analisassem os movimentos das marés da praia de Balneário Camboriú – SC - Brasil, já que tinham informações sobre ela.

O G2B ao tentar refletir acerca de seus questionamentos: “vale a pena investir no uso de cercas elétricas para a segurança residencial? Com o aumento da criminalidade no Brasil, a segurança pública é adequada?”, precisou lançar mão de distintos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos.

Percebemos que os integrantes do G2B tiveram dúvidas em relação à formulação inicial do problema. Intervenções do professor e diálogos entre os membros do grupo definiram a questão de investigação. Assim como ocorreu com o G3A, o seu problema inicial sofreu pequenas alterações no transcorrer da atividade em decorrência de simplificações de informações coletadas e ausência de outros dados. Como fruto da coleta de dados inicial, os membros do grupo identificaram a existência de três tipos de cercas destinadas para a proteção de propriedades, e então, decidiram por comparar o custo de instalação entre as três. É importante enfatizar que o grupo manteve como pano de fundo da investigação o seu questionamento inicial. O desenvolvimento da atividade ocorreu marcado por debates entre os membros do grupo, que encaminharam as ações requeridas nas fases da Modelagem Matemática, aliado às intervenções do professor.

Trazemos na seção a seguir o detalhamento de como procedemos à coleta dos dados e os encaminhamentos que adotamos para sua análise.

3.3. Aspectos relacionados ao recolhimento e ao tratamento dos dados

O recolhimento de dados foi realizado por meio de gravação em áudio das aulas em que as atividades foram desenvolvidas, e, posteriormente, tais gravações foram transcritas e analisadas. Além das transcrições, compuseram os materiais de análise os registros físicos realizados pelos alunos: anotações, relatórios e fichas entregues. Compõe também o *corpus* da pesquisa as anotações realizadas pelo professor, naquele momento *o pesquisador*.

Cada grupo possuía um gravador sobre sua mesa para permanentemente registrar seus diálogos durante a realização da atividade. A existência desse instrumento de coleta de dados fez com que os alunos, no início, se portassem de modo tímido e inibido, no entanto, com o passar do tempo voltaram a adotar o mesmo comportamento de quando ele ali não estava.

Os dados ora recolhidos subsidiaram a identificação dos signos gerados pelos alunos ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática, bem como a compreensão do que eles revelam frente a tal desenvolvimento e sobre os conhecimentos matemáticos e extramatemáticos dos alunos. Sendo os diálogos transcritos e os materiais produzidos pelos alunos documentos vitais para a identificação e análise dos signos gerados por eles, recolhemos dos alunos materiais como as folhas entregues acerca da atividade e folhas adicionais oriundas de suas pesquisas e discussões promovidas ou estabelecidas extra sala, já que os diálogos correspondiam às gravações realizadas. Esses materiais recolhidos dos alunos foram digitalizados e se tornaram objetos de análise juntamente com as transcrições.

É importante esclarecer que os registros só advieram após a ciência e autorização de pais ou responsáveis dos alunos, bem como eles próprios aporem suas assinaturas em Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO 1) e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (ANEXO 2), respectivamente, pois a faixa etária dos alunos envolvidos na pesquisa está situada entre 13 e 17 anos. Em complemento à documentação consta a Carta de autorização assinada pelo diretor do colégio (ANEXO 3) e do reitor da instituição mantenedora do colégio (ANEXO 4).

Coletados os dados, direcionamos nosso labor ao seu tratamento e, para isso, empregamos a análise de conteúdo de Lawrence Bardin (1977), a qual consiste basicamente em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados.

Na primeira fase, pré-análise, procedemos à leitura das atividades desenvolvidas pelos grupos, seus relatórios e folhas anexas. Também transcrevemos os áudios gravados durante as aulas em que se deram tais desenvolvimentos. A partir disso, selecionamos os materiais para organização dos dados de modo a favorecer a análise posterior. Na segunda fase, *exploração do material*, buscamos identificar os signos que foram gerados associados à fase da matematização e resolução quando do envolvimento dos grupos no desenvolvimento de suas atividades.

Com o intuito de mantermos preservado o anonimato dos alunos, membros dos grupos, conforme previsto em TCLE, para nos referirmos a um(a) aluno(a) em particular adotamos uma combinação de seis caracteres sequenciais e com significados específicos. Por exemplo, quando nos referirmos ao aluno de número 1, do grupo 1, da turma 2A, utilizamos AL1G1A. Mantivemos o mesmo padrão aos demais integrantes dos outros grupos. Quando necessária a apresentação das falas do professor, indicamos por Prof.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE: IDENTIFICANDO OS SIGNOS ASSOCIADOS ÀS FASES MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO

Nesta seção direcionamos nossos esforços e olhares para os dados coletados que subsidiam a análise desta investigação. Trazemos, portanto, nossas considerações acerca de duas atividades de modelagem desenvolvidas por alunos do Ensino Médio, que tinham por temas: o movimento das marés (G3A) e cercas elétricas (G2B). Ao procedermos às análises objetivamos identificar os signos associados às fases matematização e resolução e discutir acerca de suas possíveis influências no desenvolvimento de tais atividades.

Com o objetivo de tornar fluida a apresentação das atividades e sua análise, as fazemos seguindo a cronologia em que os eventos ocorreram.

Salientamos que ao procedermos à análise dos signos, em nosso texto, mencionamos os tipos de signos: falados (aparecem transcritos), pictográficos (imagens, tabelas, quadros, etc.) ou gestuais. Essa distinção foi realizada para melhor clareza da escrita, não se referindo a nenhuma espécie de classificação teórica existente, pois dado nosso recorte teórico um signo sempre será um signo, não importando a maneira como é manifestado.

4.1. Movimento das marés: atividade G3A

O tema movimento das marés foi proposto pelo professor por intermédio da entrega, aos integrantes desse grupo, de um texto encontrado em ALMEIDA; SILVA; VERTUAN (2013, p. 54). A opção pela entrega do texto está amparada na escolha do *momento dois* para a realização desta investigação, assim como o número de aulas que tenho disponibilizadas para a intervenção do estudo em sala, as normas internas do colégio, e o fato de o pesquisador se sentir mais seguro para o desenvolvimento da atividade tendo conhecimento de uma possível "resolução".

Após o primeiro contato com o texto e ouvidas as orientações do professor os alunos AL1G3A, AL2G3A, AL3G3A e AL4G3A, que compõem o grupo G3A, iniciam a leitura do texto. Mesmo antes da conclusão da atividade, alguns manifestam interesses e preocupações enquanto outros demonstram empolgação em possíveis questões ou ações para os encaminhamentos da atividade. Essas reações são evidenciadas na seguinte transcrição:

AL2G3A: A gente podia fazer uma conta pra gente ver quanto a maré vai fica né?
AL1G3A: Da hora né! [sic]

AL2G3A: Tipo se tivesse como fazer uma conta pra ver quanto que a maré ia subir e quanto que a maré ia baixar em determinado momento
AL1G3A: Você coloca ali na conta assim oh!
AL1G3A: Coloca ali na conta éhh, número a quantidade de hora que a maré vai subir e a hora que a maré, daí... [sic]
AL4G3A: Você está falando de física!
AL1G3A: Como que é a questão?

Nesse diálogo, os alunos, durante a leitura do texto, já esboçam possíveis abordagens para o tema, mesmo que ainda sem uma questão a ser investigada. As falas, "(...) fazer uma conta", ou ainda "você coloca ali na conta (...)", ilustra que quando se trata de atividades na disciplina de matemática, o primeiro pensamento que lhes vem à mente é a ação de calcular.

A discussão sobre o que pesquisar, qual conta fazer, sinaliza certa dificuldade apresentada pelos alunos em elaborar questões. A hesitação em definir uma questão de investigação permanece até o momento em que o professor promove uma intervenção com questionamentos direcionados aos alunos com relação ao texto lido: qual o significado do texto? Qual era o foco ou tema do texto? Qual o interesse que o texto despertava? Estes, realizados pelo professor foram imprescindíveis aos encaminhamentos que se seguiram, ou seja, para a definição, por parte dos alunos, do problema a ser investigado: "*queremos descobrir o horário que a maré sobe e o horário que a maré desce, além de saber se acontece alguma diferença para o lado oposto da Terra*".

Observamos que ao definir o problema os alunos tinham, de certa forma, clareza sobre o que queriam descobrir, no entanto, sem ainda refletir sobre como fazer isso. Novas perguntas foram realizadas pelo professor: Como então podemos fazer isso? Quais serão os passos que devemos percorrer para responder a essa questão? Como estratégia os alunos estabeleceram que deveriam "pesquisar na internet os níveis da maré de manhã, tarde e noite" e "pesquisar mais sobre a influência da Lua e do Sol (...)". Definidas essas estratégias iniciais, os alunos realizaram pesquisas via internet e coletaram informações sobre o fenômeno das marés, retomaram então a questão a ser investigada e perceberam por intermédio de nova intervenção do professor, que existia necessidade de melhorá-la. Esse fato é apresentado no diálogo a seguir.

Prof.: Queremos descobrir o horário que a maré sobe e o horário que a maré desce, além de saber se acontece alguma diferença para o lado oposto da terra. Beleza, então vamos pensar [...][sic!]
AL2G3A: Sim, mas é que a gente vai descobrir o horário professor, tipo se aqui no Brasil ela sobe oito horas lá no Japão ela vai subir que horas, entendeu?
Prof.: Beleza, então você tem que, primeira pergunta para vocês, ela sobe em toda costa Brasileira ao mesmo tempo? [sic!]
AL1G3A: Não.
AL2G3A: Por isso que a gente vai pegar uma praia específica

Prof.: Uma praia específica do Brasil?
AL2G3A: Huhum! [sic]
Prof.: Já escolheram qual é essa praia?
AL2G3A: Itapema
Prof.: Itapema e qual?
AL3G3A: Balneário Camboriú
Prof.: Itapema ou Balneário Camboriú?
AL2G3A: Itapema, eu acho mais fácil
Prof.: É com vocês!
AL3G3A: Ah enfim!
AL2G3A: Tá pode ser Balneário Camboriú.
Professor: Tá beleza, e qual é a praia oposta a ela?[sic!]
AL2G3A: A agora tem que ser uma praia do Japão
Prof.: Mas necessariamente o Japão seria o oposto do Brasil?
AL1G3A: Não

Identificamos nesse diálogo que os alunos sentiram necessidade de ajustar seu questionamento, ou seja, precisaram escolher, eleger uma praia específica no Brasil, pois a maré não se comporta da mesma forma em todo o litoral brasileiro. Assim, elegeram a praia de Balneário Camboriú, em Santa Catarina, SC. Este diálogo ainda demandou a mobilização de conhecimentos extramatemáticos no momento que discutiram sobre o que seria o outro lado do mundo, quando o professor questiona "mas necessariamente o Japão seria o oposto do Brasil?" e que o aluno responde "não". Estas discussões foram fomentadas quando os alunos buscaram na biblioteca um globo terrestre e de posse dele, interagindo com o professor, apontam para uma "linha do globo", conforme diálogo:

Professor: Vamos por partes aí, por que vocês seguiram nessa linha?
AL2G3A: Porque é o oposto.
Professor: Como eu chamo essa linha aqui? (professor aponta para um meridiano)
AL4G3A: Não sei.
Professor: Como eu chamo essa linha aqui de dentro?
AL3G3A: É linha
Professor: Não, só para nós entendermos na gravação o que estamos falando. Nós estamos olhando para o globo e vocês acharam o Brasil, pegaram uma linha do Brasil aqui, linha vertical e seguiram até o outro lado do globo, como chama essa linha vertical? Como eu chamo essa linha vertical? Não tem nome aqui? Não está escrito aqui? Tem certeza?
AL3G3A: Não está.
Professor: E aí vocês não podem pesquisar isso para clarear a informação de vocês?
AL1G3A: Aqui ela tem, aqui ó! [sic]
AL4G3A: Trópico de câncer é assim
Professor: Aonde está o trópico de câncer?
AL1G3A: Aqui ó professor.
Professor: Oi?
AL1G3A: Não é esse nome aqui?
Professor: Como eu chamo as linhas verticais do globo quando é planificado?
AL2G3A: Ai meu Deus, eu não consigo lembrar.
AL3G3A: Ártico? Não ártico não!
AL4G3A: Calma deve ter em algum lugar escrito.
AL2G3A: Linha internacional de mudança de dado?
Professor: Não.
AL2G3A: Você sabe o nome?
Professor: Sei.

AL2G3A: Então fala para nós?
Professor: Não vou falar.
AL4G3A: Meridiano.
AL2G3A: Meridiano.
Professor: É meridiano ou, não é?
AL2G3A: É.
AL4G3A: É.

Neste diálogo há evidências de que a natureza da atividade de modelagem permitiu a mobilização de conceitos não pertencentes à matemática. Como exemplo, os alunos necessitaram mobilizar conhecimentos referentes aos meridianos que são trabalhados na disciplina de Geografia, mostrando que a interdisciplinaridade é algo recorrente quando os alunos pretendem compreender uma situação não matemática ou responder a um problema no contexto de uma atividade de modelagem matemática. Assim, de posse do globo, e com a compreensão de que para encontrar uma praia oposta à Balneário Camboriú, em SC deveriam seguir o meridiano correto, escolheram a praia de *Yumigahama* que pertence ao Japão.

Com a definição das praias em questão, os alunos realizaram novas pesquisas referentes às marés nas praias eleitas para o estudo. Realizaram buscas em diversos sites e lograram êxito em encontrar uma tabela de marés da praia de Balneário Camboriú, em SC, que continha os dados referentes a seis dias do mês de março. No entanto, a mesma facilidade não ocorreu para a praia do outro lado do mundo. De posse das informações da praia brasileira, os alunos questionaram sobre quais procedimentos matemáticos deveriam ser adotados com aqueles dados, como "*se necessitariam realizar a média dos valores ou soma*". Esse fato segue ilustrado no seguinte diálogo:

AL4G3A: Professor vem aqui daí. [sic]
AL2G3A: Professor a gente tem que fazer uma média desses valores?
[...]
AL2G3A: Somar tudo isso?
AL3G3A: Soma e daí divide por 6 [...]

Identificamos neste diálogo que os alunos começam a conjecturar e discutir sobre a transformação dos dados brutos encontrados sobre a praia de Balneário Camboriú, em SC, em informações passíveis de manipulação e explicação do fenômeno maré. Embora a escolha das alturas e as horas como variáveis do fenômeno já possa caracterizar uma *matematização*, acreditamos que esta escolha se deu de forma intuitiva. Assim, em nossa análise, o instante em que os alunos começam a manipular e simplificar as tábuas de marés sinaliza o desenvolvimento da fase *Matematização*.

Com as tabelas em mãos, os alunos efetuam análises quanto aos dados ali contidos, e decidem por marcar com cores distintas determinados intervalos de horas, conforme apresentados na Figura 4, que é identificada por nós como um signo pictográfico que desencadeia novas discussões entre os membros do grupo sobre o processo de simplificação dessas informações.

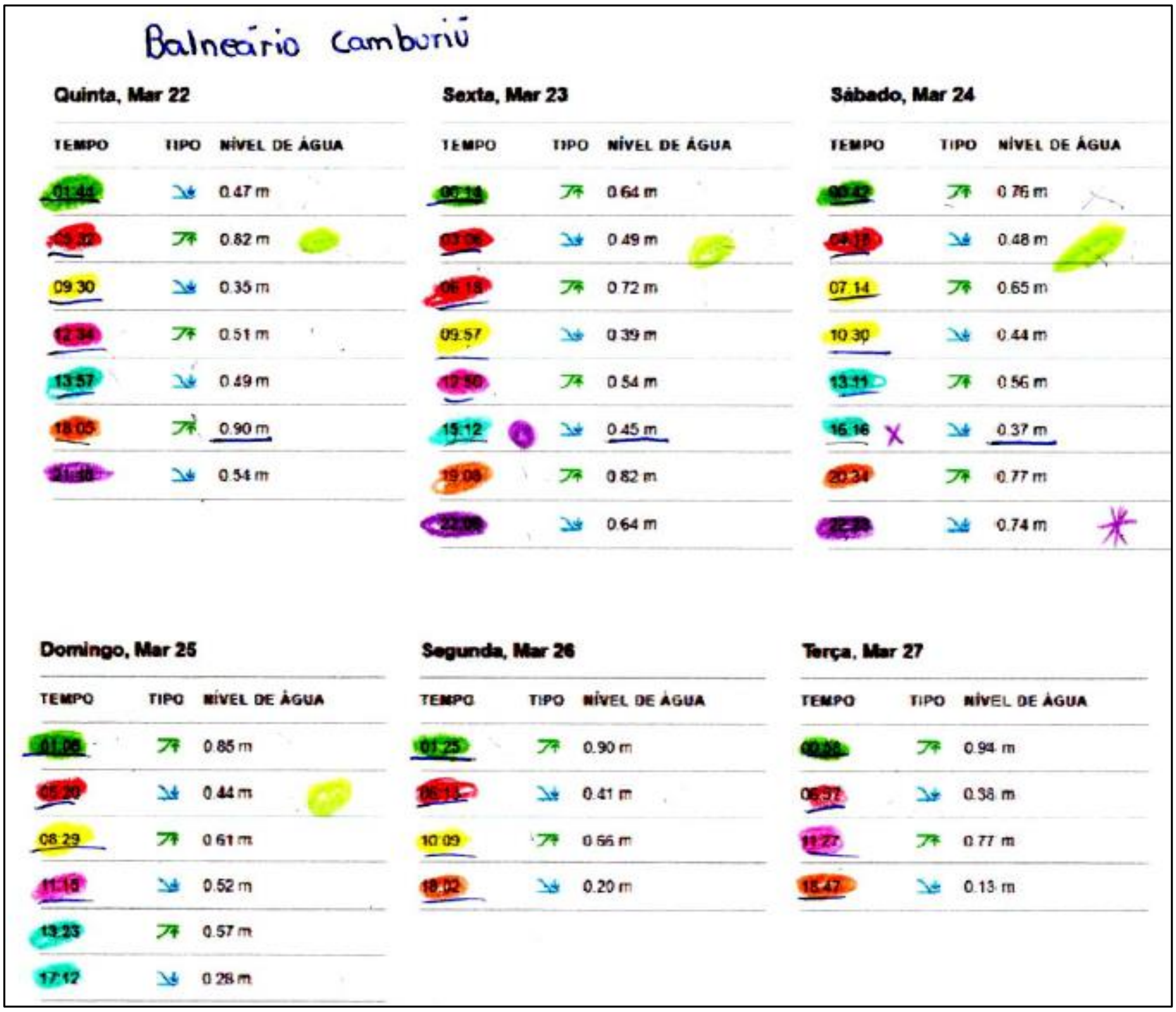

Figura 04. Signo pictográfico 1.
Fonte: os autores, 2018.

Admitimos que a ação dos alunos de demarcar a tabela original com cores distintas para intervalos de tempo, representam uma primeira forma de organização desses dados (para o grupo); cada cor figura como um intervalo de tempo para que pudessem, de certo modo, agrupá-los. Isso evidencia o que Peirce denomina de interpretante dinâmico, pois o signo original (tabela com os dados dispostos sem as marcações) é transformado quando o(s) intérprete(s), os alunos, o modificam e geram novo signo (Figura 4), agora organizado em intervalos.

Este novo signo desperta nos alunos o interesse em compreender o fenômeno estudado, desencadeando toda uma série de reflexões, dúvidas e ações, que tem origem com o signo falado: “professor a gente tem que fazer uma média desses valores? ”, manifestado por AL2G3A, remetendo-se ao conceito de média, ou seja, uma simplificação de todas aquelas informações constantes na Figura 4, com o intuito de compreender o fenômeno das marés, tal como é externalizado pela fala do aluno AL3G3A “*horas que sobe, horas que desce*”, figura como um novo signo que se remete ao fenômeno em estudo.

Com a intervenção realizada pelo professor, nesse momento da atividade, os alunos produziram o diálogo a seguir, no qual aparece como os alunos encaminharam o processo de simplificação dos dados, mobilizando conceitos matemáticos. Tal diálogo transcorre com o professor e alunos, conforme observado na Figura 4.

Professor: Então veja bem: a 1:44 tinha 0,47 m.
Professor: As 5:32.
AL2G3A: 0,82 m.
Professor: As 9:30.
AL2G3A: 0,35 m.
Professor: As 12:35.
AL2G3A: 0,51 m.
Professor: As 13:57.
AL2G3A: 0, 49 m.
Professor: As 18:05.
AL2G3A: 0,90 m.
Professor: 0,54 né! [sic]
AL2G3A: huhum! [sic[
Professor: Vocês percebem que ela chegou até uma altura máxima e depois em um valor mínimo?
AL2G3A: sim.
Professor: E aí se você olhar para o outro dia aqui ó, não foi parecido de novo? [sic]
AL2G3A: Foi.
Professor: Então olhando a tabela consegue te dar a perfeita noção do que está acontecendo ou não? Ou vocês só veem informações soltas?
AL3G3A: Mais ou menos, porque os horários não são bem iguais.

Constatamos nesse diálogo que o professor, em sua intervenção, intenta chamar a atenção dos alunos para os dados que são apresentados na Figura 4, favorecendo que percebam certo padrão. O aluno AL3G3A percebe o padrão, mas ressalva que os horários não são bem iguais.

Os alunos discutem sobre a forma de proceder à simplificação daqueles dados e, depois de intensos diálogos para a resolução deste impasse, optam por construir uma tabela, que deveria conter as médias dos valores agrupados por cores e relacioná-los aos respectivos intervalos de tempo. Essa tabela é um novo signo pictográfico que tal como o signo primeiro (tabela original) se comportou como um interpretante dinâmico.

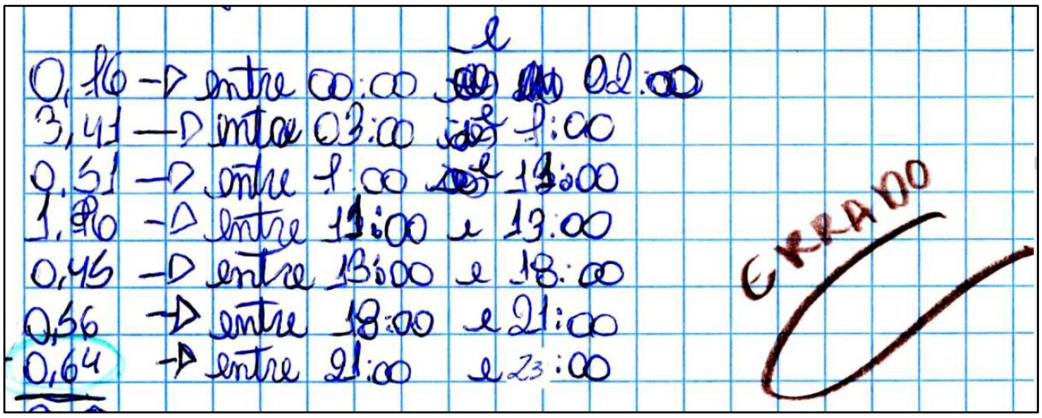

Figura 05. Signo Pictográfico 2;
Fonte: os autores, 2018.

Uma análise sobre esse signo pictográfico 02 (Figura 05) nos leva a inferir que, ao criar essa nova representação, os alunos estão muito mais preocupados com os cálculos das médias e acabam por deixar de lado as regularidades do movimento cíclico ou repetitivo das marés.

Percebemos que o intervalo inicial não é o mesmo do intervalo final, logo, não fechou as 24 horas do dia para que pudesse se repetir os acontecimentos. Neste momento inferimos que os alunos demonstraram certa dúvida ou incompreensão do que realizaram, ou seja, a tabela que criaram ainda não apresentava sentido. Os alunos demandam nova intervenção do professor dizendo que já tinham feito tudo, ao que o professor interpela, junto ao grupo de alunos, certos questionamentos conforme é reproduzido no diálogo a seguir:

Professor: Fez tudo o que primeiro, para eu entender?
AL2G3A: Espera aí, primeiro eu fiz tudo por linha né! Só que eu não tinha me tocado que tinha os horários e daí eu me toquei que tinha os horários, não faz mal que eu risquei né? [sic]
Professor: Não, não faz mal e daí? [sic]
AL2G3A: ó a gente fez, dá oh, 0,71 da meia noite as 2 da manhã, que fica essa média e 3,41 é das 3 às 7 da manhã [sic]
Professor: Hum.
AL2G3A: E 0,51 é das 7 da manhã as 11 da manhã e 1:7 aqui é um setenta AL1G3A?
AL1G3A: 76
AL2G3A: 1,76 é entre as 11 e uma da tarde, 0,45 é entre uma e seis da tarde
Professor: Aí fechou 24 horas?
AL2G3A: Daí a gente somar tudo que vai dar 24 horas?
Professor: Não, na verdade assim ó, se você está pensando no que acontece durante o dia, você tem que ele vai faz alguma coisa e retorna durante o dia né, então de certa forma você tem que começar aqui e chegar até uma outra hora, você parou na 21, você tem que ir pelo menos até a meia noite não tem?
AL2G3A: Sim só que a gente, não terminou ainda!

Uma intervenção do professor em forma de sugestão “*(...) então faz isso, tendo isso vocês têm que plotar isso no gráfico, para gente ver e entender o funcionamento disso”* leva o aluno AL2G3A responder “*tá! Então depois de terminar de calcular essas médias (...)”*. Em decorrência dessa intervenção os alunos verificam, conferem as operações realizadas ao calcular as médias e refletir sobre os intervalos. Eles se questionam sobre a veracidade e validade das informações constantes no signo da Figura 05.

Nesse momento de discussão entre os alunos AL1G3A e AL2G3A identificamos signos falados ("*isso deu 80? Não é 0,8?*"), que remetem ao conceito de média e seu significado, pois durante a discussão do cálculo efetuado, o aluno AL2G3A questiona se o valor estava correto, já que em sua compreensão os números eram "pequenos" e a média não poderia ser um "número grande". Este fato aparece no diálogo a seguir:

AL2G3A: Isso deu 80? Não é 0,8?
[...]
AL1G3A: Pera aí, pode deixar que eu faço!
AL2G3A: Vai 0,76
AL1G3A: 0,76 +
AL2G3A: 3,41
AL1G3A: 3,41
AL2G3A: + 0,51
AL1G3A: + 0,51
AL2G3A: + 1,70
AL1G3A: Não é 76
AL2G3A: É 76?
AL1G3A: Deixa eu ver, 1,76
AL2G3A: + 0,45
AL1G3A: + 0,45
AL2G3A: + 0,56
AL1G3A: + 0,56
AL2G3A: + 0,64
AL1G3A: + zero ponto
AL2G3A: 64, quanto que deu?
AL1G3A: Pera aí, vamos fazer de novo, vai
AL2G3A: 0,76 + 3,41 + 0,51 + 1,76 tem o ponto né, isso 76 + 0,45 + 0,56 + 0,64
AL1G3A: 8,9
AL2G3A: Eu falei que era 8,9, não tem como dar 80 porque é tudo número pequeno.

Neste diálogo os alunos realizam operações para a conferência do cálculo de uma média aritmética, e o signo *"(...) não é 0,8?"* promoveu discussão e mobilização de um conceito matemático. No entanto, o que é mais revelador nesse diálogo é o fato do aluno AL2G3A questionar. Este fato nos leva a dizer, com convicção, de que a média não poderia ser 80, devido ao fato dos números serem "pequenos", mesmo que a média também não seja 0,8 como dito pelo aluno. Esta situação sugere que o aluno AL2G3A tem claro a compreensão do significado de média, ou seja, de que o valor da média não pode extrapolar o maior número do conjunto.

Conferidas as médias, os alunos direcionam seus olhares novamente à questão do ciclo do dia. Ao dialogarem sobre os intervalos de tempo da Figura 05 identificamos signos falados conforme o diálogo a seguir:

AL1G3A: Professor vem aqui!
Professor: Fechou?
AL2G3A: Só que ele não tem horário até meia noite, o horário máximo que ele tem é 10:23 só, então não é mais certo a gente colocar até 11 horas ou até 10:30?
[...]
AL2G3A: Só que daí ele não vai fechar meia noite! [sic]
Professor: Está tudo bem, mas você mais ou menos fecha o ciclo né, se a meia noite, quer ver ó: vamos pensar assim ó, aqui você tinha as 22 horas do dia 23 né? Ele estava a 0,6, quando passou para meia noite ele foi para quanto? [sic]
AL2G3A: Para o sábado!
Professor: Isso!
AL2G3A: Daí ele foi pra.
Professor: Da sexta quando passa para meia noite, de sexta feira vai para o sábado.
AL2G3A: Ele vai dar 0,76.
Professor: Então entre as 11 e as...
AL2G3A: Meia noite e quarenta e dois.
Professor: Meia noite e quarenta e dois, o que aconteceu com a maré?
AL2G3A: Ela subiu.
Professor: Entendeu?
AL2G3A: Então dá para colocar aqui até, até as 11?
Professor: Isso, e daí a questão é, se você quiser fazer a meia noite você faz uma escolha aqui, dá para você pegar talvez a ideia, talvez o, né? Porque se ele estava em 42 e depois ele estava em 76
AL2G3A: Ele subiu.
Professor: Ele estava subindo.
AL2G3A: Sim!
Professor: Você poderia pensar que ele está subindo proporcional
AL2G3A: É porque olha, das 3 às 7 ele foi pra 3,41
Professor: Entendeu?
AL2G3A: Entendi, empresta corretivo AL1G3A.

A partir desse diálogo ponderamos que não estava claro para os alunos a identificação do ciclo do dia, que ao chegar à meia noite do dia 23, por exemplo, iniciaria o dia 24. Para além do fato da continuidade do dia, outras indagações estavam presentes: "*mas e a maré? O que aconteceu com a maré entre 23 horas de um dia e 02 duas da manhã de outro?*".

A intervenção do professor de modo a esclarecer com a frase "*e daí a questão é, se você quiser fazer a meia noite você faz uma escolha aqui, dá para você pegar talvez a ideia, talvez o, né? Porque se ele estava em 42 e depois ele estava em 76*", permitiu ao aluno AL2G3A entender que poderia interpretar o fenômeno sem necessariamente ter todas as informações.

Compreendida a situação do ciclo do dia e como transpor a não existência de informações para alguns horários específicos, os alunos retornam seus esforços e atenções para uma nova simplificação das informações que continham.

Assim, decidem reorganizar os dados, na qual os intervalos de tempo estivessem dispostos de modo homogêneo e os organizam com a amplitude de três horas. Desta forma, recorrem a procedimentos semelhantes aos anteriores e criam uma nova tabela para representar os dados de que dispunham. Essa nova representação constitui um signo pictográfico dinâmico (Figura 06).

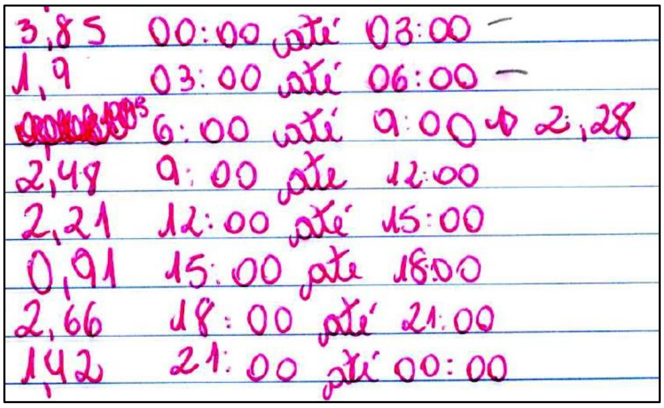

Figura 06. Signo pictográfico 3.
Fonte: os autores, 2018.

Uma análise deste signo pictográfico 3 que “está no lugar de” – fenômeno das marés – objeto de estudo do grupo, nos leva a inferir que ele é o resultado da geração de signos a partir de outros signos, e revelam o comportamento dinâmico dos interpretantes de alguns signos que são gerados na mente dos intérpretes. Segundo Peirce (2005), esse processo acontece sempre que o intérprete se sente inquietado quanto ao signo, ou seja, sempre que o intérprete deseja saber mais sobre. Em especial, a criação e transformações dos signos na atividade remetem ao fato dos alunos almejarem conhecer e explicar o fenômeno das marés.

Criada a organização dos dados que é apresentada na Figura 06, os alunos, por sugestão do professor (tinha por intenção que os alunos observassem a ciclicidade do fenômeno no plano cartesiano), intentam representar essas informações graficamente. Emerge nesse momento uma discussão sobre como alocar os dados da representação criada (Figura 06) em um sistema cartesiano ortogonal. Observemos o diálogo que ocorre entre o professor e os membros do grupo que relatam este fato:

AL2G3A: Professor eu coloco isso aqui em baixo ou aqui do ladinho do gráfico, tipo porque o gráfico é assim né? Eu coloco isso aqui, aqui ou aqui?
Professor: Depende...
AL1G3A: Não, esse aqui coloca aqui ó por causa que vai ter que pôr os valores aqui né professor?
AL2G3A: E daí aqui coloco o horário? [sic]
Professor: Os valores daqui não crescem? Os valores aqui não crescem também? [...]

Quando o aluno AL2G3A questiona *“professor eu coloco isso aqui em baixo ou aqui do ladinho do gráfico, tipo porque o gráfico é assim né? Eu coloco isso aqui, aqui ou aqui?”*, está indagando em qual dos eixos do sistema cartesiano deveria representar os dados referentes aos intervalos de tempo (horas) e das alturas (metros). Em resposta ao questionamento, o aluno AL1G3A acena com a caneta para que os valores relacionados a altura sejam alocados no eixo *y* (ordenadas), interpelado novamente pelo aluno AL2G3A se deveria então colocar as horas no eixo *x* (abscissas). A situação está reproduzida abaixo:

AL2G3A: Em qual horário você está falando?
Professor: Não, em qual eixo que está aqui ó? A altura não ia ser no eixo y?
AL2G3A: No y
Professor: Então aonde é que vai estar a sua altura?
AL2G3A: No y, humm agora eu entendi! [sic]
Professor: Entendeu?
AL2G3A: Haham, então vai, então o horário a gente vai ter que colocar aqui [sic]
AL1G3A: Dai
AL2G3A: Converte o gráfico
[...]
AL1G3A: Tá o que é isso aqui ó? AL2G3A o que é isso aqui ó?
AL2G3A: É o nível da maré
AL1G3A: Nível da maré, e esse daqui?
AL2G3A: É o horário né AL1G3A!
AL1G3A: Horário, nível da maré, 0,76 da meia noite e
AL1G3A: Não estou enxergando
AL1G3A: É onze horas e meia?
AL2G3A: AL1G3A foi você quem fez eu não sei
AL1G3A: Mas você apagou ali o que eu fiz
AL2G3A: Aé, é onze horas aqui.
AL1G3A: Eita! [sic!]

Nesse diálogo identificamos signos falados que remetem ao sistema cartesiano ortogonal e despertam nos alunos o interesse em compreender como deveriam alocar as informações de que dispunham (Figura 06) em uma representação gráfica.

Inferimos que a intencionalidade dos alunos com a criação do gráfico está em compreender o movimento das marés na praia de Balneário Camboriú, em SC, e percebemos novamente a transformação de um signo em outro com a finalidade de mostrar e conhecer mais sobre algo, em especial o fenômeno.

Imbuídos de compreender o problema os alunos produzem um novo signo, apresentado na Figura 07.

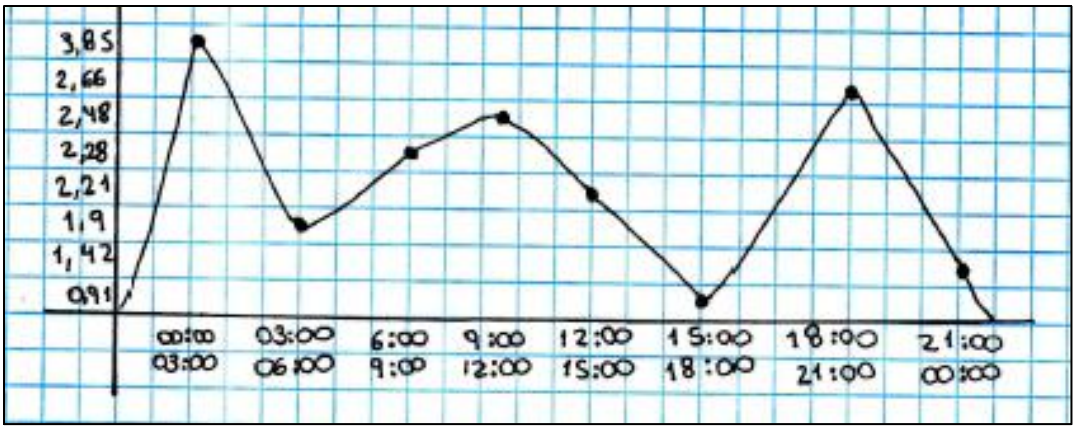

Figura 07. Signo pictográfico 4.
Fonte: os autores, 2018.

Mesmo com os diálogos ocorridos sobre o sistema cartesiano e a manifestação de que haviam entendido o que fizeram, a alocação das informações de que tinham em mãos, que gerou o signo pictográfico (Figura 07), nos revela que pairava sobre os membros do grupo dúvidas quanto à forma de reapresentar os dados da tabela no gráfico. Isso é notado quando analisamos o eixo x da Figura 07, em que os alunos alocam equivocadamente os intervalos em uma mesma posição, por exemplo (00h-3h) sobrepostos e depois (3h-6h).

A partir do trecho transcrito a seguir ocorrido no momento em que o grupo termina a construção do gráfico (Figura 07), inferimos que o signo falado "*bugô*" fomenta uma nova discussão entre os integrantes sobre o significado da representação que haviam construído, ou seja, os alunos se sentiram incomodados pelo signo que ali estava.

AL1G3A: Bugô! [sic]
AL2G3A: Você apagou por que?
AL1G3A: Nada
AL2G3A: Conseguiu?
AL1G3A: O Prof., vem aqui!
Professor: Diga.
AL1G3A: Primeiro eu quero montar o gráfico assim, só que eu tenho que saber as horas ali ó também
Professor: Hum! [sic]
AL2G3A: Só que as horas estão aqui
Professor: Você colocou essas horas aqui ó?
AL1G3A: Coloquei
Professor: E agora como você resolve esse problema de horas?
AL2G3A: Ele não sabe fazer um gráfico professor
AL1G3A: Eu não lembro

Notamos que no diálogo acima os alunos, de certa forma, se questionam por não terem a certeza da forma de elaborar o gráfico e ocorre o apagar e reescrever (não aparece na Figura 07), fato recorrente em sala de aula quando o professor questiona o aluno se está certo.

Realizadas novas discussões o grupo (G3A) decidiu por reconstruir o gráfico, mas agora distribuindo as horas no eixo *x* de outra forma.

A decisão dos integrantes do grupo de criar um novo gráfico, que se configura um novo signo pictográfico, trazido na forma da Figura 08, reflete para nós uma releitura dos dados da Figura 06, fomentados pelas discussões realizadas sobre a Figura 07.

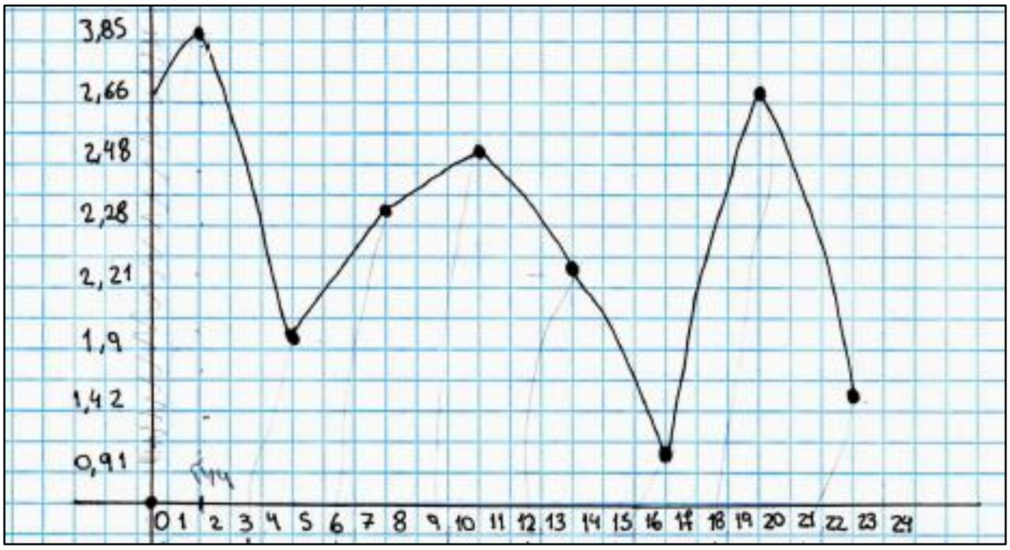

Figura 08. Signo pictográfico 5.
Fonte: os autores, 2018

A análise da Figura 08 revela que a dúvida quanto à distribuição, tal como ocorria na Figura 07, foi resolvida já que agora, nesta nova representação, distribuem as horas no eixo x, na representação usual da reta real. Outro aspecto que podemos inferir a partir do exame deste signo é o fato de que os alunos do G3A para completarem o gráfico e ligarem os pontos entre os intervalos (proceder à representação contínua) necessitaram atentar à primeira tabela, antes da simplificação para verificar se a linha que estavam traçando era representativa do comportamento do movimento das marés.

Mesmo que esse signo (Figura 08) possua uma representatividade do fenômeno e tenha sido construído pelos alunos do G3A, alguns integrantes do grupo ainda apresentavam dúvidas quanto ao seu entendimento. O diálogo que segue ilustra os aspectos relatados nesse parágrafo, ou seja, as dúvidas que ainda permeiam sobre o signo gerado.

Professor: Fez de novo? Legal, e o que parece isso?
AL2G3A: Eu ainda não entendi
Professor: O que você ainda não entendeu? Diga o que você não entendeu o que você perguntar a gente vai fazer
AL2G3A: Ó esse negócio professor, por que de hora em hora?

Professor: Não sei, eu assumo para hora uma altura, cada hora não tem uma altura? Pode ser talvez a mesma altura da anterior ou então próxima da anterior, mas você percebe que ele está fazendo um ciclo?
AL3G3A: Não é que tipo, da meia noite as três é a hora certinha, é a altura certinha, ela vai subir vai descer (sic!)
Professor: isso, entre meia noite e três da manhã, ficou todo esse tempo em 3,85? Esse valor que está aqui ó!
AL1G3A: Não
AL2G3A: Não
Professor: Entendeu porque que a gente fez essa aproximação?
AL3G3A: Ele subiu e desceu até chegar
AL1G3A: O professor.
Professor: Ele foi subindo e daí chegou, o que acontece, por uma questão de simplificação, vocês entenderam aqui no grupo, vocês fizeram a média dessa hora, ou seja, entre meia noite e três horas, uma e meia vocês colocaram a altura máxima 3,84, mas antes disso aqui o que ela estava fazendo aqui ó, entre meia noite e uma aqui ó, entre meia noite e uma da manhã, ela não estava fazendo isso?
AL2G3A: Haham!
Professor: Aí ela chegou lá e fez o que ó, o que vocês fizeram no gráfico aqui, ela começa a decair até chegar aonde? No ponto médio entre três e seis que vocês calcularam como sendo quatro horas ela chegou altura de um e...
AL2G3A: Noventa.
Professor: E aí ali pela tabela de vocês, vocês identificaram que ela voltou a subir
AL2G3A: Subir.
Professor: Entendeu? Então agora, esse comportamento aqui, tem que tentar descobrir a forma de calcular, porque aqui só seguindo a linha vocês não sabem dizer, vocês sabem a ideia do comportamento [...]
AL2G3A: Huhum.
Professor: Ó, percebe que ele está fazendo assim?
AL2G3A: Huhum.
Professor: Aqui vocês ligaram meio reto, mas poderia ser mais curva não poderia? E aí? O que acontece quando eu tenho uma função que faz assim ó, que função é essa? Você conhece alguma que representa isso? Agora é isso que vocês têm que investigar, agora a partir disso, dessa ideia, desse comportamento é achar uma função

Ao explicar o signo (Figura 8) aos integrantes do grupo o professor sugere encaminhamentos a serem tomados, pois questiona "*Você conhece alguma que representa isso? (...) achar uma função*". Acreditamos que até o momento da geração do signo pictográfico 5, o grupo ainda estava desenvolvendo a fase *matematização*. A partir da Figura 08, o grupo lança seus esforços em tentar encontrar uma função que represente o comportamento do gráfico elaborado, assim, entendemos que o grupo começa a desenvolver a fase *resolução*, pois para poderem predizer o fenômeno necessitam encontrar a função matemática que represente os dados representados em seu gráfico.

Durante a resolução os alunos tentam recordar o formato gráfico de outras funções já estudadas e recorrem a gestos para expressar suas lembranças enquanto dialogam com o professor e entre os membros do grupo. O movimento (gesto) realizado pelo aluno AL2G3A seguido da frase *"eu só lembro daquelas que é assim, ou assim"* é um signo que remete aos gráficos das funções polinomiais de grau um e dois.

AL2G3A: Eu só lembro daquelas que é assim, ou assim
Professor: Qual que é essa?
AL2G3A: Que tinha só uma linha

AL3G3A: Primeiro grau e segundo grau
AL2G3A: É!
Professor: Tá, essa duas não encaixam?
AL2G3A: Não!
Professor: Porque aqui ó, a primeira aqui era uma reta, era a equação do, era uma função do?
AL2G3A: Primeiro grau
[...]

O signo (gesto) nos revela que os alunos sabiam ou visualmente identificavam o comportamento de funções polinomiais de grau um e dois, e, para além de recordar, reconhecem que este não é o comportamento do fenômeno estudado.

AL1G3A: Não tem isso no livro?
Professor: Procure, é essa ideia você procurar no livro, aí ano passado a gente aprendeu ainda, que nem você falou, a boca para baixo e a boca para cima, pelo gesto que você me fez, que era o que? As funções do segundo grau, conhecidas como parábolas e depois a gente aprendeu ainda, a exponencial, que fazia o que? Subia bem forte, nenhuma delas
AL1G3A: Não é isso aqui ó?
Professor: Nenhuma delas se encaixou e agora? Qual que é essa aqui?
AL2G3A: É essa! (o aluno AL2G3A, apontava a um gráfico em seu livro didático que continha as funções seno e cosseno)
AL3G3A: Parabéns AL1G3A
Professor: Agora vocês vão estudar essa ali e ver se consegue talvez encaixar isso, talvez precisamos fazer mais ajustes, mas o comportamento disso que você achou no livro é parecido com o que você tem aqui?
AL2G3A: É
AL1G3A: É
Professor: Agora nós vamos aprender matemática a partir do problema que vocês elaboraram
AL1G3A: Viu como tem problema de matemática nesse trabalho!

Deste diálogo inferimos que o signo (Figura 08) desempenha um papel de estímulo aos integrantes do grupo, pois em decorrência de sua geração e da infrutífera tentativa de associar a alguma função já conhecida gerou a necessidade de pesquisar outras funções. Isso denota que atividades de modelagem matemática permitem construção de conhecimento por parte dos alunos, já que pode levá-los a conduzir esforços em identificar em seus livros didáticos uma função que tivesse um comportamento semelhante ao signo (Figura 08) por eles produzido.

Ao explorar o material didático e ao encontrar uma função trigonométrica que se apresenta como a opção mais próxima de suas investidas, temos a identificação de um signo falado "*Tem pi nisso aqui*", que desencadeia uma discussão pertinente ao uso de um mesmo símbolo em diferentes contextos e que representam coisas distintas.

AL1G3A: Tem π nisso aqui
Professor: Hum?
AL2G3A: Tem π
AL1G3A: Tem π nisso aqui
Professor: É
AL3G3A: 3,14

Professor: Será?
AL3G3A: π não é isso?
AL2G3A: Que ver que até o π
AL4G3A: Até o π mudou
Professor: Veja lá!
AL1G3A: Vejam isso daí, que eu vou passando pro caderno
AL3G3A: Página 302
AL1G3A: Mas pega aí ó! [sic]
AL3G3A: Mas isso ai não tem no meu livro, eu vou usar do meu livro
AL1G3A: Não falo mais...
AL3G3A: Não fale!
[...]
AL2G3A: π 180?
AL3G3A: Nessa coisa aqui
Branda: Sei lá, que eu saiba π é 14, é 3,14!
AL1G3A: 3,14!
AL3G3A: Foi isso que ele falou olha aqui ó, não lembra que a gente estudou isso? Ó π é 180, por isso que ele falou.
AL2G3A: Meu Deus então falta mais!
AL3G3A: Aí, lembra que ele falou, eu perguntei, falei que π era igual a 3,14, e ele será? É porque π é igual a 180, na razão trigonométrica, lembra que a gente estudou né, que aqui era 0 e que aqui era π/2 então era 90 e aqui é π e aqui é 3π/2 que é 270.
AL2G3A: Ah lembro!
AL3G3A: Então?
[...]
AL3G3A: Mas o que está ali no começo ó, o movimento de translação da terra em torno do sol, é um fenômeno periódico e assim como os movimentos das marés são provocados pela posição da lua no lugar da terra, todo esse trabalho foi pra chegar aqui, nessa página
AL4G3A: Eu vou tentar estudar isso em casa

Este diálogo teve sua gênese no momento em que os alunos identificam que as funções trigonométricas, de certa forma, utilizam o número irracional π, e comentam que o valor real do número em decimais era aproximadamente 3,14. A partir do diálogo reconhecemos que a utilização de um mesmo símbolo com significados distintos pode gerar certa confusão na compreensão dos alunos, devido ao contexto ao qual aquele símbolo se refere. O questionamento do professor "*será*?" influencia no entendimento dos alunos quanto à utilização do símbolo π em distintos contextos, pois é utilizado como justificativa pelo aluno AL3G3A para assumir que em funções trigonométricas, em especial, o π representaria o valor de 180º.

Durante a fase *Resolução* os alunos recorrem ao estudo de funções trigonométricas, seno e cosseno, as quais eles não haviam ainda aprendido, para então analisar os dados que possuíam. O estudo das funções ocorreu em duas frentes, pesquisa e leitura do livro didático em casa e, discussões sobre os conteúdos do livro em sala de aula com os integrantes do grupo. Após verificarem que o comportamento da função seno e cosseno são semelhantes, optam por adotar a função seno, $f(x) = a + b\ sen\ (cx + d)$, como a representativa da situação. Para isso discutem sobre os coeficientes da função como expresso no fragmento a seguir:

AL3G3A: Eu não estou, porque ó, o ponto máximo e o ponto mínimo, ficam mais ou menos no π/2, não no 0 quero dizer, a eu fiz errado, pode continuar
Professor: Tá, espere aí! [sic]
AL3G3A: Pensei errado
Professor: Quando eu olho para o eixo y, o que eu estou vendo da função?
AL3G3A: O contradomínio, minha imagem
Professor: Minha imagem, o que você quer mexer na função seno? Aqui
AL3G3A: A imagem
Professor: Imagem, ó eu vou escrever aqui, para nós ter esse registro aqui, qual $y = a + b \cdot sen\,(c \cdot x + d)$*, qual desses coeficientes, o a, o b, o c ou o d mexem na imagem dessa função seno?*
AL3G3A: O a?
Professor: Só o a ou o b também?
AL3G3A: O a e o b.
Professor: Então veja só, você está saindo de uma ideia de que, certo? Isso é a função seno. A imagem de seno é de -1 a 1, não é? Agora você precisa fazer alguma coisa aqui ó, para chegar aonde? Qual que é o valor mínimo?
AL3G3A: 1
Professor: 1 tem que ser ≤ que o que que nós arredondamos?
AL3G3A: 4
Professor: O que que eu tenho que colocar aqui pra ficar isso? O que acontece se eu multiplicar isso aqui tudo por 2?
AL2G3A: Vai ficar o dobro
Professor: Vai ficar $-2 \leq 2 \cdot sen(x) \leq 2$ *e minha imagem ficou entre?*
AL2G3A: 2
Professor: Menos dois e dois, funcionou pro meu caso aqui? Até uma altura, não é? Por que até uma altura? Porque eu consigo me aproximar de 4 mas aqui eu me distanciei, não é?
AL2G3A: Sim.
Professor: Mas e se eu somar dois aqui, nos dois lados o que acontece?
AL2G3A: Vai ficar...
Professor: Se eu tiver lá $-1 \leq sen(x) \leq 1$*, o que que acontece se eu somar 2 em tudo isso?*
AL3G3A: 3 e um
Professor: $1 \leq 2 + sen(x) \leq 3$
Professor: Já não ficou mais perto? Entenderam quando eu digo que estou mexendo na imagem? Eu estou trabalhando com esse e esse coeficiente, o coeficiente c mexe no período o coeficiente b desloca a curva em cima disso aqui, tira ele do eixo, por exemplo quando você adiciona alguma coisa, aqui dentro do a, quando o d é diferente de 0, esse coeficiente d diferente de 0, não vai estar em cima da mesma linha de novo, porque você não vai descendo de 0, você vai descendo de 0+90 por exemplo, você ia deslocar essa turma inteira para cá, ía começa aqui entendeu? [...] você quer ajustar primeiro, esse e esse é só esses dois que mexem, um dois já te ajuda, agora estabeleça uma estratégia você tentar chegar no 4 e no um, trabalhando com o coeficiente a e o coeficiente b.
AL3G3A: então eu tenho que pegar esse negativo um e um e transformar em 4
Professor: Faz o que você quiser destes lados, para você acabar chegando na imagem da função seno (o professor apontava com a caneta para os extremos da desigualdade $-1 \leq sen(x) \leq 1$)
AL3G3A: ah entendi

A análise desse diálogo nos revela que os alunos estavam interessados em compreender o comportamento dos coeficientes a, b, c e d das funções trigonométricas, bem como fariam para adequar tais coeficientes na situação investigada pelo grupo.

Realizados cálculos e simplificações, os alunos criam o signo pictográfico de número 6 (Figura 09), que representa seus entendimentos em relação à situação investigada, ou seja, o fenômeno do movimento das marés na praia de Camboriú- SC.

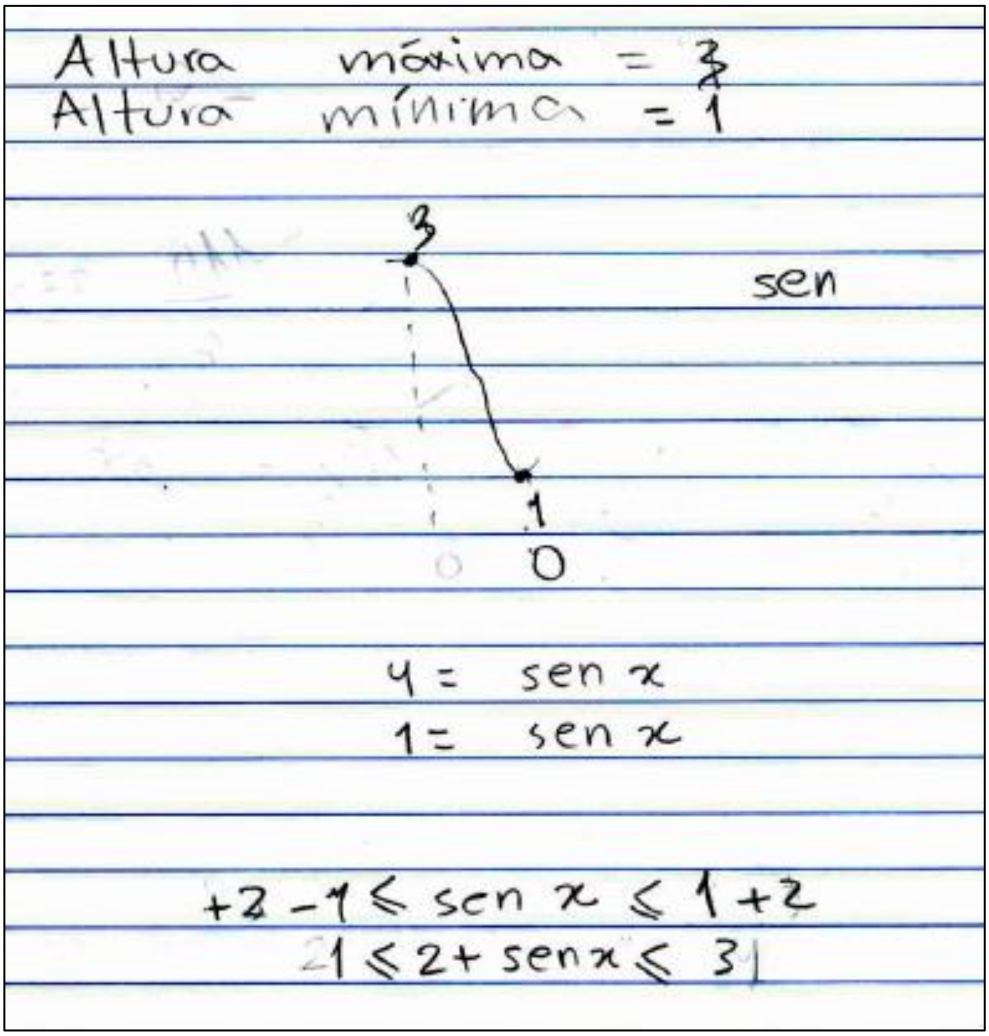

Figura 09: Signo pictográfico 6.
Fonte: os autores, 2018.

Da análise desse signo ponderamos que os alunos compreenderam o significado dos coeficientes *a* e *b* da função seno, bem como identificaram que a imagem da função desejada não poderia extrapolar o intervalo [1,4]. Caso contrário, não representaria o fenômeno estudado. Assim, admitiram como solução para a sua investigação a função *f(x) = 2 + sen (x).*

Percebemos que a transição da situação inicial, movimento da maré na praia de Balneário Camboriú, em SC, até a função apresentada no parágrafo anterior, possibilitou aos membros do grupo G3A uma experiência distinta das vivenciadas até então nas aulas de matemática. Ao longo do desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática identificamos que os diversos signos produzidos pelos alunos retratam um processo de semiose que, de certo modo, sugere que a aprendizagem dos alunos acontece de forma mais efetiva.

4.2. Cercas Elétricas: atividade G2B

O tema Cercas Elétricas também foi apresentado aos alunos pelo professor por meio de um impresso entregue a eles. Tal temática encontra-se em Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 75). A opção por entregar esse material é justificada pelos motivos que seguem: a adoção do *momento dois* para o desenvolvimento dessa atividade, o quantitativo de aulas disponibilizadas para a intervenção em sala, normas internas do colégio, pouca, ou nenhuma, familiaridade dos alunos com atividades de modelagem e o fato de o pesquisador se sentir mais seguro nesse tipo de encaminhamento.

Após o primeiro contato com o texto e ouvidas as orientações fornecidas pelo professor, os alunos AL1G2B, AL2G2B, AL3G2B e AL4G2B, que compõem o grupo G2B, iniciam a leitura do texto. Ao proceder à leitura alguns membros do grupo questionam sobre o que seria o problema e se demandaria cálculos. Essas interações são evidenciadas na seguinte transcrição:

AL3G2B: A gente tem que criar um problema segundo o texto, conforme o texto e daí desenvolver metas para responder o problema que a gente criou.
AL1G2B: Como é o problema?
AL3G2B: Você tem que criar um problema.
AL2G2B: Tem que criar uma fórmula?
AL1G2B: Formula?
AL3G2B: Problema!
[...]
AL4G2B: Criar um problema relacionado com isso aqui.
AL2G2B: Tá, vamos lá. [sic!]
AL1G2B: Problema, não precisa ter cálculo?
AL1G2B: Que tipo de problema?

Neste diálogo há evidências de um pensamento comum que os alunos têm em relação à Matemática. Que ela sempre está atrelada a fórmulas e cálculos. Notamos isto quando o aluno AL2G2B afirma *"tem que criar uma fórmula?"*, ou então o aluno AL1G2B profere: *"problema, não precisa ter cálculo?"*. A discussão sobre a formulação do problema prossegue até que ocorre a intervenção do professor.

Professor: E aí grupo?
[...]
AL4G2B: O problema?
Professor: Qual problema? Se vocês já têm problema então está ótimo!
AL3G2B: Não professor a gente, o problema é a gente resolver qual é o problema
[...]
AL4G2B: Não tem um problema

Identificamos neste diálogo que o aluno AL4G2B não consegue identificar um problema a resolver a partir da leitura que realiza, ou seja, inferimos que ele procura por um problema pronto e acabado já fornecido para ser resolvido por algum tipo de fórmula ou algoritmo. Debates entre os integrantes do grupo e a intervenção do professor questionando-os sobre o tema do texto e se dele pode-se elencar alguma questão a investigar são expressas no diálogo a seguir.

AL1G2B: Oh, dava boa né? Fazer tipo, ou tipo, qual tipo, se é benefício pra todo mundo ter cerca elétrica, devido ao custo? Todo mundo, ou tipo da segurança, tipo é aqui, pode ser do Brasil? Como que é essa segurança, tipo não sei explicar.
AL4G2B: Vale a pena ter cerca elétrica devido ao custo?
AL1G2B: É tipo se a cerca elétrica é beneficial ou não, daí dá pra fazer uma pesquisa em relação ao custo, em relação a opinião. [sic!]
AL3G2B: Se vale a pena gastar dinheiro nisso?

Observamos a partir do diálogo que o G2B decidiu por investigar a questão do custo na instalação de cercas elétricas para ampliar a proteção de residências. Ao definir o questionamento inicial o grupo conjectura estratégias para o encaminhamento da atividade investigativa, conforme é apresentado no diálogo a seguir.

AL1G2B: Se vale a pena investir no uso de cercas elétricas para segurança residencial?
Professor: O que você vai ter que fazer aí, então pra responder essa pergunta?
AL2G2B: pesquisar.
Professor: Pesquisar o que?
AL1G2B: Pesquisar preço da cerca elétrica, opinião.
[...]
AL1G2B: É, pesquisar preços variados de cerca elétricas.
[...]
AL3G2B: o que a gente pode pesquisar?
AL1G2B: o que?
AL3G2B: o que a gente pode pesquisar?
AL1G2B: tem que pesquisar.
AL3G2B: tudo? Esse aqui de baixo?
AL2G2B: gente tem vários tipos tá, tem cerca elétrica industrial, gente depende do tipo de cerca elétrica.
[...]
AL2G2B: gente tem vários tipos de cerca, mas vocês querem a residencial, não é?

Percebemos neste diálogo que devido às características da atividade de modelagem foi possibilitado aos membros do grupo traçar suas próprias estratégias para o desenvolvimento da investigação. Notamos que quando o professor questiona o que precisam fazer para resolver a questão que elencaram o aluno AL2G2B responde de imediato "*pesquisar*", enfatizado pelo aluno AL1G2B "*pesquisar preço de cerca elétrica*". Paralelo a isso outros integrantes do grupo realizam pesquisas via celular sobre preços, e descobrem outro tipo de aparato de segurança para cercas, conforme segue.

AL4G2B: Deixa eu falar um negócio aqui
Professor: Hum?
AL1G2B: Porque tem aquela concertina, que é
Professor: O que que é isso?
AL1G2B: Aquela cerca que é de metal
Professor: Ah tá, e aí?
AL2G2B: Mas daí é elétrica?
AL1G2B: Ai tipo, aqui que as voltagens fogem, mais segura
AL2G2B: Acho que não é cara, só tem uns negocinhos
Professor: Tá, traz essa informação e a gente vê, entendeu?
AL2G2B: Não é arame farpado
Professor: Isso aqui é uma coisa que surgiu quando você estava pesquisando e.
AL3G2B: Não arame farpado
AL1G2B: É com arame farpado
AL2G2B: Viu
Professor: Ó isso é algo que surgiu enquanto vocês estavam pesquisando isso e pode ser uma abordagem para você comparar talvez,
AL3G2B: Mas é elétrico?
AL2G2B: É elétrica?
AL1G2B: É tipo pra comprar qual que é mais, pode ser que ela tenha o mesmo, segurança

Constatamos neste diálogo que durante a busca por informações que subsidiam o desenvolvimento da investigação o grupo encontrou um novo tipo de mecanismo para ser colocado em cercas, e embora muitos de nós já tivéssemos visto tal equipamento, talvez não o tenhamos conhecido pelo nome correto, até mesmo o professor. A interação entre os membros do grupo e o professor que evidencia o saber do que se tratava a "*descoberta*" é reproduzida no diálogo a seguir.

AL2G2B: Aquelas coisas assim, tem em presídio.
AL1G2B: Então a diferença dela é que uma é elétrica e dá pra...
AL3G2B: Necessita de pouquíssima manutenção e não tem consumo de energia
AL2G2B: Não tem consumo de energia?

Para compreender o contexto em que ocorre o diálogo anterior é preciso ter em mente que o aluno AL2G2B estava de posse de um celular com uma imagem encontrada em sua pesquisa, relativa à concertina. Notamos que a busca por dados iniciais permitiu a mobilização de conhecimentos extramatemáticos, ao passo que novas dúvidas ocorriam com relação a descoberta: se a concertina é ou pode ser eletrificada. A intervenção do professor no contexto dessa descoberta é no sentido de sugerir uma comparação entre ambos os tipos de cercas elétricas, as iniciais e esta que acabaram por descobrir.

AL4G2B: É, mas dá pra por

Professor: Daí não dá pra fazer um comparativo das duas?
AL2G2B: Existe no mercado a concertina eletrificada...

Percebemos no diálogo que o aluno AL2G2B está empenhado em descobrir e elucidar as dúvidas surgidas, inclusive, mostra interesse pelo que está pesquisando. Interações entre os alunos do G2B ocorrem e eles admitem querer utilizar na análise da questão inicial, a concertina, juntamente com as outras cercas elétricas, para isso recorrem à pesquisa de preços. O diálogo a seguir retrata aspectos relativos ao custo de instalação de cercas elétricas.

AL2G2B: Ó coloque assim
AL3G2B: Tem cerca elétrica para cães e gatos, calma espera, espera aí!
AL1G2B: Coloque assim, a média de preços de cercas elétricas, de 150 a 1000 reais
AL4G2B: A 450
AL3G2B: Não, 1000 porque tem uma aqui que custa 950.
AL1G2B: Dependendo, dependendo da marca
AL2G2B: Tamanho
[...]
AL1G2B: Eu trouxe os preços
[...]
Professor; Mas é o preço da cerca inteira?
AL3G2B: Boa pergunta.
AL3G2B: Tem essa!
AL1G2B: Tem o kit e tem sem esse kit.

No diálogo consta que foi realizada pesquisa de preços das cercas elétricas, no entanto, ponderamos que os membros do grupo não se atentaram ao fato de que os valores que coletados dizem respeito ao custo total ou até certa metragem específica. Esse detalhe veio integrar as discussões dos alunos após intervenção do professor ao questionar: *"mas é o preço da cerca inteira?"*. Os integrantes concluem que havia necessidade de levar em consideração as dimensões do terreno para a formulação do custo muito embora notam que existe um preço fixo para determinadas partes. Porém, lembram que existe um custo variável que depende dos metros de cerca. Logo, faz-se necessária nova rodada de pesquisa e cotação de preços para coletar informações adicionais que se configuram indispensáveis para a compreensão do problema em estudo, conforme é apresentado no diálogo.

Professor; [...] a pergunta é a seguinte: aqui ele está dizendo que tem o que? 100 metros e hastes, só com essa informação você conseguiria dizer quantos metros de cerca seria o suficiente?
AL1G2B: Não.
Professor: Tem que procurar mais coisas?
AL1G2B: Como assim?
Professor: [...] Esses 100 metros significa que você consegue fazer 100 metros de cerca?
AL3G2B: Sim.
Professor: [...] Porque aqui ele descreveu o geral do produto porque ali ele tem a cerca elétrica, vocês já viram uma cerca elétrica [...]? Tem a haste que é o que você põe em cima do poste, pilar, tem os conectores e tem o fio

e ainda tem o aparelho que controla a voltagem, não tem? Então no kit, subentende-se que é isso. Mas faça aí em metros e se sua casa tiver um pouco mais de 100 metros de cerca?
AL1G2B: Daí vai ter que comprar uma maior.
Professor: Tem que comprar uma maior, ou ver se necessário, nessa loja oferece um adicional.
AL1G2B: Adicional de metros.
Professor: Por exemplo, um kit por 100 se você precisar de mais 20 metros você não precisa comprar um kit inteiro, não é?
AL1G2B: É tem só um metro ó!

A análise deste diálogo nos leva a inferir que G2B compreende que a composição do kit da cerca elétrica abarca apenas uma parte de toda uma cerca, dependendo do tamanho do terreno a ser cercado. Para a resolução desse impasse, novas estratégias foram definidas, como, identificar uma empresa da cidade que pudessem questionar, pois na Internet as informações ainda eram meio desencontradas ou incompletas, aos olhos de leigos. Ao que o aluno AL3G2B diz conhecer uma empresa na cidade que trabalha com alarmes, diz que entrará em contato, esse fato é reproduzido no diálogo a seguir:

AL3G2B: A Unitec deve ter, eu peço pra minha vó ligar lá
Professor: Então, por que para a sua avó?
AL3G2B: Há porque minha avó tem alarme!

Este diálogo nos possibilita perceber a dinâmica proporcionada por uma atividade de modelagem que levou o aluno AL3G2B a cogitar a possibilidade de envolver a sua avó para a realização da coleta de mais informações que auxiliariam o grupo a elucidar sua questão de investigação. Isso se deve ao aluno acreditar que pelo fato dela, a avó, já ser cliente, poderia ser um facilitador na interação com a referida loja. Mesmo assim, na sequência deste diálogo, o professor questiona porque a avó e novas revelações de juízo crítico sobre situações vivenciadas afloram.

Professor: Não tem como vocês chegarem lá, tipo as 4 de uma vez e dizer oi, nós estamos fazendo um trabalho assim, assim, e assim e gostaríamos de saber isso?
AL3G2B: Ai professor
Professor: Então?
AL3G2B: É de mais pra mim
Professor: Por que é de mais pra você?
AL3G2B: Ir na loja perguntar, estou sendo sincera.
AL2G2B: Não, vamos lá.
Professor: Tem certeza que é demais? Não é algo diferente assim?
AL3G2B: Eu não tenho interesse, só vou lá pra perguntar? Tipo eu não vou comprar.
AL1G2B: Daí eles vão ficar bravo

Deduzimos ao observar este diálogo que o aluno AL3G2B deve ter vivenciado uma situação constrangedora, junto a alguma unidade de comércio, quando afirma que somente perguntar o preço em um estabelecimento pode gerar insatisfação por parte do atendente.

Porém, com certa dose de otimismo e perseverança, o aluno AL2G2B enfatiza: *“não, vamos lá!”*.

De posse das informações coletadas junto a empresas locais e *sites* na Internet as ações do G2B foram direcionadas à organização desses dados, momento que identificamos como sendo o início da fase matematização, pois necessitaram organizar as informações coletadas sobre as cercas e a concertina. E é retomada a discussão sobre a questão de investigação, conforme o aluno AL1G2B relembra os demais participantes da atividade. Porém questionaram sobre qual procedimento adotar.

AL3G2B: E agora o que que a gente tem que fazer? Tá vendo, falei que faltava pra fazer. [sic!]
AL1G2B: O que a gente...
AL3G2B: Matematicamente!
[...]
AL1G2B: Agora a gente tem que responder isso, o que que a gente pode fazer? Óh, a nossa pergunta é vale apena investir em cercas elétricas para segurança residencial?
AL1G2B: Tá o que a gente pode fazer? Uma média do preço? Uma média do preço da cerca elétrica?[sic!]
AL2G2B: Não entendi.
AL1G2B: Aqui ó! A nossa pergunta é, vale a pena investir em cercas elétricas para proteção residencial?
AL2G2B: Se vale a pena?
AL1G2B: Agora uma pergunta pra gente resolver matematicamente, a gente tem que fazer uma média?
AL2G2B: Tipo eu tenho um muro de 10 metros, cada metro custa?
AL2G2B: Depende de preço
AL1G2B: De quanto você tem de metro você vai gastar de cerca elétrica, entendeu? Será que é muito difícil?
AL2G2B: Não, é fácil né, porque se a gente só pegar o valor do metro.

No momento de discussão entre os alunos AL1G2B e AL2G2B identificamos um signo pictográfico, trazido na forma da Figura 10.

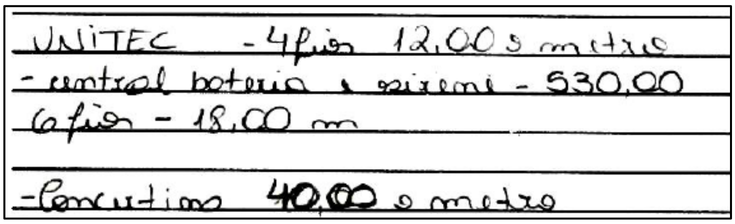
UNITEC - 4 fios 12,00 o metro
- central bateria e sirene - 530,00
6 fios - 18,00 m
- Concertina 40,00 o metro

Figura 10. Signo Pictográfico 7.
Fonte: os autores, 2018.

Uma análise acerca desse signo pictográfico 7 sugere que o grupo ainda não conseguiu ter a clareza de como proceder a análise das informações que dispunham, pois, o signo que “está no lugar de” custo para a instalação de três tipos de cerca é fruto da interpretação dos dados coletados junto à empresa e Internet. No entanto, se somados ao diálogo anterior nos revelam que ainda intentam unir as três formas de cercas e não necessariamente compará-las, ou seja, analisar caso a caso e opor uma a outra. Novos embates ocorreram entre os membros do grupo, e outra intervenção do professor ocorre no sentido de auxiliar no processo decisório de tratamento daquelas informações.

AL2G2B: Tá faz lá, quantos metros teriam que ter a casa
AL1G2B: Ó o metro é 12 reais 4 fios e o kit seria com a central, 530, mais a quantidade de metros que ela quiser, que ela precisar, mas tem 2 jeitos, um de 4 e um de 6 fios
AL2G2B: Tá, mas daí, tá tá tá! [sic!]
Professor: Beleza, como é que você vai responder isso?
AL1G2B: Com os preços
[...]
Professor: Tá beleza. Pra você saber se é vantajoso tem que comparar com alguma coisa, com o que vocês vão comparar?
AL1G2B: Com a concertina
Professor: Com o que?
AL1G2B: Concertina
Professor: Ahh viu como não era só uma, então agora tem que fazer o que? Agora tem que achar uma forma de dizer quanto custa pra fazer um terreno com uma e com a outra pra poder comparar as duas, então é isso que vocês têm que fazer agora.
AL1G2B: Daí matematicamente
Professor: É resolver isso
AL1G2B: Fazer uma continha?

Notamos, ao analisar este diálogo, que o aluno AL1G2B, insinua perceber a necessidade de analisar em duas situações, quando este afirma: *"ó o metro é 12 reais 4 fios e o kit seria com a central, 530, mais a quantidade de metros que ela quiser, que ela precisar, mas tem 2 jeitos, um de 4 e um de 6 fios"*, e ainda com a concertina, pois para responder à questão deverá proceder à análise *"com os preços"*, que em nossa análise figura como um signo falado, pois remete à pergunta inicial do grupo.

Emerge dessas ações a necessidade da geração de um novo signo pictográfico, ou seja, a reinterpretação do signo pictográfico 7, que se comporta como interpretante dinâmico que gera o signo representado na forma da Figura 11 para os integrantes do G2B.

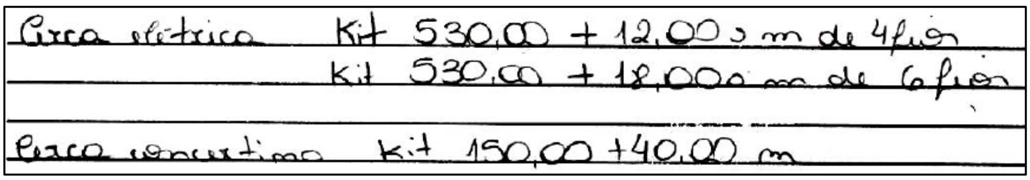

Figura 11. Signo pictográfico 8.
Fonte: os autores, 2018.

A análise do signo pictográfico 8 nos possibilita perceber que ocorre um encadeamento lógico na organização dos dados feita pelos alunos integrantes do grupo. Este fato é salientado no o diálogo a seguir, no qual os alunos explicam ao professor sobre o signo por eles construído.

AL1G2B: A gente quer ver assim ó, a gente colocou que a cerca elétrica mais 12 o metro se for de 4 fios, se for de 6 fios é 18 reais o metro, aí o da concertina o kit é 150 que seria essa parte aqui do central e essas coisas.
Professor: Huhum! [sic!]
AL1G2B: E é 40 reais o metro.
Professor: Porque você quer dizer qual que é mais vantajoso, então teoricamente, talvez um vai ser mais caro ou outro vai ser mais barato, mas como é que você vai descobrir esse valor?

Neste diálogo identificamos que o aluno AL1G2B possui clareza em relação à organização que deu aos dados, juntamente com seus colegas, porém ainda demonstram ter dúvidas sobre como encontrar o valor. Para continuar a atividade outra reflexão era necessária. Veja o diálogo:

Professor: Você vai ficar chutando valores?
AL1G2B: Não é porque tipo é só colocar o mesmo valor de metros, se aqui eu gasto 100 metros eu vou gastar um tanto.
Professor: Sim, mas a pergunta é, até quantos metros quadrados ainda vai ser vantagem ou ele passa ou não passa o outro?
AL1G2B: Hum mais, é sempre a mesma coisa!
Professor: Aqui ó, será?
AL1G2B: Claro.
Professor: Vocês percebem que aqui sobe 40 reais por metro e aqui sobe só 18?
AL1G2B: É mais o kit é 400. [sic!]
Professor: Tudo bem, mas o kit é absorvido, não é?
AL1G2B: Kit é o fixo!
Professor: Beleza, mas esse aqui não sobe muito mais ligeiro que esse?
AL1G2B: É!
Professor: Não vai chegar um momento que esse daqui vai ultrapassar esse? Então a partir de quantos metros de cerca isso aqui vai deixar de ser mais barato? Essa é a pergunta agora pra vocês.
AL1G2B: Tá, e como é que eu faço isso? [sic!]

As discussões sobre a ação de chegar à conclusão de qual seria a cerca mais barata se mantém neste diálogo e delas se depreendem uma nova análise do signo pictográfico 8, que atua como um interpretante dinâmico para os intérpretes, e gera uma nova representação dos dados que em análise.

Percebemos que a fala equivocada e desapercebida do professor: *"sim, mas a pergunta é, até quantos metros quadrados ainda vai ser vantagem ou ele passa ou não passa o outro?"*, faz com que os integrantes do grupo recriem o signo pictográfico 8, de modo errôneo e assumam um caminho incorreto para a análise da situação. Isso porque eles se se utilizam do conceito de metros lineares e não metros quadrados, conforme foi dito pelo professor.

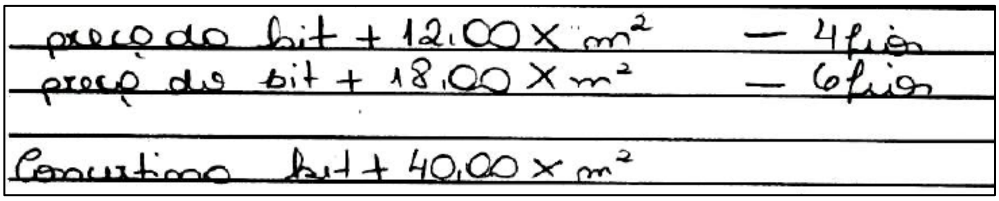

Figura 12. Signo pictográfico 9.
Fonte: os autores, 2018.

Atinamos ao olhar para o signo pictográfico 9 inferimos que a fala equivocada do professor permitiu que os alunos transformassem o signo pictográfico 8 de modo errôneo, no entanto, isso não comprometeu de modo significativo a atividade pois não ficou evidente nos diálogos registrados quando os alunos desistiram da representação da Figura 12. Percebemos que o aluno AL1G2B questiona a forma de "algebrizar" a situação para cada cerca, ou seja, como escrever em linguagem matemática por meio de uma função polinomial, conforme o diálogo transcrito a seguir:

AL1G2B: O preço seria, o x seria o preço, depende do, variável y
Professor: Isso aí agora escreva isso dessa forma e você construiu uma função.
AL1G2B: O metro seria x, porque esse daí eu já tenho né, em? [sic!]
AL3G2B: Você falou que entendeu para o professor, eu não entendi.
AL1G2B: Eu entendi, é pra fazer tipo uma função, se eu tenho tantos metros eu multiplicando com o preço quanto que vai sair. Mesmo, tipo o que depende do que aqui? O valor final que vai gastar depende de quantos metros você for usar, então o valor final que seria o x ele depende dos 530 mais 12 vezes o y.
AL3G2B: Coloca o ponto, vezes, o pontinho!
AL2G2B: Que daí é o metro
AL1G2B: E é a mesma coisa do outro, o x vai ser igual a 530 vezes mais 18 vezes o y, e na concertina vai se o x igual a 150 mais 40 vezes y
AL3G2B: 110
AL1G2B: É isso né?
AL3G2B: Acho que é.

Deste diálogo inferimos que o aluno AL1G2B compreende o conceito de função, a relação de dependência entre variáveis, ao afirmar categoricamente ao colega AL3G2B: "*eu entendi, é pra fazer tipo uma função, se eu tenho tantos metros eu multiplicando com o preço quanto que vai sair. Mesmo, tipo o que depende do que aqui? O valor final que vai gastar depende de quantos metros você for usar, então o valor final que seria o x ele depende dos 530 mais 12 vezes o y.*", ou seja, a relação de dependência entre o custo da cerca (x) com a metragem da cerca (y). É interessante observarmos que a relação criada pelo aluno AL1G2B contraria o padrão tradicional em que as funções são escritas, por exemplo, $y = ax + b$. No mesmo diálogo, identificamos o signo falado ("*coloca o ponto, vezes, o pontinho!")* que, ao ser expresso pelo aluno AL3G2B, remete à representação da operação matemática de multiplicação.

Fruto das discussões apresentadas no diálogo anterior e das informações do signo pictográfico 8, o grupo gera um novo signo pictográfico, trazido em forma da Figura 13.

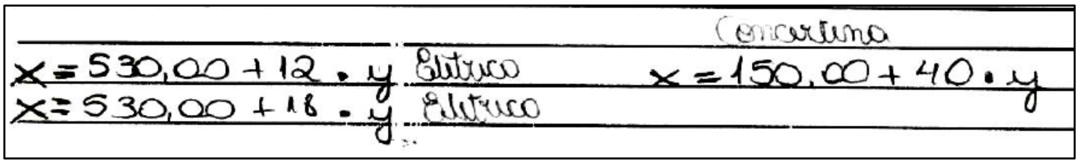

Figura 13. Signo pictográfico 10.
Fonte: os autores, 2018.

Da análise desse signo pictográfico ponderamos que ele se comporta como um interpretante dinâmico, pois se refere a um conjunto de dados transformados que se remetem ao custo da instalação de cercas elétricas. Foi a partir de sua geração que ocorreu novas discussões sobre como chegar a uma conclusão que atendesse à questão de investigação. E inferimos que até aqui os alunos estavam matematizando a situação.

De posse das funções que representavam o custo de implementação de três diferentes tipos de cercas elétricas, quais sejam: com quatro fios, com seis fios; e, concertina, identificamos que os alunos ingressaram à fase resolução, pois necessitavam resolver o problema propriamente dito. Em outras palavras, precisavam comparar o comportamento das funções para entender qual seria mais vantajosa. O diálogo a seguir nos traz estes acontecimentos.

Professor: A pergunta agora que fica é a seguinte, tem algum momento em que vai ser mais vantagem essa ou aquela pra vocês comparar?
AL1G2B: talvez
Professor: Existe algum tamanho de cerca que você consiga colocar por exemplo e dizer assim, não, a partir dessa metragem pra 10 ou 20 metros de cerca é mais vantagem. 30 metros seria a outra, tem como dizer isso? A partir dessas três equações que vocês fizeram aqui?
AL1G2B: Acho que só calculando né, colocando o mesmo valor.
AL2G2B: É.
Professor: Tá, mas se você colocar só um valor o que que vai acontecer?
AL1G2B: Não, mas ir testando né

Ao analisar o diálogo anterior nos fica evidente que o aluno AL1G2B tem claro que se testar com a mesma metragem, ou seja, atribuir o mesmo valor à incógnita *y* de suas funções poderia proceder à comparação dos custos de instalação, no entanto, ainda ineficiente para as conclusões que o grupo necessitava chegar. Intervenções do professor no sentido de instigar os integrantes a se questionar com vistas a resolver a questão se desenrolaram, vejamos o diálogo a seguir:

Professor: E agora? Quais estratégias vocês vão usar para responder isso? Vão ir chutando um valor ou tem um meio mais prático pra fazer isso?

AL4G2B: Não sei se tem
AL1G2B: Ah tem que chutar um valor.
AL4G2B: Deve ter.
Professor: Um gráfico não resolve?
[...]
AL2G2B: Começar tipo do um?
Professor: Pode ser!
AL2G2B: Porque sei lá né! um metro só de cerca. [sic!]
Professor: [...] um metro de cerca, funciona só um metro de cerca?
AL4G2B: Acho que não!
Professor: Então dá para começar com quantos pelo menos?
AL2G2B: Sei lá, uns... [sic!]
AL4G2B: Uns 10.
AL2G2B: 10, 20

Notamos neste diálogo que o professor opta por sugerir a construção de um gráfico com as funções criadas, vislumbrando ao grupo atentar para o fato da intersecção das retas, ou seja, quando os custos de instalação seriam iguais, se isso fosse possível de ocorrer. De posse de um esboço inicial do plano cartesiano e de alguns cálculos de pontos pertencentes ao gráfico das funções, uma nova rodada de questionamentos e interações ocorreu, conforme segue apresentada em forma de transcrição:

Professor: Legal agora, quer pegar a outra folha ali? E faça um gráfico [...]
Professor: Faz inteira, tenta esboçar esse gráfico ali para nós. Deixa eu fazer uma pergunta para vocês: faz sentido você fazer números negativos nesse seu gráfico?
AL2G2B: Não?
AL1G2B: Porque você não vai usar.
AL2G2B: Ah é verdade.
AL4G2B: Como assim?
Professor: Ali você fez o plano cartesiano, os 4 quadrantes. Tá tranquilo, mas você vai ter cerca negativa?
AL4G2B: não então só! [sic!]

Percebemos neste diálogo que embora inicialmente tenham construído o sistema cartesiano ortogonal completo, ao serem questionados, os membros do grupo percebem que não faz sentido representar o segundo, terceiro e quarto quadrantes, pois os dados ora analisados pertencem apenas ao primeiro quadrante, uma vez que as metragens de cerca e seus custos somente podem ser representados por valores reais positivos.

Ao construir o gráfico os alunos comentam que as funções criadas correspondem a retas, tal como o aluno AL1G2B "*mais uma reta*". A geração do gráfico é identificada como outro signo pictográfico, que se comporta como um interpretante dinâmico (Figura 14), e é utilizado para "conhecer mais sobre algo", produz novos signos na mente dos intérpretes. O gráfico é trazido como signo pictográfico 11 na forma da Figura 14.

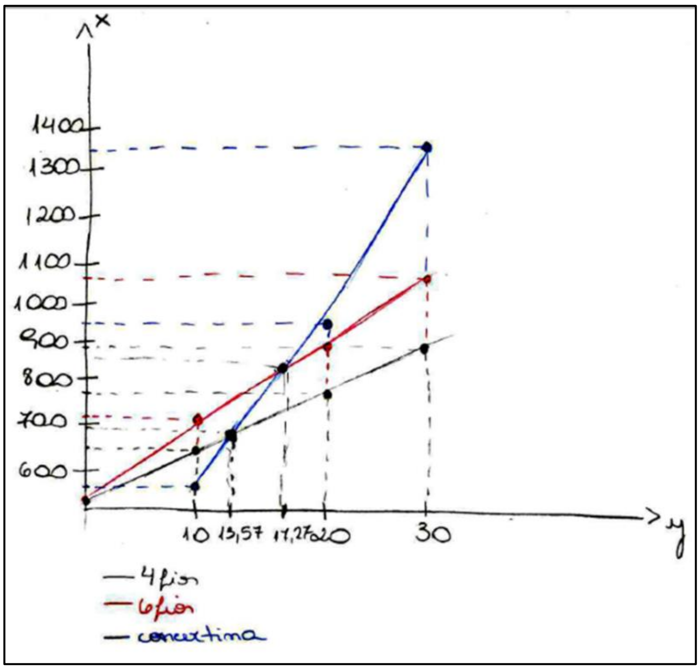

Figura 14. Signo pictográfico 11.
Fonte: os autores, 2018.

O signo pictográfico, ao ser analisado, nos permite concluir que os membros compreendem a representação de uma função polinomial de grau um ($x = 530 + 12y$, para a elétrica de quatro fios; $x = 530 + 18y$, elétrica de seis fios; e $x = 150 + 40y$, a concertina), mesmo que seu domínio e imagem possuam restrições, devido ao fenômeno que representa. Atentamos ao fato da utilização novamente da nomenclatura dos eixos, pois o G2B utiliza-se de nomenclatura inversa ao que costumeiramente é apresentado em livros didáticos e sala de aula. Outro fato é a não interferência do professor nessa situação, pois permitiu que utilizassem a nomenclatura adotada.

De posse do signo pictográfico 11 (Figura 14) os alunos começam a observar que no intervalo de metragens entre 10 e 20 metros a cerca concertina passa a custar mais que as outras. Note no diálogo:

AL1G2B: Tipo pra 10 metros ela era mais barata pra 20 metros ela já custou mais que as duas.
Professor: Mais que as duas.
AL2G2B: E agora? 350
AL1G2B: Bem mais caro
AL2G2B: Bem mais caro.
AL1G2B: É.
Professor: Agora a pergunta que eu faço para vocês é, onde? Aonde elas "empatam" o valor no gráfico, como é que você sabe? Como é que vocês sabem aonde ela empata?
AL1G2B: No 10.
AL3G2B: É no 10?
Professor: Empatou no 10? Como é que eu sei que ela empatou no valor de custo?
AL1G2B: Porque deu aqui ó, não, no 10 ela está menos.
Professor: Menos, me empresta esse lápis aqui
AL1G2B: No 10 ela está menos, entre 10 e 20.

Professor: Entre 10 e 20 metros. Mas aqui olhando no gráfico como é que você vai saber que eles têm o mesmo custo? Com quantos metros ele tem o mesmo custo?
AL4G2B: Aqui.
Professor: Espera aí, me mostre o primeiro lugar que você tinha me apontado, vai lá.
AL4G2B: Aqui!
Professor: Por que você acha que é aí?
AL4G2B: Porque está rente com o outro.
[...]
AL1G2B: Hum, aqui estão quase iguais.

Os elementos que surgem da análise do diálogo apresentado remetem à ideia de imagem da função e intersecção de retas, ou seja, o valor atribuído à variável independente (metros da cerca) permite as distintas funções possuírem a mesma imagem (custo de implementação). Notamos que o aluno AL4G2B utiliza-se de um lápis para mostrar, indicar no gráfico (signo pictográfico 11) o local que julgava ser o ponto de intersecção e justifica: *"porque está rente com o outro" e* enfatizado pelo aluno AL1G2B quando diz: *"hum, aqui estão quase iguais."*. Essas falas transcritas se comportam como signos falados, e remetem à ideia de igualdade de custos de implementação de uma cerca elétrica, que é o problema inicial investigado.

Com a intervenção do professor, discussões sobre a imagem e o domínio da função são retomadas com o intuito de encontrar efetivamente o valor que faz com que as funções tenham imagens iguais, sem necessariamente saber qual é esse valor, observado na transcrição:

Professor: Então como que você vai saber qual que é o valor igual? Não é olhando pra esse eixo aqui?
AL1G2B: huhum
Professor: E ai? Aonde as curvas se encostam? Não é o mesmo valor? E a onde elas se encostam ali?
AL1G2B: Aqui?
Professor: Huhum. E aqui, entendeu AL2G2B? Aqui ó você percebe que se ligar vai ser o mesmo valor ali ó? E nesse ponto aqui também vai ser o mesmo valor? Então a curva azul quando assumido esse valor de y não tem o mesmo que a cor da vermelha quando assumido o mesmo valor pra x aqui ó? Agora, a pergunta é: como eu identifico, já sei olhando o gráfico, o gráfico vocês me mostraram agora, quanto vale o y aqui em baixo?

O desenvolvimento das discussões trazidas pelo diálogo anterior se deu no sentido de que a tentativa poderia ser um caminho, mas não o mais eficiente. Assim, os alunos procuraram por outra estratégia mais efetiva para encontrar essa igualdade.

Professor: Entendeu? Então a tentativa e erro vai funcionar agora? Não?
AL1G2B: acho que não!
Professor: Não, então agora nós vamos ter que recorrer a um outro elemento da matemática, que vocês já trabalharam com isso, vocês já resolveram é, sistemas de equações?
AL1G2B: Huhum.
Professor: Então, vocês não têm três equações que vocês querem combinar duas a duas? O que que é isso daqui ó? O que que é esse azul aqui ó?

AL4G2B: Concertina.
Professor: E a onde é que esta a expressão da concertina que você usou? Isso aqui não é uma equação? X igual a alguma coisa? E qual que é a expressão da de lápis ali ó? Tá então observe aqui ó, se você tem uma é x igual a 530
AL1G2B: 530 mais 12 vezes y
Professor: 530 mais 12 vezes y, e a outra?
AL4G2B: x igual a 150
Professor: 150
AL4G2B: Mais 40 vezes y
Professor: Mais 40 vezes y, aí você tem um e dois, o que vocês querem encontrar? Quem vocês estão procurando?
AL1G2B: O y
[...]
AL4G2B: Tipo juntar a equação
AL2G2B: As duas
[...]
AL4G2B: Junta
Professor: Como que você junta?
AL4G2B: Com o igual?

Nesse diálogo, os questionamentos realizados pelo professor foram os responsáveis por direcionar os olhares dos alunos para o signo pictográfico 11 (Figura 14), possibilitando olhar para outro signo, as funções (leis de formação que foram criadas). No desfecho do diálogo o aluno AL1G2B compreende que o valor que estão procurando está relacionado à variável *y*, que representa os metros de cerca a serem instaladas. A partir desse *insight*, o aluno AL4G2B questiona: *"tipo juntar a equação?",* que identificamos como um signo falado que está associado à operação de igualar duas equações com o objetivo de encontrar o valor de uma ou mais incógnitas. O aluno AL4G2B depois de ser questionado como se "junta equações" responde: "*com o igual?"* e realizaram as operações de igualar as distintas equações conforme o diálogo:

Professor: Tá o que você fez aqui? Você viu que não tinha y em um lado da igualdade e que tinha y do outro, agora aqui você pegou e fez o que? 530 menos 150 e já chegou a?
AL1G2B: 380
Professor: Igual e agora o que você faz com esses dois aqui?
AL1G2B: Pesquise aí.
Professor: Você tem 40 y menos 12 y
AL1G2B: Diminui só, tipo daí [sic!]
Professor: Quantos y você vai ter então?
AL1G2B: 28
Professor: Tá e aí? [sic!]
AL1G2B: Agora eu faço, passa dividindo
AL3G2B: Passa dividindo
AL1G2B: 28 por 30, 380 divididos por 28, vai dar 13
Professor: Então escreva lá isso, então você achou que o y teu seria?
AL1G2B: 13,57
Professor: 13,57 e isso te resolve o que no seu problema?
AL1G2B: A onde eles são o mesmo valor
Professor: O y vai ser 13,57 metros? Calcule agora lá nas duas e experimente pra ver se vai dar a mesma coisa
AL1G2B: Deu 692,84, 692,84
Professor: Fecha?

AL1G2B: Fecha.

Podemos perceber neste diálogo a mobilização de conceitos matemáticos relacionados à resolução de equações de primeiro grau e embora já tenha sido um conceito estudado e abordado em anos precedentes de estudo inferimos que ainda ficam certas dúvidas quanto a sua resolução, que de certa forma foram novamente trabalhadas devido às características das atividades de modelagem. No que se refere às equações de primeiro grau, ressaltamos que a frase proferida pelo aluno AL3G2B: *"passa dividindo"* é um signo falado, pois remete a operação de dividir uma equação em ambos os lados pelo menos número. A frase é comumente utilizada por professores para as resoluções de enunciados que envolvem equações. Ainda neste diálogo a assertiva do aluno AL1G2B: *"fecha"* também é identificado como signo falado gerado após encontrarem o valor de 13,57 metros, e se referencia ao ponto de interseção entre as duas retas em questão, em especial nesse caso, a reta que representa a concertina e a cerca de 4 fios. Pensamento esse que é validado após a solicitação do professor para que aplicassem essa metragem em ambas as equações para verificar se obtinham o mesmo valor de custo.

Enquanto os integrantes do G2B discutem essas estratégias juntamente com o professor, o signo pictográfico 12 foi gerado, que é exibido na Figura 15.

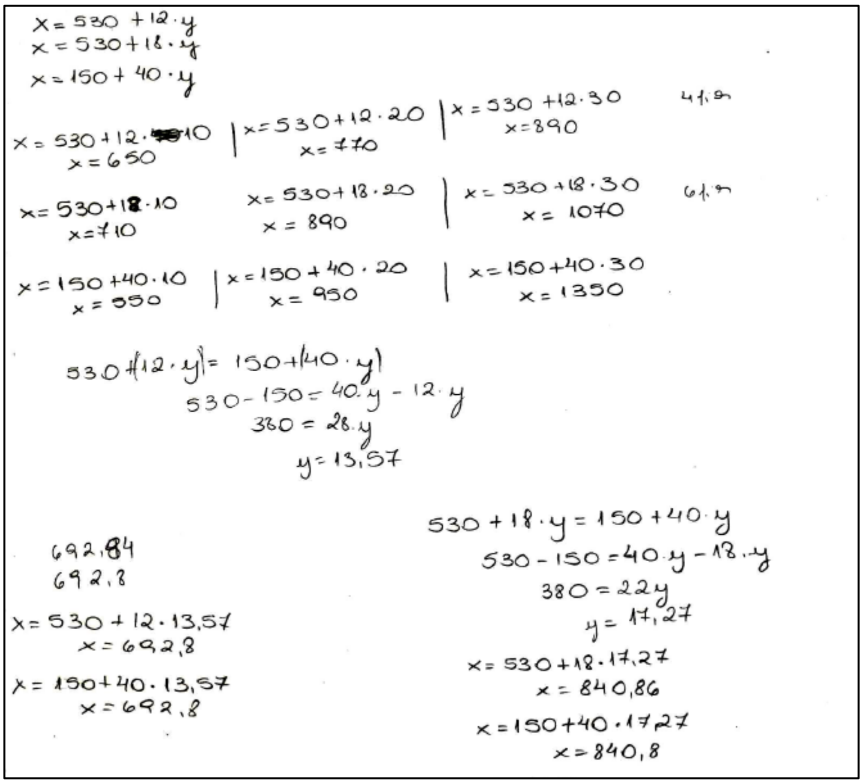

Figura 15. Signo pictográfico 12.
Fonte: os autores, 2018.

A análise do signo pictográfico 12 elucida os passos adotados para a resolução, pois perpassou inicialmente pela tentativa erro, ou seja, a utilização de mesmo valor da variável independente, no caso a *x*, para proceder à verificação da existência de correspondência de imagens. Estratégia que foi abandonada por ser compreendida como não sendo a mais eficaz naquele momento. Logo abaixo das três tentativas, os alunos então partiram para a estratégia relatada anteriormente de “*igualar*” as equações.

Na continuidade do desenvolvimento da atividade o professor questiona se estas novas informações obtidas a partir da resolução das funções/equações seriam suficientes para responder a sua questão investigativa. Os alunos responderam que sim e geraram como conclusão da atividade o signo pictográfico 13, apresentado pela Figura 16.

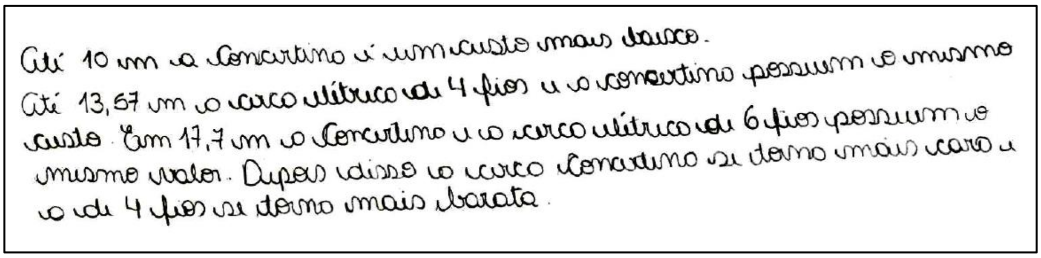
Até 10 m a Concertino é um custo mais baixo.
Até 13,57 m o cerco elétrico de 4 fios e o concertino possuem o mesmo custo. Em 17,7 m o Concertino e o cerco elétrico de 6 fios possuem o mesmo valor. Depois disso o cerco Concertino se torna mais caro e o de 4 fios se torna mais barata.

Figura 16. Signo pictográfico 13.
Fonte: os autores, 2018.

O signo pictográfico 13 revela que os alunos do G2B perceberam que em uma atividade de modelagem matemática não necessariamente terá uma única resposta, pois observamos que ao darem sua resposta não existe uma unanimidade, mas, condições que se verificadas mudam as considerações a serem tomadas. Perceberam que até certa metragem um determinado tipo de cerca é mais viável do ponto de vista do custo de implantação e a partir de certa metragem passa a se configurar outro tipo, e por fim, com uma terceira medida duas se tornam caras em relação à outra.

Em uma última intervenção o professor questiona ao G2B sobre o desenvolvimento da atividade de modelagem. E é trazido como diálogo a seguir:

Professor: E ai, agora me digam o que vocês acharam disso?
AL4G2B: A que dependendo se for seguro mesmo a cerca vale a pena investir, na cerca
Professor: O que vocês acharam da atividade?
AL4G2B: A é meio complicadinha no começo.
AL1G2B: Mas faz pensar.
AL3G2B: É meio, um pouco
AL4G2B: É.
Professor: Complicado em que sentido?
AL1G2B: Tem que ficar pensando.
AL3G2B: Tem um monte de conta

[...]
AL4G2B: Não, eu gostei é mais dinâmico.
AL1G2B: Não é tão cansativo.
[...]
AL4G2B: É, ficar só matéria, matéria, matéria.
Professor: E aprendeu alguma coisa? Ou não aprendeu?
AL3G2B: Sim, aprendeu né

Identificamos que os alunos apreciaram desenvolver essa atividade de modelagem, mesmo o aluno AL3G2B tendo se queixado ao afirmar *"tem um monte de conta"*, ao notar que demonstraram certa segurança nos seus modos de agir enquanto avançavam no desenvolvimento dela. Além disso, reconhecemos que a atividade propiciou aos alunos um momento único para a construção de conhecimentos.

4.3 O que nos revelam os signos identificados

Nesta seção, orientados pelo referencial teórico e pelas análises realizadas na seção 4.2, buscamos refletir acerca do questionamento central da pesquisa: "O que revelam os signos associados à fase Matematização e Resolução em uma atividade de modelagem matemática?". Esclarecemos que, ao formular esta questão de investigação, pontuamos em especial a expressão "o que revelam", e optamos, propositalmente, por não precisar um foco específico, devido às características intrínsecas dos signos (discutidas e apresentadas na seção 2.1). Acreditamos que ao limitar um viés particular correríamos o risco de desperdiçar a oportunidade da multiplicidade de olhares, ainda não revelados.

Por isso, neste momento de reflexão, pós desenvolvimento e análise das atividades, trazemos nossas considerações dispostas/agrupadas em três dimensões, sendo elas: ensino, aprendizagem e cultura estudantil. A primeira considera aspectos revelados referentes ao processo de ensino, ou seja, ao papel e as ações do professor; a segunda, aqueles que estão relacionados à aprendizagem, isto é, referentes a atuação e escolha dos alunos; e, por fim, a terceira, enfatiza as revelações que de um modo peculiar, nos mostram pormenores das atitudes do(s) aluno(s) com relação ao ambiente estudantil. A Tabela 01 apresenta as dimensões propostas, bem como características relativas a cada uma delas em decorrência dos signos produzidos pelos alunos ao longo do desenvolvimento de suas atividades de modelagem matemática.

Tabela 02. Dimensões e características reveladas pelos signos analisados.

Dimensão	Características
Ensino	- Uso de tecnologias digitais em sala de aula; - Ações/intervenções do professor; - Exploração de conteúdos anteriores/reforço; - Mobilização de linguagens e organização de dados; - Simbologia matemática.
Aprendizagem	- Mobilização de conteúdos extramatemáticos; - Organização e estruturação de dados como forma de pensamento; - Conhecimentos adquiridos ou reforçados; - Transição de linguagens; - Necessidade de novos conteúdos; - Intervenções do professor; - Simbologia matemática.
Cultura estudantil	- Dependência do professor; - Necessidade de cálculos; - Questiona... apaga!; - Tentativas; - Envolvimento social; - Formulação de problemas.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Em relação ao processo de **ensino**, os signos identificados possibilitaram as seguintes reflexões:

- *Uso de tecnologias digitais em sala de aula*: os signos revelaram que mesmo para o profissional mais entusiasmado à inserção e/ou extrema necessidade de utilização de tecnologias em sala de aula, que a modelagem matemática pode ser realizada numa perspectiva mais "tradicional", ou seja, sem a utilização de *softwares* matemáticos para ajustes de curvas, por exemplo. Mesmo que as pesquisas exploratórias tenham sido realizadas via dispositivos móveis, grande parcela da escrita foi realizada manualmente em livros didáticos, estimulando o aluno a realizar cálculos, conjecturar estratégias de alocação de uma representação gráfica em papel milimetrado (escalas);

- *Ações/intervenções do professor*: há ainda grande dependência dos alunos quanto à figura do professor e, com isso o desenvolvimento da atividade de modelagem é grandemente influenciado por ele. Com relação à influência das ações do professor (seja por suas palavras ou mesmo "manias") chamamos a atenção para a questão do uso da simbologia matemática, como quando é apresentado pelo G2B sobre o pontinho (signo falado) que se refere à multiplicação, percebemos que o aluno sente a necessidade (obrigatoriedade) da presença do ponto, embora por muitas vezes ao expressarmos o produto de dois fatores por meio de representação algébrica ele seja omitido. Outro aspecto interessante a ser destacado é a geração do signo pictográfico 09 a partir do signo pictográfico 08, em que a informação é grafada pelos alunos de modo errôneo (metros quadrados, ante a metros lineares) em decorrência de uma intervenção/fala equivocada do professor;

- *Exploração de conteúdos anteriores/reforço*: a geração do signo pictográfico 04 (G3A) permitiu a possibilidade de, no transcorrer da atividade, explorar conceitos anteriormente aprendidos e revelou que ainda pairavam dúvidas quanto à utilização do sistema cartesiano. Por sua vez, o G2B, em seu signo pictográfico 11, nos mostra que os alunos possuem clareza na utilização do sistema cartesiano;

- *Mobilização de linguagens e organização de dados*: a partir dos signos identificados foi possível estimular a transição de linguagens e a organização de dados. No caso da transição de linguagens fica evidente que os grupos, cada um ao seu modo, seja por tentativas ou assertivas, buscou transformar os seus dados, utilizando-se de distintas representações, ou seja, da forma algébrica para a gráfica (signo falado: "*juntar a equação...*"), da numérica para uma tabela, a utilização de provas reais para confirmação das hipóteses assumidas por eles (G2B – pictográfico 12);

- *Simbologia matemática*: os signos nos revelam que a utilização de mesmo "símbolo" (a letra grega π) para dois significados distintos (em especial aqui, 3,14... ou 180º) pode ser um dificultador ao processo de ensino, pois causa estranheza ao aluno em identificar quando é uma e quando é outra situação. Acreditamos que aqui vale uma reflexão sobre a nomenclatura dada às variáveis do sistema cartesiano, principalmente quando do estudo das funções. A padronização x e y, para os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, pode gerar dificuldades em compreender outras situações que sejam apresentadas/representadas por outras letras, como em geral é o caso do ensino da Física.

Na segunda dimensão, trazemos os aspectos relacionados à **aprendizagem**:

- *Mobilização de conteúdos extramatemáticos*: a análise dos signos nos evidenciou que atividades de modelagem matemática possibilitam abordagens interdisciplinares, isto é, a necessidade de recorrer a conteúdos não necessariamente matemáticos para a compreensão do objeto de estudo, este fato ocorreu com o G3A, ao demandar o conteúdo de meridianos;

- *Organização e estruturação de dados como forma de pensamento*: os signos revelam o caminho que os alunos percorrem para organizar as informações, ou seja, mostram os critérios que os alunos estabelecem para a organização de dados coletados. Para além de organizar os dados, mostra as conjecturas estabelecidas, as possibilidades. Um exemplo disso ocorre quando o G3A cria um esquema de cores para intervalos de horas (pictográfico 01) e por um processo de conhecer mais sobre (semiose) o transforma em outras representações (tabelas ou quadros), recorrendo a cálculos (médias) e simplificações (pictográfico 02 e 03), por outro lado, o G2B (pictográficos 07, 08 e 09) estabelecem um desenvolvimento do raciocínio de correlação entre variáveis que corresponde ao princípio do raciocínio de correlação.

- *Conhecimentos adquiridos ou reforçados*: o processo de criação, manipulação e transformação dos signos nos permitiu constatar conhecimentos que os alunos adquiriram anteriormente, tal como com o signo pictográfico 02 (G3A), quando este grupo procede à simplificação pelo cálculo da média, enfatizado pelo signo falado *"não é 0,8*". O signo gestual realizado pelo aluno para se referir às funções polinomiais de grau um e dois depois de construírem o signo pictográfico 08, mostra que os alunos identificam o comportamento dessas funções quando expressas por meio de gráfico. No caso do G2B, revelam a compreensão da utilização do sistema cartesiano (pictográfico 11) ou ainda com o conceito de função, e escolha de variáveis (pictográfico 12, inversão de x e y na relação $y = ax + b$, geralmente utilizada nos livros didáticos);

- *Transição de linguagens*: a utilização de diferentes formas de representar os fenômenos estudados pelos grupos (signos criados e recriados) favoreceu a escrita, a elaboração de ideias, conjecturas e estratégias. O fato de o aluno ter que colocar no papel contribui para o estímulo a escrita, pois em um mundo cada vez mais tecnológico, acabamos por deixar de lado a escrita, principalmente com a construção de gráficos, caso em que foram utilizadas folhas milimetradas;

- *Necessidade de novos conteúdos*: a geração dos signos pictográficos 01, 02, 03, 04 e 05, revelou a necessidade dos integrantes do G3A em recorrer ao livro didático, visto que o comportamento da função que ali se apresentava não era condizente com nenhuma das que eles conheciam, demandando aprender novos conteúdos;

- *Intervenções do professor*: falas equivocadas do professor influenciaram a geração do signo (pictográfico 09 – G2B) e acreditamos que a sua exploração favorece o precedente para a aprendizagem/discussão sobre a diferença entre metros lineares e metros quadrados;

- *Simbologia matemática*: os signos revelam que a utilização de símbolos iguais para significados distintos (caso do π, G3A) oportunizou a discussão da utilização de mesmos símbolos para significados distintos, comum à Matemática. A fala do aluno do G2B sobre o "pontinho" como representativo da multiplicação de fatores, também merece destaque, pois em grande parte das vezes ele é omitido e isto nos mostrou que provavelmente em algum momento de sua vida escolar, este aluno teve algum tipo de "reforço" (realizado por um professor) que enfatizou a sua necessidade de sua utilização e, talvez o aluno, tenha dificuldades em visualizar a multiplicação sem essa representação.

Por fim, na terceira dimensão, trazemos os aspectos inerentes ao ambiente escolar, ou seja, a **cultura estudantil**, as percepções que identificamos nos alunos sobre o processo de ensino e aprendizagem no ambiente escolar:

- *Dependência do professor*: embora os alunos consigam conjecturar e estabelecer estratégias iniciais de ações para o desenvolvimento da atividade persiste grande dependência de intervenções do professor;

- *Necessidade de cálculos*: notamos que os alunos no que se refere às atividades em aulas de matemática, sentem necessidade de efetuar cálculos, utilizar fórmulas. Isso fica ressaltado nas falas: *"não precisa fazer cálculo?"* ou *"criar uma fórmula"*, esse fato é muito enraizado no ensino da Matemática;

- *Questiona... apaga!*: este é um aspecto que já foi objeto de investigações científicas e que é muito recorrente em aulas e atividades de matemática, ou seja, a crença do aluno em que se o professor perguntou "Por que?" ele irá "apagar" na hora, antes mesmo de refletir ou explicar o que havia feito;

- *Tentativas*: são elas a maneira mais comum de tentar resolver uma questão, em geral esse é o primeiro passo, mas é necessário olhar para essas tentativas como oportunidades de aprofundamento de outras linguagens (algébrica, por exemplo), para o início do processo de generalização, inerente ao pensamento algébrico, bem como a elaboração de gráficos, tabelas;

- *Envolvimento social*: a análise da atividade nos permite perceber a mobilização de amigos, familiares e sociedade no processo de ensino e aprendizagem, isso acontece quando o integrante do G2B afirma que irá pedir a sua avó, pois teria vergonha de ir apenas pesquisar na loja sobre o preço de determinado produto sem adquiri-lo, o que nos revela comportamentos sociais, tanto de alunos quanto de familiares e atendentes;

- *Formulação de problemas*: há grande discussão sobre a formulação de problemas em Matemática, em especial, em Modelagem Matemática, não pretendemos assumir isso como cerne da discussão, apenas evidenciar o que nos foi revelado ao desenvolver atividades de modelagem com os alunos. O fato é que eles esperam, mesmo que no sentido mais elementar da palavra problema, que o professor ou alguém o traga pronto, que eles não precisem formular questões/problemas a serem investigados. Entendemos que esse fato é cultural, e questionamos: se nunca lhes foi proporcionado formular, como saberiam?

Dessa forma, podemos dizer que a análise dos signos, disposta por meio das dimensões e características apresentadas anteriormente revela as possibilidades e as potencialidades da utilização de atividades de modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o olhar semiótico engendrado permitiu, fazendo uso de suas características intrínsecas, perceber de que forma os signos agem em cada aluno enquanto forma de aprender mais sobre. De modo amplo, mas sem perda de especificidades, os signos e a atividade nos revelam conhecimentos dos alunos, estratégias de resolução ou encaminhamentos, dúvidas, aspectos culturais do ensino, características das transições de linguagens, curiosidades e incertezas.

Por fim, embora as atividades de modelagem matemática não figurem como novidade no campo científico, elas ainda se distanciam da prática docente na Educação Básica, fato que acreditamos ser o diferencial de nosso trabalho, visto que a atividade proposta transcorreu no ambiente de sala de aula, em que o pesquisador é professor regente. Frisamos que não se tratou apenas de um experimento ou intervenção isolada, mas sim, fez parte do cotidiano da aula.

Na seção a seguir tecemos nossas considerações finais acerca do estudo realizado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da Modelagem Matemática, enquanto alternativa pedagógica, em aulas de matemática no Ensino Médio foi proposta com o intento de permitir aos alunos a vivência de um ensino de matemática diferente do habitual. Oportunizar momentos em que alunos pudessem se colocar ativamente no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, atuarem como efetivos sujeitos de seu aprender, agentes autônomos capazes de formular problemas e decidir sobre seus interesses também nos fez repensar sobre o nosso papel de professor.

A possibilidade de cursar um Mestrado Profissional tornou possível a proposição e a realização de atividades diferenciadas, fazendo uso da Modelagem Matemática, e analisadas sob lentes da Semiótica. Desta forma, propusemo-nos a investigar o que revelam os signos associados às fases do processo de modelagem denominadas matematização e resolução, cuja análise nos trouxe distintos aspectos relacionados a três dimensões: ensino, aprendizagem e cultura estudantil.

Para a identificação dos signos recorremos à teoria Semiótica desenvolvida por Peirce. Os signos foram reconhecidos a partir do processo de coleta de dados realizado durante parcela do segundo bimestre do ano letivo de 2018, nas aulas regulares da disciplina de matemática, em duas turmas do Segundo Ano do Ensino Médio de uma escola particular de União da Vitória – PR, na qual o pesquisador era o professor regente. O *corpus*, que permitiu as reflexões e análises aqui apresentadas, foi composto pelos registros dos alunos durante a realização da atividade, pela transcrição das gravações dos áudios das aulas e por anotações do pesquisador.

As análises dos materiais coletados, dos signos identificados e das atividades de modelagem como um todo permitiram reflexões que foram além da questão a ser investigada. Evidenciamos que as atividades de modelagem matemática possibilitam a mobilização de conhecimentos tanto matemáticos como extramatemáticos de forma integrada, oportuniza que a matemática seja utilizada de forma ampla, pois os conceitos e conteúdos ali utilizados estão associados ao problema eleito para investigação, incentiva o trabalho colaborativo, a socialização e o envolvimento de familiares e da sociedade.

Direcionando nossos olhares para os elementos apresentados na seção 3 deste trabalho, que aborda aspectos metodológicos e para os signos identificados e analisados na seção 4, percebemos que a geração destes foi em decorrência direta da definição do problema de investigação realizada pelos alunos, e influenciada pela mediação do professor.

Ao transitarem da situação inicial para a final, e observando as duas fases Matematização e Resolução, os alunos ao desenvolverem as atividades, permitiram-nos observar a geração de novos signos (interpretantes dinâmicos), ou seja, a ocorrência do processo caracterizado como semiose. Este processo fez com que, mesmo com intervenções do professor (seu papel em uma atividade de modelagem), os alunos conhecessem mais sobre seu problema. Os signos associados às fases destacadas nos revelaram estratégias de estruturação e/ou organização de dados, processos de simplificação desses dados, dificuldades quando da utilização de mesmos símbolos com significados distintos (caso do π), além da necessidade de aprender novos conteúdos.

A utilização da Semiótica como lente para uma compreensão das representações utilizadas pelos alunos favoreceu a visualização de determinados aspectos relacionados a conhecimentos assentados e dúvidas que persistem sobre conteúdos já explorados anteriormente, que se apresentam de modo tênue ou discreto.

Ampliando a nossa observação, atentamos à atividade de modelagem como um todo, e notamos que os signos identificados nos permitiram perceber certos aspectos que estão intrinsecamente relacionados à cultura estudantil, ou seja, estão presentes e enraizados na vivência escolar dos alunos. Alguns deles podem figurar como obstáculos didáticos e demandam a atenção do professor mediador.

Dentre estes aspectos averiguamos que em atividades propostas na disciplina de matemática, em sala de aula, é recorrente o pensamento de que existe a "obrigatoriedade" da ocorrência de cálculos ou ainda da utilização de fórmulas e algoritmos, fato que nem sempre é verdadeiro, pois a matemática vai além de realizar contas ou processos de repetição algorítmica. Outro aspecto que já foi objeto de investigações científicas, mas que se notou ser costumeiro, ocorre quando o professor questiona sobre determinada situação, pensamento (escrito) ou cálculo exposto pelo aluno e ele, imediatamente apaga o que havia escrito na certeza de que o ato de questionar significa estar errado; quando na verdade a intenção do professor é se situar em relação ao raciocínio do aluno para aquele fato.

Isto nos levou a algumas considerações sobre as ações do professor, ou seja, seu papel frente à implementação de atividade de modelagem matemática, pois os signos nos mostram que há ainda uma grande dependência por parte dos alunos da figura do professor, principalmente com relação à definição, escolha ou elaboração de problemas. Tal fato está, para nós, intrinsecamente ligado ao hábito de raramente se dar aos alunos a tarefa de problematizar. Contudo, esse comportamento pode ser alterado se for oferecida a possibilidade de o aluno formular problemas e questionar resultados e procedimentos, o que é normalmente suscitado em atividades de modelagem.

Como reflexão para a inserção de atividades de modelagem em sala de aula vale ressaltar que as atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas pelos alunos no ambiente de sala de aula durante o decurso do bimestre letivo e, para sua realização, foram utilizados recursos simples: papel, caneta, lápis, borracha e folhas milimetradas. Isso revela a possibilidade de realizar atividades deste tipo sem necessariamente ter que recorrer ao uso de novas tecnologias digitais, que por vezes, a sua falta, é utilizada como discurso para justificar a não realização de práticas de ensino e aprendizagem diferenciadas. A utilização de materiais comuns permitiu, de certa forma, que os alunos sentissem necessidade de escrever, de riscar e refletir sobre o que estavam fazendo, criar gráficos e retomar conhecimentos anteriores.

Relativo aos fatores que podem inibir a utilização de atividades de modelagem matemática tem-se a questão dos estabelecimentos de ensino que adotam o livro didático[4], caso do colégio objeto da investigação. No nosso caso esse fato não figurou como proibitivo, ao contrário, a atividade proposta associada à eleição/escolha da situação inicial dos alunos é que gerou a necessidade da exploração do material didático, permitindo-nos inferir que a utilização de atividades de modelagem pode sim estar associada a materiais deste gênero.

Diferentemente do que ocorre em aulas tradicionais em que se prima pela memorização e repetição, as atividades de modelagem matemática ora desenvolvidas e analisadas se mostraram dinâmicas e possibilitaram aos alunos aprender conceitos matemáticos e extramatemáticos, uma vez que tinham como mote resolver um problema que tenha sido formulado por eles. Desta maneira, acreditamos que inserir atividades de modelagem matemática em sala de aula requer desprezar que o aluno seja apenas um receptor, esquecer sua passividade e estimular sua pró-atividade, através de meios que permitiram que ele estabeleça maneiras de responder ao problema que foi decorrente de sua escolha, que possa mobilizar conhecimentos distintos, conjecturar e trabalhar coletivamente.

Por fim, ressaltamos que os resultados das atividades que aqui foram apresentadas, bem como seus encaminhamentos são únicos, já que carregam percepções de cada integrante dos grupos e intervenções pontuais do professor. Contudo, se desenvolvidas sob a ótica de outros sujeitos e analisadas a partir de outras lentes, podem gerar outras atividades de modelagem.

---

[4] Como resultado desta dissertação, em especial, a reflexão atrelada à formulação de problemas, elaboramos um Material de Apoio Pedagógico, intitulado: “UMA EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA EM TURMAS DO ENSINO MÉDIO”, que pode ser utilizado como referência na inserção de atividades de modelagem matemática em sala de aula, a partir do *momento* um ou dois conforme é apresentado na Seção 2.1.

6. REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 1014 p.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, n. 22, pp. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**. v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e a interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. *In:* VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – GO, Pirenópolis: 2015. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, p. 1-13.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, abr. 2017. (p. 202 – 219).

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. 24ª RA da ANPED. **Anais**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. 1ª reimp. da 1ª edição. São Paulo: Edições 70, 1977.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 1, p. 1-10, 2004.

D´AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DEELY, J. **The word "semiótica":** formatcion and origens. Semiótica, 2003.

DRIGO, M. O. **Comunicação e Cognição:** semiose na mente humana. 1. ed. Porto Alegre: Sulina, 2007. 142 p.

FERREIRA, E. P. Semiótica Visual na Educação Tecnológica: Significações da Imagem e Discurso Visual. 2006. **Dissertação** (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2006.

FIDALGO, A; GRADIM, A. **Manual de Semiótica**. UBI – PORTUGAL: UBI – PORTUGAL. Disponível em: www.ubi.pt. 2005, acesso em 17/07/2018.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. *In*: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), **Mathematics Education as a Research Domain**: A Search for Identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar - Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and Mathematical Modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *In:* **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**. v.38, n.3. p.302-310, 2006.

KILPATRICK, J. Investigación em Educación Matemática: Su historia y algunos temas de actualidad. *In:* GÓMEZ, P., KILPATRICK, J.; RICO, L. **Errores y difucultades de los estudiantes**. Bogotá: Guniversidade de los Andes, 1998.

MAGNUS, M. C. M. História da Modelagem Matemática na Educação Matemática Escolar Brasileira. **Anais**. XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Minas Gerais, 2015.

MALHEIROS, A. P. S. Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem Matemática. 2008. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro - SP, 2008.

MEYER, J. F. da C.; CALDEIRA; A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

NÖTH, W. **Panorama da Semiótica**: de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008. 150 p.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005. 340 p.

PEIRCE, C. S. **The essential Peirce:** selected philosophical writings. HOUSER, N. et al. (Ed.). Bloomington: Ed. Indiana University Press, 1992-1998. 448 p. Citado como EP seguido do número do volume.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 2. ed. v. 103. São Paulo: Brasiliense, 1984. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

SILVA, K. A. P. Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações. 2008. **Dissertação** (Mestrado) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SILVA, K. A. P. da. Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática e Semiótica: implicações para a atribuição de significado. **Tese** de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

STEINBRING, H. What makes a sign a Mathematical Sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**. New York: Ed. Springer, v. 61, n. 1, p.133-162, feb. 2006.

VERONEZ, M. R. D. As funções dos signos em atividades de modelagem matemática. 176p. **Tese** de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERONEZ, M. R. D.; VELEDA, G. G. Reflexões sobre a Realidade em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Perspectiva da Educação Matemática**. Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), v. 9, n. 21, 2016, p. 1237-1252.

VERONEZ, M. R. D.; CASTRO, E. M. V. de. Intervenções do Professor em Atividades de Modelagem Matemática. *In:* **Acta Scientia**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, v. 02, nº 03, p. 431-450, maio/jun. 2018.

VERTUAN, R. E. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. 2013. 247p. **Tese** de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

VIEIRA, E. M.; CALDEIRA, A. D. Vertentes teóricas presentes nas produções científicas de modelagem matemática no cenário internacional: análise dos artigos publicados nas International Conference on the Teaching of Matheematical Modelling and Applications – ICTMA books dos anos 2001 a 2007. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 12. **Anais...** Rio Claro, SP. 2008.

ANEXO 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado(a) Colaborador(a),

Seu(ua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar da pesquisa **"Signos em atividade de modelagem matemática: a matematização em foco**", sob a responsabilidade do Professor Dallan Marcelo Gregório, que irá investigar o que revelam os signos produzidos pelos alunos durante uma atividade de modelagem matemática. Seu(ua) filho(a) utiliza-se de símbolos para desenvolver atividades em matemática, pretendemos identificar a partir destes signos a maneira com que estes influenciam o aprendizado, buscando aprimorar os processos de ensino e aprendizagem desta disciplina.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo COMEP/UNICENTRO.

DADOS DO PARECER DE APROVAÇÃO
emitido Pelo Comitê de Ética em Pesquisa, COMEP-UNICENTRO

Número do parecer: 2.347.974 e 2.372.270
Data da relatoria: 25/10/2017 e 08/11/2017

1. PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA: Ao participar desta pesquisa seu(ua) filho(a) estará contribuindo no desenvolvimento de reflexões sobre as novas metodologias de ensino associadas a disciplina de matemática. Para tanto, ele(a) realizará atividades de modelagem matemática em sala de aula, as quais servirão de base para esta pesquisa. O desenvolvimento dessas tarefas ocorrerá de modo semelhante as suas aulas rotineiras, apenas com uma abordagem metodológica diferente. De modo objetivo, o(a) seu(ua) filho(a) receberá atividades para serem desenvolvidas durantes as aulas de matemática, partindo de um problema do cotidiano.

Lembramos que a participação de seu(ua) filho(a) e a utilização de suas atividades na pesquisa é voluntária e não obrigatória, ou seja, ele(a) tem a liberdade de não querer participar e pode desistir a qualquer momento, mesmo após ter iniciado as atividades de modelagem matemática, sem nenhum prejuízo. Porém, as atividades referem-se ao conteúdo da disciplina de Matemática e mesmo que venha a decidir pela não participação na pesquisa, ele(a) deve realizá-las pois integrarão a avaliação bimestral da disciplina, com a diferença de que não serão contabilizadas e analisadas na pesquisa.

2. RISCOS E DESCONFORTOS: Trata-se de uma pesquisa com riscos mínimos, visto que as atividades serão desenvolvidas no ambiente escolar, durante as aulas regulares de matemática, ministradas pelo professor proponente/pesquisador. Os dados coletados consistirão em gravações de áudio e análise das atividades produzidas pelos alunos em anotações enquanto realizam atividade de modelagem matemática.

Sendo assim, acredita-se que a pesquisa não é invasiva a intimidade dos alunos, pois não aborda temas polêmicos e sim conteúdos programáticos da disciplina, acrescentando-se que não realiza nenhuma intervenção ou modificação nas variáveis fisiológicas ou psicológicas e sociais dos alunos que participarão do estudo.

Caso seu(ua) filho(a) precise de algum tratamento, orientação, encaminhamento etc., por se sentir prejudicado por causa da pesquisa, ou sofrer algum dano decorrente da mesma, o pesquisador se responsabiliza por prestar assistência integral, imediata e gratuita.

3. BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados com o estudo são: 1 - contribuição às discussões teóricas acerca do processo de aprendizagem de matemática; 2 - participação do aluno enquanto participante ativo no processo de ensino proporcionado pela modelagem matemática; 3 - diálogos entre o cotidiano escolar e a universidade.

4. CONFIDENCIALIDADE: Todas as informações que seu(ua) filho(a) nos fornecer ou que sejam conseguidas por registros escritos, atividades e áudio serão utilizadas somente para esta pesquisa.

Seus(uas) registros, atividades e gravações ficarão em segredo e seus nomes não aparecerão em lugar nenhum dos relatórios e das transcrições de áudio, nem quando os resultados forem apresentados.

5. ESCLARECIMENTOS: Se tiver alguma dúvida a respeito da pesquisa e/ou dos métodos utilizados na mesma, pode procurar a qualquer momento o pesquisador responsável em seu local de trabalho:
Nome do pesquisador responsável: Dallan Marcelo Gregório
Endereço: Avenida Bento Munhoz da Rocha Neto, 3856 – Bairro São Basílio Magno, União da Vitória – PR. UNIUV - COLTEC – Colégio Técnico.
Telefone para contato: (42) 99980-5693
Horário de atendimento: quartas a sextas-feiras: 7:45 as 12:00 horas.

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso seu(ua) filho(a) aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira.

7. CONCORDÂNCIA NA PARTICIPAÇÃO: Caso o(a) Sr.(a) estiver de acordo que seu(ua) filho(a) participe deverá preencher e assinar o Termo de Consentimento Pós-esclarecido que se segue, em duas vias, sendo que uma via ficará com você.

===

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a)__________________________, portador(a) da cédula de identidade__________________________, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelos pesquisadores, ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito do lido e explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO em participar voluntariamente desta pesquisa.
E, por estar de acordo, assina o presente termo.

União da Vitória, _______ de ________________ de _____.

____
Assinatura do participante ou Representante legal

____
Assinatura do Pesquisador

ANEXO 2

Termo de assentimento para adolescente (maiores de 12 anos e menores de 18 anos)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **“Signos em atividade de modelagem matemática: a matematização em foco”**. Seus pais permitiram que você participe.

Você se utiliza de símbolos para desenvolver atividades em matemática, pretendemos identificar a partir destes símbolos a maneira com que estes influenciam o aprendizado, buscando aprimorar os processos de ensino e aprendizagem desta disciplina.

Os adolescentes que irão participar desta pesquisa têm de 13 a 17 anos de idade.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. Porém, as atividades referem-se ao conteúdo da disciplina de Matemática e mesmo que venha a decidir pela não participação na pesquisa, deve realizá-las pois integrarão a avaliação bimestral da disciplina, com a diferença de que não serão contabilizadas e analisadas na pesquisa.

A pesquisa será feita no Colégio Técnico de União da Vitória – COLTEC, ou seja, no local onde você estuda durante as aulas regulares da disciplina de matemática, ministradas pelo professor proponente/pesquisador. Você realizará atividades de modelagem matemática, as quais servirão de base para esta pesquisa, apenas com uma abordagem metodológica diferente.

Trata-se de uma pesquisa com riscos mínimos, visto que as atividades serão desenvolvidas no ambiente em que você estuda. Os dados coletados consistirão em gravações de áudio e análise das atividades produzidas pelos alunos em anotações enquanto realizam atividade de modelagem matemática.

Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones (42) 99980-5693 do pesquisador Professor Dallan Marcelo Gregório.

Mas há coisas boas que podem acontecer como: 1 - contribuição às discussões teóricas acerca do processo de aprendizagem de matemática; 2 – sua participação enquanto participante ativo no processo de ensino proporcionado pela modelagem matemática; 3 - diálogos entre o cotidiano escolar e a universidade.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar os adolescentes que participaram.

Quando terminarmos a pesquisa geraremos como resultados uma dissertação de mestrado e um produto educacional que serão divulgados junto a instituição proponente e uma cópia será deixada junto a este Colégio, para consulta pública.

Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. Eu escrevi o telefone na parte de cima deste texto.

===

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Eu ____ aceito participar da pesquisa **“Signos em atividade de modelagem matemática: a matematização em foco”**

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e que ninguém será prejudicado.

O pesquisador tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

União da Vitória, ____ de _____________ de _______.

____ Assinatura do menor

____ Assinatura do(a) pesquisador(a)

ANEXO 3

COLTEC

Colégio Técnico de União da Vitória – COLTEC – Ensino Médio e Profissional
e-mail:coltec.secretaria@uniuv.edu.br home page: www.uniuv.edu.br
Av. Bento Munhoz da Rocha Neto, 3856 – Fone: (42) 3522-1837 ou 3522-1685
Caixa Postal 228 - CEP 84.600-000 – União da Vitória – PR

Carta de Autorização

Eu, Paulo Henrique Perotti, Diretor do Colégio Técnico de União da Vitória – COLTEC, mantido pela Fundação Municipal Centro Universitário da Cidade de União da Vitória – UNIUV, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada **"Signos em atividade de modelagem matemática: a matematização em foco"** sob responsabilidade do pesquisador/professor **Dallan Marcelo Gregório**.

Para isto, serão disponibilizados ao pesquisador todo o espaço físico do Colégio, bem como permitida a colaboração dos alunos do Ensino Médio que se dispuserem a participar da pesquisa conforme Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (para menores de idade).

União da Vitória, 11 de setembro de 2017.

ANEXO 4

Fundação Municipal Centro Universitário da Cidade de União da Vitória
Centro Universitário de União da Vitória

Carta de Autorização

Eu, Alysson Frantz, reitor da Fundação Municipal Centro Universitário da Cidade de União da Vitória – UNIUV, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada **"Signos em atividade de modelagem matemática: a matematização em foco"**sob responsabilidade do pesquisador/professor **Dallan Marcelo Gregório**no Colégio Técnico de União da Vitória – COLTEC.

Para isto, serão disponibilizados ao pesquisador todo o espaço físico do Colégio, bem como permitida a colaboração dosalunos do Ensino Médioque se dispuserem a participar da pesquisa conforme Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (para menores de idade).

União da Vitória, 11 de setembro de 2017.

Apêndice A – Folha G3A

Alunos: ____
____
____
Série: ___________ Data:____

Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento da superfície dos oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. As marés ocorrem a intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 50 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. À medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse, seguindo a Lua.

No lado oposto da Terra, dá-se o mesmo: as águas também erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões da costa, essas elevações das águas correspondem às marés altas.

Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos da Terra, em outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) ele desce, é a maré baixa.

Embora muito maior que a Lua, o Sol tem menor efeito sobre as marés, porque sua distância da Terra é muito grande. A elevação das águas, contudo, é bem mais acentuada quando os três corpos estão alinhados, o que é verificado duas vezes por mês, na Lua Cheia e na Lua Nova; são chamadas marés grandes. Quando o Sol, a Lua e a Terra estão dispostos em ângulo reto (sendo a Terra o vértice), a variação das marés é menor; são as marés mortas.

A diferença entre a maré baixa e a maré alta é denominada amplitude das marés e se mede por meio de uma régua graduada ou marégrafo.

Fonte: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P da; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na educação básica. 1 ed. 1 reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013.

A partir do texto e da temática nele contida, discuta com seus colegas e elaborem um problema que vocês gostariam de estudar.

Problema:
____
____
____

Metas iniciais para resolvê-lo:
____
____
____
____
____
____
____

Apêndice B – Folha G2B

Alunos: ____

____
____
____
Série: ____________ Data:____

Cercas elétricas vem sendo amplamente utilizadas na Europa e nos Estados Unidos desde 1930. No Brasil, o uso desse equipamento tornou-se mais significativo a partir da década de 1990.

A finalidade inicialmente proposta para a cerca elétrica era dividir áreas de pastagem e lavouras. Atualmente, ela é utilizada para auxiliar na segurança em residências, estabelecimentos comerciais e industriais, entre outros locais.

O aumento do índice de violência, tanto no campo como na cidade, requer equipamentos de segurança mais sofisticados. Portões altos, muros com pedaços de vidro, grades na janela não são mais suficientes para evitar que residências e estabelecimentos comerciais sejam invadidos. A cerca elétrica é uma alternativa para ampliar o nível de segurança.

Em áreas residenciais, a cerca elétrica costuma ser ligada a uma central, capaz de emitir descarga elétrica suficiente para impulsionar uma pessoa para longe. O choque, nome popular dessa descarga elétrica, afugenta o intruso sem causar maiores danos e, se os fios forem cortados, um alarme é acionado.

Fonte: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P da; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na educação básica. 1 ed. 1 reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013.

A partir do texto e da temática nele contida, discuta com seus colegas e elaborem um problema que vocês gostariam de estudar.

Problema:

____
____
____

Metas iniciais para resolvê-lo:

____
____
____
____
____
____
____